

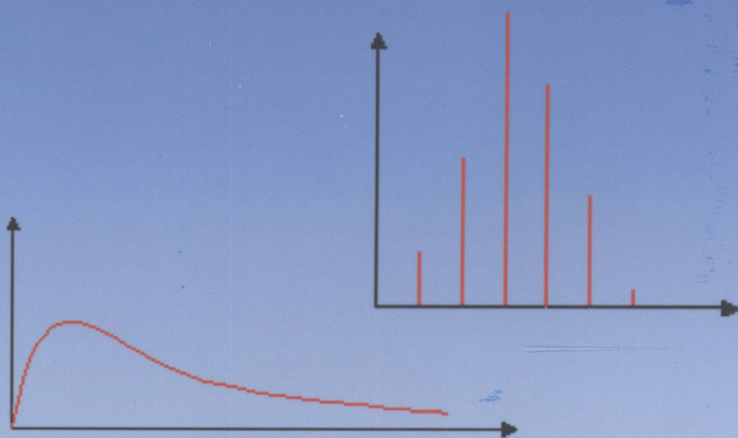
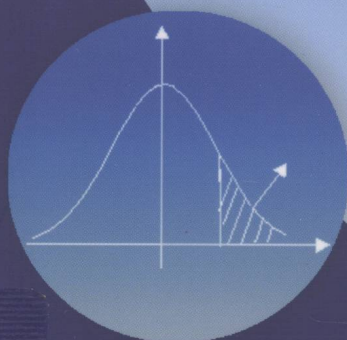


教育部高等农林院校理科基础课程
教学指导委员会推荐示范教材配套辅导教材

概率论与 数理统计学习指导

Probability and
Statistics Study Guide

● 杜忠复 崔文善 雷 鸣 主编



中国农业大学出版社

ZHONGGUONONGYEDAXUE CHUBANSHE

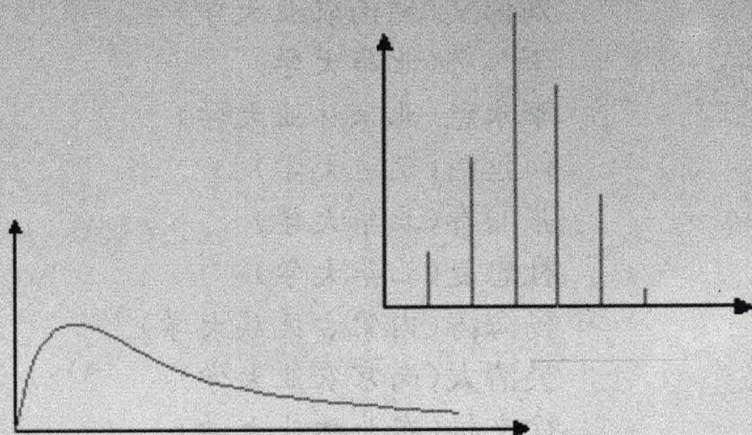
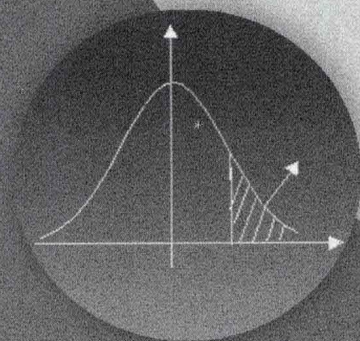


教育部高等农林院校理科基础课程
教学指导委员会推荐示范教材配套辅导教材

概率论与 数理统计学习指导

Probability and
Statistics Study Guide

● 杜忠复 崔文善 雷 鸣 主编



中国农业大学出版社

ZHONGGUONONGYEDAXUE CHUBANSHE

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计学习指导/杜忠复,崔文善,雷鸣主编. —北京:中国农业大学出版社, 2009.12

ISBN 978-7-81117-934-7

I. ①概… II. ①杜…②崔…③雷… III. ①概率论-高等学校-教学参考资料②数理统计-高等学校-教学参考资料 IV. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 224499 号

书 名 概率论与数理统计学习指导

作 者 杜忠复 崔文善 雷 鸣 主编

策划编辑 张秀环 董夫才

封面设计 郑 川

出版发行 中国农业大学出版社

社 址 北京市海淀区圆明园西路 2 号

电 话 发行部 010-62731190,2620

编辑部 010-62732617,2618

网 址 <http://www.cau.edu.cn/caup>

经 销 新华书店

印 刷 北京时代华都印刷有限公司

版 次 2009 年 12 月第 1 版 2009 年 12 月第 1 次印刷

规 格 787×1 092 16 开本 8.25 印张 198 千字

定 价 14.50 元

责任编辑 潘晓丽

责任校对 陈 莹 王晓凤

邮政编码 100193

读者服务部 010-62732336

出 版 部 010-62733440

e-mail cbsszs@cau.edu.cn

图书如有质量问题本社发行部负责调换

主 编 杜忠复(北华大学)
崔文善(青岛农业大学)
雷 鸣(北华大学)

副主编 徐文科(东北林业大学)
李永慈(北京林业大学)
李 辉(北华大学)
冯大光(沈阳农业大学)
吴清太(南京农业大学)
刘郁文(湖南农业大学)
何延治(延边大学)

编 者(按姓氏笔画排列)

于 妍(沈阳农业大学)
王殿坤(青岛农业大学)
冯大光(沈阳农业大学)
刘郁文(湖南农业大学)
李 辉(北华大学)
李永慈(北京林业大学)
何延治(延边大学)
张丽春(北华大学)
杜忠复(北华大学)
杨海涛(内蒙古民族大学)
吴清太(南京农业大学)
徐文科(东北林业大学)
崔文善(青岛农业大学)
葛 立(河南科技学院)
雷 鸣(北华大学)

**教育部高等农林院校理科基础课程教学指导委员会
推荐示范教材编审指导委员会**

主 任 江树人

副主任 杜忠复 程备久

委 员(以姓氏笔画为序)

王来生	王国栋	方炎明	李宝华	张文杰	张良云
杨婉身	吴 坚	林家栋	陈长水	周训芳	周志强
高孟宁	戚大伟	梁保松	曹 阳	焦群英	傅承新

**教育部高等农林院校理科基础课程教学指导委员会
推荐数学类示范教材编审指导委员会**

主 任 高孟宁

委 员(以姓氏笔画为序)

王来生	石 峰	卢恩双	吴 坚	杜忠复	张良云
杜晓林	孟 军	房少梅	梁保松	惠淑荣	

出版说明

在教育部高教司农林医药处的关怀指导下,由教育部高等农林院校理科基础课程教学指导委员会(以下简称“基础课教指委”)推荐的本科农林类专业数学、物理、化学基础课程系列示范性教材现在与广大师生见面了。这是近些年全国高等农林院校为贯彻落实“质量工程”有关精神,广大一线教师深化改革,积极探索加强基础、注重应用、提高能力、培养高素质本科人才的立项研究成果,是具体体现“基础课教指委”组织编制的相关课程教学基本要求的物化成果。其目的在于引导深化高等农林教育教学改革,推动各农林院校紧密联系教学实际和培养人才需求,创建具有特色的数理化精品课程和精品教材,大力提高教学质量。

课程教学基本要求是高等学校制定相应课程教学计划和教学大纲的基本依据,也是规范教学和检查教学质量的依据,同时还是编写课程教材的依据。“基础课教指委”在教育部高教司农林医药处的统一部署下,经过批准立项,于2007年年底开始组织农林院校有关数学、物理、化学基础课程专家成立专题研究组,研究编制农林类专业相关基础课程的教学基本要求,经过多次研讨和广泛征求全国农林院校一线教师意见,于2009年4月完成教学基本要求的编制工作,由“基础课教指委”审定并报教育部农林医药处审批。

为了配合农林类专业数理化基础课程教学基本要求的试行,“基础课教指委”统一规划了名为“教育部高等农林院校理科基础课程教学指导委员会推荐示范教材”(以下简称“推荐示范教材”)。“推荐示范教材”由“基础课教指委”统一组织编写出版,不仅确保教材的高质量,同时也使其具有比较鲜明的特色。

一、“推荐示范教材”与教学基本要求并行 教育部专门立项研究制定农林类专业理科基础课程教学基本要求,旨在总结农林类专业理科基础课程教育教学改革经验,规范农林类专业理科基础课程教学工作,全面提高教育教学质量。此次农林类专业数理化基础课程教学基本要求的研制,是迄今为止参与院校和教师最多、研讨最为深入、时间最长的一次教学研讨过程,使教学基本要求的制定具有扎实的基础,使其具有很强的针对性和指导性。通过“推荐示范教材”的使用推动教学基本要求的试行,既体现了“基础课教指委”对推行教学基本要求的决心,又体现了对“推荐示范教材”的重视。

二、规范课程教学与突出农林特色兼备 长期以来各高等农林院校数理化基础课程在教学计划安排和教学内容上存在着较大的趋同性和盲目性,课程定位不准,教学不够规范,必须科学地制定课程教学基本要求。同时由于农林学科的特点和专业培养目标、培养规格的不同,对相关数理化基础课程要求必须突出农林类专业特色。这次编制的相关课程教学基本要求最大限度地体现了各校在此方面的探索成果,“推荐示范教材”比较充分反映了农林类专业教学改革的新成果。

三、教材内容拓展与考研统一要求接轨 2008年教育部实行了农学门类硕士研究生统一入学考试制度。这一制度的实行,促使农林类专业理科基础课程教学要求作必要的调整。“推荐示范教材”充分考虑了这一点,各门相关课程教材在内容上和深度上都密切配合这一考试制度的实行。

四、多种辅助教材与课程基本教材相配 为便于导教导学导考,我们以提供整体解决方案的模式,不仅提供课程主教材,还将逐步提供教学辅导书和教学课件等辅助教材,以丰富的教学资源充分满足教师 and 学生的需求,提高教学效果。

乘着即将编制国家级“十二五”规划教材建设项目之机,“基础课教指委”计划将“推荐示范教材”整体运行,以教材的高质量和新型高效的运行模式,力推本套教材列入“十二五”国家级规划教材项目。

“推荐示范教材”的编写和出版是一种尝试,赢得了许多院校和老师的参与和支持。在此,我们衷心地感谢积极参与的广大教师,同时真诚地希望有更多的读者参与到“推荐示范教材”的进一步建设中,为推进农林类专业理科基础课程教学改革,培养适应经济社会发展需要的基础扎实、能力强、素质高的专门人才做出更大贡献。

中国农业大学出版社

2009年8月

内 容 提 要

本教材是在教育部高等农林院校理科基础课程教学指导委员会领导下,针对农林院校人才培养目标,为开设概率论与数理统计课程的农林院校而编写的与《概率论与数理统计》教材相配套的教学辅导教材,供师生在教与学的过程中参考使用。

本教材针对主教材的前八章内容展开,为了方便教师、学生的教与学,各章均按:知识点介绍、教学基本要求与重点、典型例题、练习题及练习题参考答案五部分组成。知识点概括各章内容并蕴含解决问题的方法,教学基本要求则明确教与学的基本目标,典型例题给师生提供典型的问题及解决这些问题的常用方法,练习题供学生学习时训练之用。

前言

概率论与数理统计是高等农林院校及综合性大学农林专业的一门必修基础课,本书根据普通高等学校农林类专业数理化基础课程教学基本要求,并结合作者多年的概率论与数理统计的教学实践,在教育部高等农林院校理科基础课程教学指导委员会领导下,经过统一筹划编写的与《概率论与数理统计》(杜忠复、崔文善、雷鸣主编)教材相配套的教学辅导书,供师生在教与学的过程中参考使用。

全书针对概率论与数理统计主教材的前八章内容展开,为了教师、学生的教与学,各章均按:一、知识点介绍;二、教学基本要求与重点;三、典型例题;四、练习题;五、练习题参考答案五部分组成。知识点概括各章需要学生掌握的内容并蕴含了解决问题的方法;教学基本要求则明确了教与学的基本目标;典型例题给师生提供典型的问题及解决这些问题的常用方法;练习题供学生学习时训练之用。

本书由杜忠复、崔文善、雷鸣担任主编,徐文科、李永慈、李辉、冯大光、吴清太、刘郁文、何延治担任副主编,全书由杜忠复统一制订编写大纲并统一定稿。

参加本书编写工作的人员还有王殿坤、张丽春、杨海涛、葛立、于妍。

中国农业大学出版社多年来在工作上及本书的编写过程中从各方面给予我们大力的支持和帮助,这里我们也一并向他们表示感谢。

由于编者学识有限,不妥之处必定难免,敬请同行指正。

编 者

2009年10月

C 目录

CONTENTS

第 1 章 概率论基础	1
一、知识点介绍	1
二、教学基本要求与重点	5
三、典型例题	5
四、练习题一	9
五、练习题一参考答案	11
第 2 章 一维随机变量及其分布	14
一、知识点介绍	14
二、教学基本要求与重点	17
三、典型例题	17
四、练习题二	20
五、练习题二参考答案	21
第 3 章 多维随机变量及其分布	24
一、知识点介绍	24
二、教学基本要求与重点	28
三、典型例题	28
四、练习题三	33
五、练习题三参考答案	36
第 4 章 随机变量的数字特征	39
一、知识点介绍	39
二、教学基本要求与重点	42
三、典型例题	42
四、练习题四	44
五、练习题四参考答案	46
第 5 章 大数定律与中心极限定理	52
一、知识点介绍	52
二、教学基本要求与重点	53
三、典型例题	53



四、练习题五	56
五、练习题五参考答案	57
第 6 章 数理统计的基本概念	58
一、知识点介绍	58
二、教学基本要求与重点	63
三、典型例题	63
四、练习题六	70
五、练习题六参考答案	73
第 7 章 假设检验	77
一、知识点介绍	77
二、教学基本要求与重点	80
三、典型例题	80
四、练习题七	83
五、练习题七参考答案	85
第 8 章 统计分析	87
一、知识点介绍	87
二、教学基本要求与重点	92
三、典型例题	92
四、练习题八	100
五、练习题八参考答案	102
附表	104
附表 1 几种常见的概率分布表	104
附表 2 标准正态分布表	106
附表 3 t 分布表	107
附表 4 卡方分布表	109
附表 5 F 分布临界值表	111
附表 6 泊松分布数值表	115
附表 7 r 界值表	116

一、知识点介绍

(一) 随机试验

所谓随机现象是指在一定条件下可能发生也可能不发生的现象.

对随机现象进行研究所进行的观察称为试验.

一个试验如果具有以下几个特点:

- (1) 在相同的条件下可以重复进行;
 - (2) 每次试验的结果不止一个,但是在试验之前可以确定一切可能出现的结果,一次试验中有且只有其中的一个结果发生;
 - (3) 在试验之前不能准确地预知哪种结果会出现.
- 称这种试验为随机试验,简称试验,记作 E .

(二) 样本空间和随机事件

随机试验 E 的每一个可能结果称为样本点或基本事件,记作 ω . 样本点的全体组成的集合称为样本空间,用 Ω 表示. 显然 $\omega \in \Omega$. 样本空间 Ω 的任一子集称为随机事件. 用 $A, B, C, \dots$, 表示.

必然事件: 每次试验中一定会发生的事件,记作 Ω .

不可能事件: 每次试验中一定不会发生的事件,记作 $\emptyset$.

(三) 事件之间的关系和运算

(1) 事件的包含: 若事件 A 中任一样本点都属于事件 B , 称事件 A 包含于事件 B (或事件 B 包含事件 A). 记作: $A \subset B$ 或 $B \supset A$ (表示事件 A 发生则意味着事件 B 发生);

(2) 事件的相等: 若 $A \subset B$, 同时 $B \subset A$, 则称事件 A 与事件 B 相等, 记作 $A = B$;



(3)事件的并(事件的和): $A \cup B$ 或 $A + B$ 称为事件 A 和事件 B 的并事件,表示两个事件至少一个发生;

$$\text{推广: } \bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_n.$$

(4)事件的积(事件的交):由既属于事件 A 又属于事件 B 的样本点组成的集合,称为事件 A 和事件 B 的交或积,记作 $A \cap B$ 或 AB (表示 A, B 两个事件同时发生);

(5)互斥事件(互不相容事件):若 $AB = \Phi$,则称事件 A, B 互斥,亦称事件 A, B 互不相容(表示 A, B 两个事件不能同时发生);

(6)对立事件(互逆事件):由 Ω 中不属于 A 的样本点组成的集合,即 $\bar{A} = \Omega - A$,亦称为事件 A 的逆事件.显然: $A\bar{A} = \Phi, A \cup \bar{A} = \Omega, \bar{\bar{A}} = A$;

(7)事件的差:由属于事件 A 但不属于事件 B 的所有样本点组成的集合,记作 $A - B$.表示事件 A 发生而事件 B 不发生,另记为 $A\bar{B}$;

(8)事件运算的基本关系

$$\text{交换律: } A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$$

$$\text{结合律: } A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$\text{分配律: } (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

$$\text{德莫根公式: } \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

(四) 概率的定义和运算

1. 频率的定义及性质

设在 n 次随机试验中事件 A 发生了 μ 次,则 $\frac{\mu}{n}$ 称为 n 次随机试验中事件 A 发生的频率,记作 $f_n(A) = \frac{\mu}{n}$, μ 称为频数.

频率具有以下性质:

$$(1) \forall A, 0 \leq f_n(A) \leq 1;$$

$$(2) f_n(\Omega) = 1, f_n(\Phi) = 0;$$

$$(3) \text{若 } AB = \Phi, \text{则 } f_n(A \cup B) = f_n(A) + f_n(B).$$

$$\text{推广: 对于 } n \text{ 个互不相容的事件 } A_1, \dots, A_n, \text{ 有 } f_n\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n f_n(A_i).$$

(4)随试验次数的增加,频率具有一定的稳定性.

2. 概率的统计定义

在相同的条件下,重复进行 n 次试验,如果随着试验次数的增大,事件 A 出现的频率 $f_n(A)$ 稳定地在某一常数 p ($0 \leq p \leq 1$) 附近摆动,则称 $P(A) = p$ 为事件 A 发生的概率.

3. 概率的古典定义

设 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ 为古典概型的样本空间,其中 $P(\omega_i) = \frac{1}{n}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 设事件 A 包含 r_A 个样本点,则规定 $P(A) = \frac{r_A}{n}$ 为事件 A 发生的概率.

4. 概率的公理化定义

设随机试验 E 的样本空间为 Ω , 对于试验 E 的每一个随机事件 A , 都赋予一个实数 $P(A)$, 若 $P(A)$ 满足

$$(1) \forall A, \text{ 都有 } 0 \leq P(A) \leq 1;$$

$$(2) P(\Omega) = 1;$$

(3) 对于 $i \neq j, A_i A_j = \Phi (i, j = 1, 2, \dots)$, 有 $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$, 则称 $P(A)$ 为事件 A 发生的概率.

5. 概率的基本性质

$$(1) P(\Phi) = 0;$$

$$(2) \text{ 若 } A_1, A_2, \dots, A_n \text{ 两两互不相容, 则 } P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i);$$

$$(3) \text{ 若事件 } \bar{A} \text{ 为事件 } A \text{ 的对立事件, 则 } P(\bar{A}) = 1 - P(A);$$

$$(4) \text{ 差公式: } P(A - B) = P(A \bar{B}) = P(A) - P(AB),$$

特别地, 设 $A \supset B$, 则 $P(A - B) = P(A) - P(B)$ 且 $P(A) \geq P(B)$;

$$(5) \text{ 对于样本空间中任意的事件 } A \text{ 与事件 } B, \text{ 有 } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

$$\text{推广: } P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC),$$

$$P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \dots A_n)$$

6. 几何概率及性质

在区域 Ω 中有任意一个小区域 A , 如果它的面积为 S_A , 则点落入区域 A 的可能性大小与 S_A 成正比, 而与 A 的位置及形状无关. 则 $P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega}$ 称为事件 A 的几何概率. 它满足概率公理化定义的几个性质.

(五) 条件概率

1. 定义

设 A, B 为任意的两个随机事件, 如果 $P(B) > 0$, 则称 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$ 为在事件 B 发生的条件下事件 A 发生的条件概率.

2. 条件概率的性质

设 B 是一事件, 且 $P(B) > 0$, 则

$$(1) \forall A, 0 \leq P(A|B) \leq 1;$$

$$(2) P(\Omega|B) = 1;$$

$$(3) \text{ 设 } A_1, A_2, \dots, A_n \text{ 互不相容, 则 } P(\bigcup_{i=1}^n A_i | B) = P(A_1 | B) + \dots + P(A_n | B).$$

3. 乘法公式

$$P(AB) = P(B)P(A|B), P(B) > 0$$



$$P(AB) = P(A)P(B|A), P(A) > 0$$

推广: $P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 A_2)$.

(六) 全概率公式

1. 划分

设 Ω 是随机试验 E 的样本空间, $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为样本空间 Ω 的一组事件, 若满足

(1) $A_i A_j = \Phi (i \neq j)$; (2) $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$

则称 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为样本空间 Ω 的一个划分.

2. 全概率公式

设 Ω 是随机试验 E 的样本空间, $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为 Ω 的一个划分, B 为 Ω 中的任一事件,

且 $P(A_i) > 0 (i = 1, 2, \dots)$, 则 $P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)$.

(七) 贝叶斯公式

设 $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 为样本空间的一个划分, 且 $P(A_i) > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$, B 为 Ω 中的任一事件且 $P(B) > 0$, 则

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

(八) 事件的独立性

(1) 设 A, B 为两个随机事件, 若 $P(AB) = P(A)P(B)$, 则称事件 A 与事件 B 相互独立.

(2) 定理 当 $P(A) > 0$ (或 $P(B) > 0$) 时, 事件 A 与事件 B 相互独立的充要条件是

$$P(A|B) = P(A) [P(B|A) = P(B)]$$

(3) 设事件 A_1, A_2, A_3 满足

$$\begin{cases} P(A_1 A_2) = P(A_1)P(A_2) \\ P(A_1 A_3) = P(A_1)P(A_3) \\ P(A_2 A_3) = P(A_2)P(A_3) \\ P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) \end{cases}$$

则称 A_1, A_2, A_3 相互独立.

注: (1) A_1, A_2, A_3 相互独立, 则 A_1, A_2, A_3 两两相互独立.

(2) 若对 $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ 有, $P(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k})$, 称 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 相互独立.

(九) 重复独立试验

(1) 在相同的条件下, 重复做 n 次试验, 且各试验及其结果都是相互独立的, 则称这种试

验为 n 重贝努利试验.

(2) 设在一次试验中事件 A 出现的概率为 p ($0 < p < 1$), 在 n 次重复独立试验中, 事件 A 恰好发生 k 次的概率为 $P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ ($k=0, 1, 2, \dots$).

注: 此公式恰好是 $[p + (1-p)]^n$ 的二项展开式, 称为二项概率公式.

二、教学基本要求与重点

(1) 了解随机现象与随机试验, 了解样本空间的概念, 理解随机事件的概念, 掌握事件之间的关系与运算;

(2) 了解事件频率的概念, 理解概率的统计定义. 了解概率的古典定义, 会计算简单的古典概率;

(3) 了解概率的公理化定义, 理解概率的基本性质, 了解概率加法定理;

(4) 了解条件概率的概念、概率的乘法定理. 了解并会应用全概率公式、贝叶斯公式解决比较简单的问题;

(5) 理解事件的独立性概念;

(6) 了解贝努利概型和二项概率的计算方法.

三、典型例题

例 1 写出下列随机试验的样本空间:

(1) 记录一个小班一次数学考试的平均分数(百分制记分);

(2) 同时掷两颗骰子, 记录两颗骰子的点数之和;

(3) 10 只产品中有 3 只是次品, 每次从中取 1 只, 取后不放回, 直到 3 只次品都取出为止, 记录抽取的次数;

(4) 生产的产品直到得到 5 件正品为止, 记录生产产品的总件数;

(5) 测量一汽车通过某定点的速度;

(6) 在单位圆内任意取一点, 记录它的坐标.

解 (1) 设该小班人数为 n , 则所求样本空间

$$\Omega = \left\{ \frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{100n}{n} \right\}.$$

(2) 两颗骰子点数之和最小为 2, 最大为 12, 故所求样本空间

$$\Omega = \{2, 3, \dots, 11, 12\}.$$

(3) 将 3 只次品都取出, 至少要抽取 3 次, 而最多抽取 10 次即可, 故所求样本空间

$$\Omega = \{3, 4, \dots, 9, 10\}.$$

(4) 最理想的情形是开始生产的 5 件产品都是正品, 故所求样本空间

$$\Omega = \{5, 6, \dots\}.$$



(5) 若不考虑汽车的运动方向, 则所求样本空间

$$\Omega = \{v | v > 0\}.$$

若考虑汽车的运动方向, θ 表示该运动方向与正东方向之间的夹角, 则所求样本空间

$$\Omega = \{(v \cos \theta, v \sin \theta) | v > 0, 0 \leq \theta < 2\pi\}.$$

(6) 设点的坐标为 (x, y) , 则所求样本空间

$$\Omega = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1, x, y \in \mathbf{R}\}.$$

例 2 设 A, B, C 是样本空间 Ω 中的三个随机事件, 用事件的运算式子表示下列各随机事件.

- (1) 三个事件恰有两个发生;
- (2) 三个事件至少发生一个;
- (3) 三个事件中至少发生两个;
- (4) A 与 B 发生, C 不发生;
- (5) A, B, C 都不发生;
- (6) A, B, C 至多发生一个.

解 (1) $AB\bar{C} \cup A\bar{B}C \cup \bar{A}BC$;

$$(2) A \cup B \cup C;$$

$$(3) AB\bar{C} \cup \bar{A}BC \cup \bar{A}B\bar{C} \cup ABC;$$

$$(4) AB\bar{C} \text{ 或 } AB - C;$$

$$(5) \bar{A}\bar{B}\bar{C} \text{ 或 } \overline{A \cup B \cup C};$$

$$(6) \bar{A}\bar{B}\bar{C} \cup A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C.$$

例 3 已知事件 A, B 和 C 满足 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$, $P(AB) = P(BC) = 0$, $P(AC) = \frac{1}{8}$, 试求随机事件 A, B, C 中至少有一个发生的概率.

解 因为 $ABC \subset AB$, 所以

$$P(ABC) \leq P(AB) = 0,$$

于是

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 0 - \frac{1}{8} - 0 + 0 = \frac{5}{8}. \end{aligned}$$

例 4 设事件 A, B 的概率分别为 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{1}{2}$, 求在以下三种情况下的 $P(B\bar{A})$ 值.

(1) A, B 互斥; (2) $A \subset B$; (3) $P(AB) = \frac{1}{8}$

解 (1) 因为 $AB = \Phi$, 所以 $P(AB) = 0$