数学分支的思想方法丛书

明清河 主编

微积分的思想方法溯源

◎ 杨艳萍 杨耕文 著

山东大学出版社

WEIJIFEN DE
SIXIANGFANGFA SUYUAN

责任编辑　刘旭东
美术编辑　张　荔

ISBN 978-7-5607-4093-5
9 787560 740935 >
定价：12.00元

数学分支的思想方法丛书

明清河　主编

微积分的思想方法溯源

杨艳萍　杨耕文　著

山东大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分的思想方法溯源/杨艳萍,杨耕文著.—济南:山东大学出版社,2010.5
(数学分支的思想方法丛书/明清河主编)
ISBN 978-7-5607-4093-5

Ⅰ.①微…
Ⅱ.①杨…②杨
Ⅲ.①微积分—研究
Ⅳ.①O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第108644号

山东大学出版社出版发行
(山东省济南市山大南路27号 邮政编码:250100)
山 东 省 新 华 书 店 经 销
济南景升印业有限公司印刷
850×1168毫米 1/32 5.25印张 131千字
2010年5月第1版 2010年5月第1次印刷
定价:12.00元
版权所有,盗印必究
凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社营销部负责调换

内容提要

本书在数学方法论与数学哲学的视野下，对微积分中的重要概念、重要理论、重要方法的产生、发展与应用进行探讨，内容主要包括无理数、数学符号、微积分计算、函数、极限、级数与求和、微积分中的重要概念、微积分中的重要常数、微积分中的特殊积分等。

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

总 序

数学科学是在历史上逐渐形成和发展起来的一种知识系统。这个知识系统是由一个个分支组成的，同时各个分支间又相互联系、相互交叉、相互作用，从而产生新的分支，促进数学的发展与壮大。

数学的每一个分支，在确立之前都有一个萌发、孕育的过程，总结和分析它们的系统发育过程、了解其思想方法的演变规律，对了解数学的发现与创新，有着重要的引导作用。当一个数学分支形成独立的体系后，其内容体系中又包含着该分支所特有的核心思想与常用方法。任何一个数学分支都是由具体的数学知识和蕴涵的思想方法构筑起来的，数学知识是它的“躯体”，思想方法则是它的“灵魂”。思想方法寓于数学知识之中，是获取知识和发展思维的动力工具。

如果将数学的教与学仅仅看成是数学知识的传授与学习，将难以发挥数学的真正作用；领会和掌握数学的思想方法和精神实质，才能真正发挥数学在现实社会中的积极作用，才能充分显示数学的无穷威力与魅力，这应该是数学教育所努力追求的目标。

数学方法论是研究数学的发展规律、数学的思想方法以及数学中的发现、发明与创新法则的一门学问。对数学分支思想方法的研究，是数学方法论研究的一个新领域和具体方向。

关于数学分支思想方法的研究，既可以对数学分支的发现、发展、创立过程中新观念、新思想、新方法、新见解及其演变规律进行研究，又可以对数学分支内容体系中蕴含的数学思想和方法进行研究。其主要研究内容主要包括：数学分支的起源与发展，数学分支的本质和特征，数学分支与现实世界的关系，数学分支的文化地位，数学分支的认识论与方法论价值，数学分支内部间的辩证关系与美学研究，数学分支形成过程与内容体系中的核心思想，数学分支各特定内容中的数学思想与常用方法等。其主要研究方式主要有：将数学哲学、数学史、数学教育相结合，将数学思想、数学知识、数学方法相结合。

《数学分支的思想方法丛书》是作者在数学方法论指导下，结合数学教学和科学研究的实践，经过长时间探讨的辛勤劳动成果，是数学方法论研究的新领域、新成果。本丛书主要从数学史、数学方法、数学哲学、数学教学、数学学习究、数学美学等视角，对数学分支的思想方法进行研究。将数学分支的本质、内容、思想、方法以及发展历史有机地融会在一起。其显著特点是系统性、深刻性与思辨性，同时集知识性、思想性、故事性、史料性于一体。是提高科学文化素质和增长知识的理想读本，可作为大学数学专业的教材，亦可作为数学史研究的参考书目。并且对从事数学史、数学哲学、数学方法论的研究人员来说也有很好的参考价值。

希望本丛书的出版能对数学方法论研究领域的扩展和应用起到应用的推动作用。

王梓坤

（中国科学院院士、原北京师范大学校长）

目　录

第一章　无理数的发现 …………………………………… (1)

一、毕达哥拉斯及其学派 …………………………………… (1)

二、希帕索斯发现无理数 …………………………………… (2)

三、无理数的证明 …………………………………… (5)

第二章　数学符号的创立 …………………………………… (7)

一、数学符号系统的引入 …………………………………… (8)

二、初等数学符号系统 …………………………………… (8)

三、微积分符号系统 …………………………………… (11)

第三章　微积分计算的创立 …………………………………… (13)

一、阿基米德的主要贡献 …………………………………… (13)

二、阿基米德的几个故事 …………………………………… (14)

三、微积分著作《抛物弓形求积》 …………………………………… (18)

第四章　函数概念与函数思想 …………………………………… (22)

一、函数概念的产生与发展 …………………………………… (22)

二、函数思想及其在微积分中的应用 …………………………………… (27)

第五章　基本初等函数 …………………………………… (30)

一、基本初等函数的特征性质 …………………………………… (30)

二、对数函数的发明 …………………………………… (31)

三、几个指数函数的威力故事 …………………………………… (33)

第六章　微积分中的分段函数 …………………………………… (38)

一、符号函数的定义与特征……………………………… (38)
二、狄利克雷与狄利克雷函数…………………………… (39)
三、黎曼与黎曼函数……………………………………… (41)
四、高斯与取整函数……………………………………… (43)
第七章　极限概念与极限思想 …………………………… (50)
一、极限概念发展的几个历史阶段……………………… (50)
二、极限思想及其在微积分中的应用…………………… (52)
第八章　微积分中的重要概念 …………………………… (55)
一、连续…………………………………………………… (55)
二、导数与微分…………………………………………… (57)
三、积分…………………………………………………… (67)
第九章　微积分中的重要常数 π ……………………… (76)
一、圆周率的名称………………………………………… (77)
二、圆周率的符号与性质………………………………… (78)
三、圆周率的计算………………………………………… (80)
四、蒲丰投针求 π …………………………………… (82)
五、圆周率的记忆………………………………………… (83)
第十章　微积分中的重要常数 e ………………………… (84)
一、数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 收敛性的证法 …………………… (84)
二、e 的发明及其思考 ………………………………… (88)
三、π 和 e 的联系 …………………………………… (94)
四、π 和 e 的“无理性”与“超越性” ………………… (95)
五、e 与微积分公式 …………………………………… (97)
第十一章　调和级数 ……………………………………… (99)
一、调和级数的定义……………………………………… (99)
二、莱布尼兹的贡献 …………………………………… (100)
三、伯努利兄弟与调和级数 …………………………… (101)

四、伟大的定理——调和级数的发散性 …………………… (104)
五、调和级数发散性的另外两种早期证明 ……………… (107)
六、伯努利兄弟的遗憾 ………………………………… (110)
七、调和级数的前 n 项和 …………………………… (112)
八、调和级数发散性的几种证明方法 ………………… (113)
第十二章　欧拉与级数求和……………………………… (124)
一、数学英雄——欧拉 ………………………………… (124)
二、欧拉与哥尼斯堡七桥问题 ………………………… (128)
三、欧拉公式 …………………………………………… (130)
四、欧拉在级数求和方面的独特贡献 ………………… (133)
第十三章　微积分中的特殊积分…………………………… (145)
一、狄里克雷积分 ……………………………………… (145)
二、概率积分 …………………………………………… (146)
三、欧拉积分 …………………………………………… (148)
四、椭圆积分 …………………………………………… (151)
五、可利用其他技巧计算的特殊积分 ………………… (153)
参考文献………………………………………………… (157)

第一章　无理数的发现

微积分的研究对象是定义在“实数集”上的函数，实数包含有理数和无理数. 有理数可表示成$\frac{p}{q}$（p,q为整数，$q \neq 0$）的形式，有理数的这种表示形式以及不能用该形式表示的第一个数（无理数$\sqrt{2}$）的发现都归功于毕达哥拉斯学派.

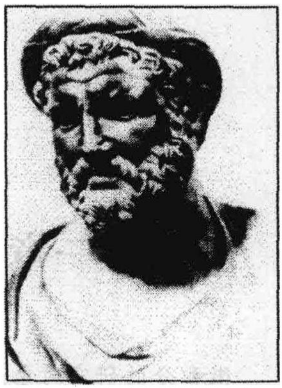
本部分主要介绍毕达哥拉斯及其学派、希帕索斯发现无理数、无理数的证明.

一、毕达哥拉斯及其学派

公元前6世纪到公元前5世纪在意大利半岛南部希腊城郊活跃着一个著名学派，这是一个由三百名贵族青年组成的进行数学研究和宗教修养的秘密社团. 创始人是著名的古希腊哲学家、数学家、天文学家毕达哥拉斯，该学派就是被称为古希腊四大数学学派之一的毕达哥拉斯学派.

毕达哥拉斯(Pythagoras)生于公元前580年至公元前500年，他从小就很聪明，一次他背着柴禾从街上走过，一位长者见他捆柴的方法与别人不同，便说：“这孩子有数学奇才，将来会成为一个大

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com



学者.”他闻听此言,便摔掉柴禾回家,准备行囊,南渡地中海到泰勒斯门下去求学了.

毕达哥拉斯本来就极聪明,经泰勒斯一指点,许多数学难题在他的手下便迎刃而解.其中,他证明了三角形的内角和等于180°;证明了若要用瓷砖铺地,则只有用正三角、正四角、正六角三种正多角砖才能刚好将地铺满,还证明了世界上只有五种正多面体,即:正4、6、8、12、20面体.他还发现了奇数、偶数、素数、合数、完全数、亲和数、三角数、五角数、平方数等.

毕达哥拉斯最伟大的成就是发现了后来以他的名字命名的毕达哥拉斯定理(勾股定理),即:以直角三角形两直角边为边长的正方形的面积之和等于以斜边为边长的正方形的面积.据说,这是当时毕达哥拉斯在寺庙里见工匠们用方砖铺地,经常要计算面积,于是便发明了此法.

最早把数的概念提到突出地位的也是毕达哥拉斯,在这之前的哲学家用火、气、水、土四种元素,解释世间万事万物,而毕达哥拉斯学派认为:宇宙间一切事物都可归结为整数或整数之比——“万物皆数”,认为数是宇宙的本源,数的元素就是万物的元素,世界是由数组成的,世界上的一切没有不可以用数来表示的,数本身就是世界的秩序.毕达哥拉斯学派把数学建立成了一门理性的学科.

二、希帕索斯发现无理数

据说有一天,毕达哥拉斯学派的成员们刚开完一个学术讨论会,正坐着游船出来领略山水风光,以驱散一天的疲劳.

这天，风和日丽，海风轻轻地吹，荡起层层波浪，大家心里很高兴. 一个满脸胡子的学者看着辽阔的海面兴奋地说："毕达哥拉斯先生的理论一点都不错. 你们看这海浪一层一层，波峰浪谷，就好像奇数、偶数相间一样，世界就是数字的秩序."

"是的，是的."这时一个正在摇桨的大个子插进来说："就说这小船和大海吧. 用小船去量海水，肯定能得出一个精确的数字. 一切事物之间都是可以用数字互相表示的."

"我看不一定."这时船尾的一个学者突然提问了，"要是量到最后，不是整数呢？"

大个子说："那就是小数."

船尾的学者又提问："要是小数既除不尽，又不能循环呢？"

其他学者几乎异口同声地说："不可能，世界上的一切东西，都可以相互用数字直接准确地表达出来."

看到这阵势，船尾的学者以一种不想再争辩的口气冷静地说："并不是世界上一切事物都可以用我们现在知道的数来互相表示，就以毕达哥拉斯先生研究最多的直角三角形来说吧，假如是等腰直角三角形，你就无法用一个直角边准确地量出斜边来."

这个提问的学者叫希帕索斯(Hippasus，约公元前 400 年)，他在毕达哥拉斯学派中是一个聪明、好学、有独立思考能力的青年数学家. 今天要不是因为争论，还不想发表自己这个新见解呢.

摇桨的大个子一听这话就停下手来大叫着："不可能，先生的理论置之四海皆准."

希帕索斯眨了眨聪明的大眼，伸出两手，用两个虎口比成一个等腰直角三角形说："如果直边是 3，斜边是几？""4.""再准确些？""4.2.""再准确些？""4.24.""再准确些呢？"一连串的提问让大个子的脸涨得绯红，一时答不上来.

希帕索斯说："你就再往后数上 10 位、20 位也不能算是最精确的. 我演算了很多次，任何等腰直角三角形的斜边，都不能用一个

精确的数字表示出来."

这话像一声晴天霹雳，全船立即响起一阵怒吼："你敢违背毕达哥拉斯先生的理论，敢破坏我们学派的信条！敢不相信数字就是世界！"

希帕索斯这时十分冷静，他说："我这是个新的发现，就是毕达哥拉斯先生在世也会奖赏我的. 你们可以随时去验证."

可是人们不听他的解释，愤怒地喊着："叛逆！先生的不肖门徒.""打死他！批死他！"大个子冲上来，当胸给了他一拳. 希帕索斯抗议着："你们无视科学，你们竟这样无理！"大个子恶狠狠地说："捍卫学派的信条永远有理."

实际上，希帕索斯在研究 1 和 2 的比例中项时（若 $1:x=x:2$，那么 x 叫 1 和 2 的比例中项），怎么也想不出这个比例中项值. 后来，他画一边长为 1 的正方形，设对角线为 x，于是 $x^2=1^2+1^2=2$. 他想，x 代表对角线长，而 $x^2=2$，那么 x 必定是确定的数. 但它是整数还是分数呢？显然，2 是 1^2 和 2^2 之间的数，因而 x 应是 1 和 2 之间的数，因而不是整数. 那么 x 会不会是分数呢？他用归谬法证明了这个数也不是分数.

希帕索斯发现的这个惊人的事实："一个边长为 1 的正方形的对角线与其一边的长度是不可公度的（不可通约的）"，与毕达哥拉斯学派"万物皆数"（指有理数）的哲理大相径庭. 对毕达哥拉斯学派是一次致命的打击，导致了当时认识上的"危机"——第一次数学危机. 这一发现使该学派领导人惶恐、恼怒，认为这将动摇学派在学术界的统治地位. 他们费了很大的精力，将此事保密，不准外传，希帕索

斯被囚禁，受到百般折磨，最后竟遭到沉舟身亡的惩处.

不可通约的本质是什么？长期以来众说纷纭，得不到正确的解释，两个不可通约的比值也一直被认为是不可理喻的数. 15 世纪意大利著名画家达·芬奇(Leonardo da Vinci, 1452 ～ 1519) 称之为"无理的数"，17 世纪德国天文学家开普勒(Johannes Kepler, 1571 ～ 1630) 称之为"不可名状"的数.

由无理数引发的数学危机一直延续到 19 世纪. 1872 年，德国数学家戴德金(Julius Wilhelm Richard Dedekind, 1831 ～ 1916) 从连续性的要求出发，用有理数的"分割"来定义无理数，并把实数理论建立在严格的科学基础上，从而结束了无理数被认为"无理"的时代，也结束了持续 2000 多年的数学史上的第一次大危机.

数学的发展史告诉人们，真理是淹没不了的，毕达哥拉斯学派抹杀真理才是"无理". 人们为了纪念希帕索斯这位为真理而献身的可敬学者，就把不可通约的量取名为"无理数"—— 这便是"无理数"的由来.

三、无理数的证明

证明某个数是无理数，一般采用反证法. 如下面三例：

例 1-1　设 P 为正整数，证明：若 P 不是完全平方数，则$\sqrt{P}$是无理数.

证：假设$\sqrt{P}$为有理数，则存在正整数 m, n，使$\sqrt{P}=\frac{m}{n}$，且 m 与 n 互素，从而它们的最大公约数为 1，由辗转相除法知：

存在整数 u, v，使 $mu+nv=1$，从而 $m^2u+mnv=m$，

于是 n 可整除 m，这样 $n=1$，因此 $P=m^2$，这与 P 不是完全平方数相矛盾，

故$\sqrt{P}$为无理数.

例 1-2　证明$\sqrt{2}$是无理数.

证:假设$\sqrt{2}$是有理数,则存在互质的正整数 p,q 使$\sqrt{2}=\frac{p}{q}$,从而$\frac{p^2}{q^2}=2$,于是得 $p^2=2q^2$,这说明 p^2 是偶数,因此 p 必为偶数.

设 $p=2k$(k 为自然数),则有 $p^2=4k^2=2q^2$,即 $2k^2=q^2$,这说明 q^2 是偶数,因此 q 必为偶数,于是 p、q 都是偶数,这与 p、q 互质矛盾.

故$\sqrt{2}$是无理数.

例 1-3　证明 lg2 是无理数.

证:假设lg2 是有理数,则存在互质的正整数 m,n 使 $\lg 2=\frac{m}{n}$,从而 $10^{\frac{m}{n}}=2$,进而 $10^m=2^n$,即 $2^m\cdot 5^m=2^n$,此式左边可被 5 整除,而右边不能,矛盾.

故 lg2 是无理数.

第二章　数学符号的创立

在微积分里，大量使用了特定的数学符号，精确化的符号语言与论证训练是微积分的重要内容之一，能把证明用准确、严密、简练的数学语言和符号书写出来是一项基本要求.

本部分主要介绍数学符号系统的引入、初等数学符号系统、微积分符号系统.

数学符号语言是数学思维的外显形式，它反映了数学思维的特征，简化了数学思维的过程，是数学思维的载体.

数学符号体系出现在 16 世纪，通行于 18 世纪，纵观世界数学史，可以看出，数学符号的使用极大地推动了数学的发展. 有人把 17 世纪叫做数学的天才时期，把 18 世纪叫做发展时期. 这两个世纪数学之所以取得了较大的成就，原因之一就是大量创造和使用了数学符号.

严整的符号体系，独特的公式语言是数学区别于其他学科的一个重要特征. 它不仅简化和丰富了数学理论的表达方式，尤其重要的是，只有在准确而严整的符号体系下，才能使运算成为可能. 德国数学家克莱因曾说："如果没有专门的符号和公式，简直就不可能有现代数学."

数学符号的种类繁多，它包括数字符号、运算符号、关系符号、

试读结束：需要全本请在线购买：　www.ertongbook.com