高职高专“十一五”规划教材

GAODENG SHUXUE

高等数学

（附练习册）

陈玄令　杜晓梅　李景龙　主编

化学工业出版社

高职高专“十一五”规划教材

高等数学

（附练习册）

陈玄令　杜晓梅　李景龙　主　编

化学工业出版社

·北京·

本书是根据教育部制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》，以及深入总结多年高职高专《高等数学》教学经验和教学改革的基础上，并充分考虑高职高专专业教学改革的需要而编写的。

全书共十章包括：函数、极限与连续；导数与微分；导数的应用；不定积分；定积分及其应用；微分方程；向量与空间解析几何；多元函数微分学；二重积分及其应用；无穷级数的内容。为适应不同专业的需求，在附录一中编写了微积分在经济领域的一些应用，供相关专业学生选用或自学；为方便检索，在附录二中还编写了初等数学及部分积分公式。

本书说理浅显，便于自学，既适合作为高职高专教育《高等数学》教材，也可以作为成人高等教育工科类各专业学生的教材或工程技术人员的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/陈玄令，杜晓梅，李景龙主编．—北京：化学工业出版社，2010.8
高职高专“十一五”规划教材
ISBN 978-7-122-09003-4

Ⅰ．高…　Ⅱ．①陈…②杜…③李…　Ⅲ．高等数学-高等学校：技术学院-教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 24479 号

责任编辑：蔡洪伟　　文字编辑：马冰初
责任校对：郑　捷　　装帧设计：关　飞

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号　邮政编码 100011）
印　　刷：北京市振南印刷有限责任公司
装　　订：三河市宇新装订厂
787mm×1092mm　1/16　印张 16¾　字数 447 千字　　2010 年 9 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899
网　　址：http://www.cip.com.cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价（含练习册）：34.00 元

前言

本书是根据教育部制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》，以及深入总结多年高职高专《高等数学》教学经验和教学改革的基础上，并充分考虑高职高专专业教学改革的需要而编写的。本教材编写人员遵循“强化能力、注重应用”的编写原则，在内容安排上，追求体系整体优化，注重与初等数学的衔接，注重数学思想和数学方法的介绍，在编写过程中，编者根据教育部制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，在充分研究当前中国高职高专教育现状、发展趋势的情况下，认真总结、分析高职高专院校高等数学教学改革的经验，在“以应用为目的，以必需够用为度”的原则指导下完成的。本书从概念的引入、内容的选择、例题的选编求解都考虑到了技能型人才培养的要求；对基本概念、基本定理，尽量用几何意义、物理意义与实际背景直观解释，深入浅出，论证简明，加强基本运算，力求做到教材内容“易学、易教、实用”。

本教材，力图体现以下特色。

① 精选内容，构架新的课程体系，使受教育者学会运用数学方法与工具，分析问题、解决问题，达到高职教育的人才培养目标。同时，考虑到以“必需、够用”为度的原则，因而必须对数学的“系统性”和“严密性”赋予新的认识。

在尽可能满足数学知识在教学时能够衔接的基础上，对教学内容进行了精简，删去了与高职层次不符的内容，淡化理论性、完整性及逻辑推理，体现适用、实用、简明的要求。本书中对教学内容的严密性和论证的简化处理就是一种较好的处理方法。

② 新的课程体系充分体现“以应用为目的”的要求。众所周知，数学的产生和发展就是从实践中来再到实践中去的，我们理应取其精髓，还其本来面目，使受教育者明其应用背景，知其应用方法。因此本书的目的就是使学生学会如何应用数学方法解决实际问题。于是，本书大量的篇幅是数学应用，而不是公式的推导或定理的证明。

③ 考虑到文科学生的需要，本书特意在附录中引入了数学在经济学中的应用问题。当然理工科学生了解一些数学在经济学中的应用基础也是很有必要的。

④ 考虑到高职高专教育学制和学生基础的实际情况，本书在内容安排上尽量做到重点突出，难点分散；在问题的阐述上，尽力做到开门见山、简明扼要、循序渐进和深入浅出；并注重几何解释、抽象概括与逻辑推理有机结合，以培养学生数学应用的意识、兴趣和综合能力。

本书既适合高职高专学校各专业使用，也适合作为同层次的成人教育教材以及工程技术人员的参考书。为了便于教师更好地使用本教材，编者充分考虑到高等教育大众化对教学设计多样性和学生发展个性化的要求以及不同专业的不同需要，并根据多年的教学经验，提出如下几套教学方案，以供参考。

① 对于安排 120 学时左右的专业，可以完成第一章至第十章（第七章及带“*”的内容除外）。

② 对于安排 80 学时左右的专业，可以完成第一章至六章（带“*”的内容除外）和第八章、第九章的部分内容。

书中标有“*”及附录一部分，教师可根据专业特点与学生实际需要选用，或供有余力的学生课外阅读。

该书由陈玄令、杜晓梅、李景龙担任主编。辽宁建筑职业技术学院陈玄令编写第一章、第二章、第四章、第五章及附录一；辽宁建筑职业技术学院杜晓梅编写第六章、第七章、第八章；辽宁建筑职业技术学院李景龙编写第三章、第九章、第十章；辽宁建筑职业技术学院李国军编写附录二；辽宁建筑职业技术学院于兴甲、冯大雨编写练习册。

在本书编写过程中，得到了辽宁建筑职业技术学院基础部全体数学教师的大力支持，并提出了许多修改建议。辽宁工程技术大学职业技术学院张效仁教授也对书稿提出了许多宝贵的建议，在此一并致谢。

由于本人水平所限，书中不妥之处在所难免，敬请各位同仁与读者批评指正。

编者

2010 年 5 月

目 录

第一章 函数、极限与连续 …… 1

第一节 函数的概念 …… 1
一、函数的概念及其定义域的求法 …… 1
二、函数的表示法 …… 3
【习题 1-1】 …… 4
第二节 函数的几种性质 …… 4
一、函数的单调性 …… 4
二、函数的奇偶性 …… 5
三、函数的有界性 …… 5
四、函数的周期性 …… 5
【习题 1-2】 …… 5
第三节 初等函数 …… 6
一、基本初等函数 …… 6
二、复合函数 …… 7
三、初等函数 …… 8
四、建立函数关系举例 …… 8
【习题 1-3】 …… 10
第四节 函数的极限 …… 10
一、数列的极限 …… 11
二、函数的极限 …… 12
三、无穷小量 …… 14
四、无穷大量 …… 14
五、无穷小量的性质 …… 15
【习题 1-4】 …… 16
第五节 极限的四则运算法则 …… 17
一、极限的四则运算法则 …… 17
二、极限的四则运算法则应用举例 …… 17
【习题 1-5】 …… 19
第六节 两个重要极限 …… 20
一、第一个重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ …… 20
二、第二个重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$ …… 21
【习题 1-6】 …… 22
* 第七节 无穷小量的比较 …… 23
一、无穷小量的比较 …… 23
二、无穷小量的等价代换 …… 24
【习题 1-7】 …… 25
第八节 函数的连续性 …… 25
一、函数连续性的概念 …… 25
二、连续函数的运算 …… 27
三、初等函数的连续性 …… 28
四、函数的间断点 …… 29
五、闭区间上连续函数的性质 …… 30
【习题 1-8】 …… 30
【复习题一】 …… 31

第二章 导数与微分 …… 33

第一节 导数的概念 …… 33
一、导数的概念 …… 33
二、求导数的步骤 …… 36
三、导数的几何意义 …… 37
四、可导与连续的关系 …… 38
【习题 2-1】 …… 39
第二节 导数的四则运算法则 …… 40
一、导数的四则运算法则 …… 40
二、导数的四则运算法则的应用举例 …… 40
【习题 2-2】 …… 42
第三节 复合函数的求导法则 …… 42
【习题 2-3】 …… 45
第四节 初等函数的导数 …… 45
【习题 2-4】 …… 48
* 第五节 高阶导数 …… 48
【习题 2-5】 …… 49
第六节 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数 …… 50
一、隐函数求导法 …… 50
二、对数求导法及求幂指函数的导数 …… 51
* 三、由参数方程所确定的函数的求导法 …… 51
【习题 2-6】 …… 52
第七节 微分及其应用 …… 53
一、微分概念 …… 53
二、微分的基本公式和微分法则 …… 54
* 三、微分在近似计算中的应用 …… 55
【习题 2-7】 …… 56
【复习题二】 …… 57

第三章　导数的应用 …… 59

第一节　微分中值定理 …… 59
一、罗尔定理 …… 59
二、拉格朗日中值定理 …… 60
*三、柯西中值定理 …… 60
【习题 3-1】 …… 61
第二节　洛必达法则 …… 61
【习题 3-2】 …… 63
第三节　函数的单调性及其极值 …… 64
一、函数单调的判定法 …… 64
二、函数的极值及其求法 …… 66
【习题 3-3】 …… 68
第四节　函数的最大值和最小值 …… 68
一、极值与最值的关系 …… 69
二、最大值和最小值的求法 …… 69
三、最大值、最小值的应用 …… 70
【习题 3-4】 …… 71
*第五节　曲线的凹凸及函数图形的描绘 …… 71
一、凹凸性的概念 …… 72
二、曲线凹凸性的判定 …… 72
三、渐近线 …… 73
四、描绘函数图形的一般步骤 …… 73
【习题 3-5】 …… 74
【复习题三】 …… 75

第四章　不定积分 …… 77

第一节　不定积分的概念 …… 77
一、原函数与不定积分 …… 77
二、不定积分的基本性质 …… 79
三、基本积分公式 …… 79
四、不定积分的几何意义 …… 79
【习题 4-1】 …… 80
第二节　不定积分的性质和基本积分法 …… 81
一、不定积分的性质 …… 81
二、不定积分的基本积分法 …… 81
【习题 4-2】 …… 83
第三节　换元积分法 …… 83
一、第一类换元积分法 …… 83
二、第二类换元积分法 …… 87
【习题 4-3】 …… 89
第四节　分部积分法 …… 90
【习题 4-4】 …… 92
【复习题四】 …… 92

第五章　定积分及其应用 …… 94

第一节　定积分的概念与性质 …… 94
一、两个实例 …… 94
二、定积分的定义 …… 95
三、定积分的几何意义 …… 97
四、定积分的性质 …… 98
【习题 5-1】 …… 99
第二节　微积分的基本公式 …… 100
【习题 5-2】 …… 101
第三节　定积分的换元积分法与分部积分法 …… 102
一、定积分的换元积分法 …… 102
二、定积分的分部积分法 …… 104
【习题 5-3】 …… 105
*第四节　广义积分 …… 106
一、无穷限广义积分 …… 106
二、无界函数的广义积分 …… 107
【习题 5-4】 …… 108
第五节　平面图形的面积 …… 109
一、定积分的微元法 …… 109
二、平面图形的面积 …… 110
【习题 5-5】 …… 111
第六节　旋转体的体积 …… 111
【习题 5-6】 …… 113
【复习题五】 …… 114

第六章　微分方程 …… 115

第一节　微分方程的基本概念 …… 115
一、微分方程的概念 …… 115
二、微分方程的解 …… 115
【习题 6-1】 …… 116
第二节　可分离变量的微分方程与齐次方程 …… 116
一、可分离变量的微分方程 …… 116
二、齐次微分方程 …… 116
【习题 6-2】 …… 117
*第三节　线性微分方程 …… 117
一、线性微分方程 …… 117
二、非齐次线性微分方程的解法 …… 118
三、可降阶的高阶方程 …… 118
【习题 6-3】 …… 120

【复习题六】 …… 120

第七章　向量与空间解析几何 …… 122
第一节　空间直角坐标系 …… 122
一、空间直角坐标系 …… 122
二、空间两点间的距离公式 …… 123
【习题 7-1】 …… 123
第二节　向量的概念及其坐标表示法 …… 124
一、向量的概念及线性运算 …… 124
二、向量的坐标表示法 …… 125
【习题 7-2】 …… 127
第三节　向量的数量积与向量积 …… 127
一、向量的数量积 …… 127
二、两向量的向量积 …… 128
【习题 7-3】 …… 130
第四节　平面的方程 …… 130
一、平面的点法式方程 …… 130
二、平面的一般方程 …… 131
三、两平面的夹角 …… 132
【习题 7-4】 …… 133
第五节　空间直线的方程 …… 133
一、空间直线的点向式方程和参数方程 …… 133
二、空间直线的一般方程 …… 134
三、空间两直线的夹角 …… 134
【习题 7-5】 …… 135
第六节　二次曲面 …… 135
一、曲面方程的概念 …… 135
二、常见的二次曲面及其方程 …… 135
【习题 7-6】 …… 138
【复习题七】 …… 138

第八章　多元函数微分学 …… 140
第一节　二元函数的极限与连续 …… 140
一、多元函数的概念 …… 140
二、二元函数的极限 …… 142
三、二元函数的连续性 …… 143
【习题 8-1】 …… 143
第二节　偏导数 …… 144
一、偏导数的概念及其运算 …… 144
二、偏导数的几何意义 …… 146
【习题 8-2】 …… 146
第三节　全微分及其应用 …… 147
一、全微分的概念 …… 147
二、全微分的应用 …… 148
【习题 8-3】 …… 149
第四节　多元复合函数的微分法 …… 149
一、链导法则 …… 149
二、全导数 …… 152
【习题 8-4】 …… 153
【复习题八】 …… 153

第九章　二重积分及其应用 …… 155
第一节　二重积分的概念与性质 …… 155
一、二重积分的概念 …… 155
二、二重积分的定义 …… 156
三、二重积分的几何意义 …… 157
四、二重积分的性质 …… 157
【习题 9-1】 …… 158
第二节　二重积分的计算方法 …… 158
一、直角坐标系中的累次积分法 …… 158
* 二、极坐标系中的累次积分法 …… 162
【习题 9-2】 …… 165
* 第三节　二重积分的应用 …… 165
【习题 9-3】 …… 167
【复习题九】 …… 167

第十章　无穷级数 …… 169
第一节　数项级数的概念及其基本性质 …… 169
一、数项级数的概念 …… 169
二、无穷级数的基本性质 …… 170
【习题 10-1】 …… 171
第二节　数项级数的审敛法 …… 171
一、比较审敛法 …… 172
二、比值审敛法 …… 172
【习题 10-2】 …… 173
第三节　幂级数 …… 173
一、函数项级数的概念 …… 173
二、幂级数及其收敛性 …… 174
三、幂级数的运算 …… 175
【习题 10-3】 …… 176
第四节　函数的幂级数展开 …… 176
一、麦克劳林展开式 …… 176
二、函数展开成幂级数的方法 …… 177

【习题 10-4】 …… 179
【复习题十】 …… 179

附录 …… 181
附录一　经济领域应用数学摘编 …… 181
附录二　常用公式 …… 190

习题参考答案 …… 198

参考文献 …… 210

第一章　函数、极限与连续

函数是数学的基本概念，是现实世界中量与量之间的依存关系在数学中的反映，也是高等数学的主要研究对象．在科技领域以及日常生活中，函数有着广泛的应用．本章将在中学学习函数的基础上，进一步学习有关函数的知识．本章将重点对函数的形态做出概括，包括函数的概念、性质、常见的函数以及初等函数等.

第一节　函数的概念

一、函数的概念及其定义域的求法

1. 函数的定义

定义　设 D 是一个非空数集，如果当自变量 x 在数集 D 内任意取定一个实数时，按照一定的对应法则 f，都有唯一确定的实数 y 与之相对应，则称变量 y 是 x 的函数，记为 $y=f(x)$，$x\in D$. 数集 D 称为函数的定义域，x 称为自变量，y 称为函数(也称为因变量).

对于函数 $y=f(x)$，当自变量 x 在定义域 D 内取定某一值 x_0 时，按照对应法则 f，函数 y 有唯一确定的实数 y_0 与之对应，则称 y_0 为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值，记为 $f(x_0)$、$f(x)\big|_{x=x_0}$ 或 $y\big|_{x=x_0}$. 当 x 取遍 D 中的一切实数值时，与它对应的函数值的集合称为函数的值域. 记为 $\boldsymbol{M}$.

需要说明的是：在函数的定义中，并没有要求自变量变化时函数值一定要变，只要求对于自变量 $x\in D$ 时，都有唯一确定的 $y\in \boldsymbol{M}$ 与它对应，因此，常量 $y=c$ 也符合函数的定义．因为对于任意的 $x\in R$ 时，所对应的只有 y 值是唯一的，都是确定的常数 c．

【例 1】　设函数 $f(x)=x^2-3x-1$，求 $f(-1)$，$f\left(\dfrac{1}{a}\right)$，$f(a^2)$，$[f(a)]^2$，$\dfrac{1}{f(a)}$（其中 $a\neq 0$，$f(a)\neq 0$).

解　$f(-1)=(-1)^2-3\cdot(-1)-1=3$；

$$f\left(\frac{1}{a}\right)=\left(\frac{1}{a}\right)^2-3\cdot\left(\frac{1}{a}\right)-1=\frac{1-3a-a^2}{a^2}\ ;$$

$$f(a^2)=(a^2)^2-3a^2-1=a^4-3a^2-1\ ;$$

$$[f(a)]^2=(a^2-3a-1)^2\ ;$$

$$\frac{1}{f(a)}=\frac{1}{a^2-3a-1}.$$

【例 2】　设 $f\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\ (x\neq 0)$，求 $f(x)$．

解　方法一：令 $1+\dfrac{1}{x}=t$，于是 $\dfrac{1}{x}=t-1\,(t\neq 1)$，代入已知关系式，得

$$f(t)=t-1+(t-1)^2=t^2-t\text{，所以 } f(x)=x^2-x$$

方法二：因 $f\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x+1}{x^2}=\dfrac{x+1}{x}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{x+1}{x}\cdot\left(\dfrac{x+1}{x}-1\right)$

所以 $$f(x) = x \cdot (x-1) = x^2 - x.$$

【例 3】［股票曲线］股票在某天的价格和成交量随时间的变化常用图形表示，图 1-1 为某一股票在某天的走势图.

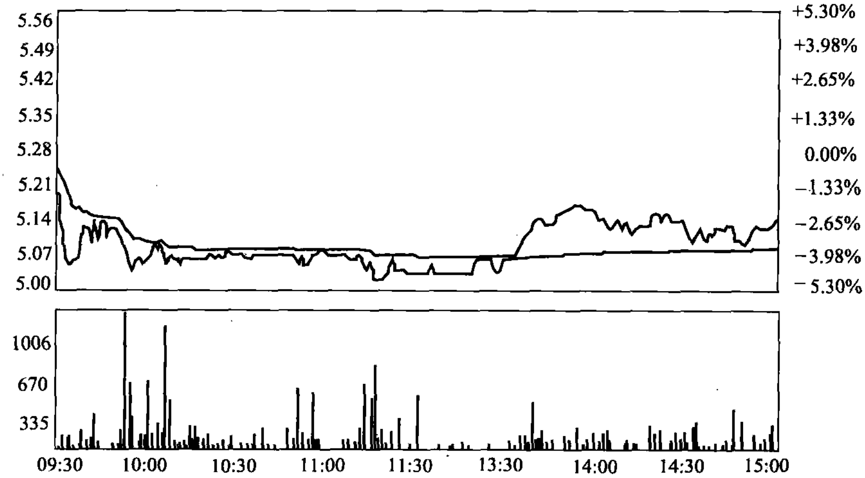

图 1-1

从股票曲线，可以看出这只股票当天的价格和成交量随时间的波动情况.

从函数的定义看到，确定一个函数有两个要素，即定义域和对应法则．如果两个函数的定义域和对应法则都相同，那么它们就是同一函数.

需要说明的是，通常情况下用字母 y 表示函数，用字母 x 表示函数的自变量，函数记为 $y=f(x)$．但是实际上对于一个函数，其自变量选用什么字母是任意选取的，确定一个函数主要是定义域和对应法则，与自变量和对应法则用什么字母来表示无关.

如函数 $y=f(x)=x^3-2x$，如果自变量用 t 时，函数就可写成 $f(t)=t^3-2t$，虽然表示自变量的字母不同，但函数的定义域和对应法则没有发生变化，所以它们还是同一个函数．但是如果在同一问题中，需要讨论几个不同的函数，为区别起见，就要用不同的函数记号来表示，如 $g(x)$，$h(x)$，$F(x)$，$\phi(x)$ 等，有时也用记号 $y=y(x)$，$s=s(t)$ 等.

当我们研究函数时，必须注意函数的定义域．在考虑实际问题时，应根据问题的实际意义来确定定义域．对于用解析式表示的函数，它的定义域是使解析式有意义的自变量的一切实数值.

2. 函数定义域的求法

【例 4】 圆的面积 S 是半径 r 的函数，$S=\pi r^2$，求此函数的定义域.

解 根据本题的实际意义，圆的半径不能为负值．因此，所求定义域为$[0,+\infty)$，可以知道，就其解析式 $S=\pi r^2$ 本身，如果不考虑实际意义，基定义域为$(-\infty,+\infty)$.

【例 5】 求下列函数的定义域：

(1) $y=2x^2+5x-3$；　　(2) $y=\dfrac{1}{(4-x^2)}+\sqrt{x+2}$；

(3) $y=\lg\dfrac{x}{x-1}$；　　(4) $y=\arcsin\left[\dfrac{(x+1)}{3}\right]$.

解 (1)因为当 x 取任何实数时 y 都有确定的至于它相对位，所以函数的定义域为 $(-\infty.+\infty)$ 一般地，当函数是多项式时，其定义域为 $(-\infty.+\infty)$.

(2)因为 $4-x^2\neq 0$ 且 $x+2\geqslant 0$ 时，函数 y 才有意义，解得 $x\geqslant -2$ 且 $\neq -2$，所以函数

的定义域为 $(-2.2)\cup(2,+\infty)$.

(3)因为 $\frac{x}{x-1}>0$ 且 $x-1\neq 0$，y 才有意义，解得 $x<0$ 或 $x>1$，所以函数的定义域为 $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$.

(4)因为 $\left|\frac{x+1}{3}\right|\leqslant 1$ 时，函数 y 才有意义，解得 $-4\leqslant x\leqslant 2$，所以函数定义域为 $[-4,2]$.

由此得出常见的定义域的求法要点如下：

(1)分式中，分母不为零；

(2)根式中，负数不能开偶次方根；

(3)对数中，真数不能为零和负数；

(4)反三角函数中，要符合反三角函数的定义域；

(5)正切函数自变量不能取 y 轴上的角，余切函数自变量不能取 x 轴上的角；

(6)同时含有上述五项时，要取各部分定义域的交集.

二、函数的表示法

表示函数的方法，常用的有图像法、表格法和公式法三种.

(1)图像法　图像法就是用坐标平面上的点集表示函数．图像法的优点是直观形象，且可看到函数的变化趋势．如气象站的温度记录器记录了温度与时间的一种函数关系，它是借助仪器自动描绘在纸带上的一条连续不断的曲线．图像法在物理学和工程技术上经常使用.

(2)表格法　表格法就是把一系列自变量值与其对应的函数值列成表格表示函数的方法.如大家所熟知的对数表、三角函数表等．表格法的优点是所求的函数值容易查得．表格法在自然科学与工程技术上也用得很多.

(3)公式法　公式法也叫做解析法，就是用数学式子表示函数的方法．讨论的函数常用公式法表示，公式法的优点是形式简明，表达清晰、紧凑，便于推理和计算.

函数用公式法表示时，经常遇到这样的情形．自变量在定义域的不同范围内具有不同的表达式．可以把能用两个或两个以上表达式表达的函数关系叫分段函数.

如(1) $f(x)=|x|=\begin{cases} x, x\geqslant 0 \\ -x, x<0 \end{cases}$；(2)符号函数 $\operatorname{sgn}x=\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$.

在具体问题中，函数的表达形式是各种各样的．如在方程 $x+y-e^{xy}=0$ 中，给变量 x 一个实数值零，通过这个方程，都能确定唯一的 y 值为1．即当 $x=0$ 时，$y=1$，所以虽然不能将 y 用 x 的明显公式表示出来，y 仍是 x 的函数．所以给出如下定义：

一般地，凡是能由方程 $F(x,y)=0$ 确定的函数关系，称为隐函数.

若变量 x,y 之间的函数关系是通过参数方程

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\phi(t) \end{cases},(t\in I)$$

给出的，这样的函数称为由参数方程确定的函数．注意变量 t 不是这个函数的自变量，而是参数方程的参数.

如物体作斜抛运动时，运动的曲线表示的函数，可写作由下面参数方程确定的函数：

$$\begin{cases} x=v_0 t\cos\alpha \\ y=v_0 t\sin\alpha-\frac{1}{2}gt^2 \end{cases},$$

其中 α 为初速度与水平方向的夹角，v_0 为物体初速度的大小.

有时根据需要还要求某个函数的反函数.

求反函数时一般是由 $y=f(x)$ 解出 x，得到 $x=\varphi(y)$；将 $x=\varphi(y)$ 中的 x 和 y 分别换成 y 和 x，就得到反函数 $y=\varphi(x)$.

【例 6】 求函数 $y=1-\ln(2x-1)$ 的反函数.

解 由 $y=1-\ln(2x-1)$ 可解得 $x=\frac{1}{2}(e^{1-y}+1)$，将上式 x、y 互换，得反函数的关系式 $y=\frac{1}{2}(e^{1-x}+1)$，根据指数函数的性质，其定义域为全体实数.

思考题：举出生活中你知道的几个函数例子.

【习题 1-1】

1. 判断下列各组中函数是否相同.

(1) $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$；　(2) $y=x$ 与 $y=(\sqrt{x})^2$；

(3) $y=\ln x^3$ 与 $y=3\ln x$；　(4) $y=\sin^2x+\cos^2x$ 与 $y=1$.

2. 设函数 $y=\begin{cases}0, & x<0,\\ 2x, & 0\leqslant x<\frac{1}{2}.\end{cases}$ 求 $f\left(-\frac{1}{2}\right)$，$f\left(\frac{1}{3}\right)$.

3. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{3x^2+4x+1}$；　(2) $y=\sqrt{2+x}+\frac{1}{\lg(1+x)}$；

(3) $y=\arccos\frac{x-1}{2}$；　(4) $y=\frac{\sin(\ln x)}{\sqrt{2-x}}$.

第二节　函数的几种性质

为了了解函数的特性，以便掌握某些函数的变化规律可以从以下几个几方面讨论函数的性质.

一、函数的单调性

定义 1 设函数 $y=f(x)$ 在定义区间 (a,b) 内的任意两点 x_1,x_2，若当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ 成立，则称 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内为单调增加，用符号 $\uparrow$ 表示，有时也称单调上升. 如果等号恒不成立，则称为严格单调增加，相应的区间 (a,b) 称为函数 $f(x)$ 的单调增加区间；设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内的任意两点 $x_1<x_2$，都有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则称 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内为单调减少，用符号 $\downarrow$ 表示，有时也称单调下降. 如果等号恒不成立，则称为严格单调减少，相应的区间 (a,b) 称为函数 $f(x)$ 的单调减少区间.

函数的递增、递减统称函数是单调的. 从几何特征上来看，单调递增函数的图像沿 x 轴正向而上升，单调递减函数的图像沿 x 轴正向而下降(图 1-2). 上述定义也适用于其他有限区间和无限区间的情形.

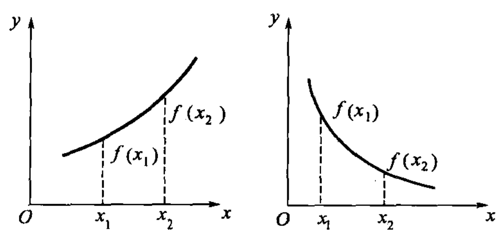

图 1-2

如函数 $y=x^2$ 在区间 $(0,+\infty)$ 是单调增加的，在区间 $(-\infty,0)$ 是单调减少的；函数 $y=x$、$y=x^3$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内都是严格单调增加的；函数 $y=\tan x$ 在 $(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2},)$

$k \in \mathbf{Z}$ 内是单调增加的;函数 $y = \operatorname{arccot} x$ 在 $(0,\pi)$ 内是单调减少的.

二、函数的奇偶性

定义 2 若函数 $y = f(x)$ 的定义域关于原点对称,且对定义域中的任何 x,都有 $f(-x) = -f(x)$,则称 $f(x)$ 为奇函数;若函数 $y = f(x)$ 的定义域关于原点对称,且对定义域中的任何 x,都有 $f(-x) = f(x)$,则称 $f(x)$ 为偶函数. 如果函数 $y = f(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数,那么称函数 $y = f(x)$ 为非奇非偶函数.

从几何特征来说奇函数的图像是关于原点对称的;偶函数的图像是关于 y 轴对称的.

如 $f(x) = x^3$,$g(x) = \sin x$ 在定义区间上都是奇函数,$f(x) = x^2$,$g(x) = x\sin x$ 在定义区间上都是偶函数,$y = 0$ 既是奇函数又是偶函数.

【例 7】 判断函数 $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ 的奇偶性.

解 因为
$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln(-x + \sqrt{(-x)^2+1}) = \ln(\sqrt{x^2+1} - x) \\ &= \ln\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} \\ &= \ln(\sqrt{x^2+1}+x)^{-1} \\ &= -\ln(\sqrt{x^2+1}+x) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

所以函数 $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ 是奇函数.

判断函数的奇偶性,主要的方法就是利用定义,其次是利用奇偶的性质,即奇(偶)函数之和仍是奇(偶)函数;两个奇函数之积是偶函数;两个偶函数之积是偶函数;一奇一偶之积是奇函数.

三、函数的有界性

定义 3 如果存在正数 M,使函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内恒有 $|f(x)| \leqslant M$,则称 $f(x)$ 是有界函数;否则称 $f(x)$ 是无界函数.

如 $y = \sin x, y = \cos x$,$y = \arctan x$ 都是有界函数. 因为对任意实数 x 恒有 $|\sin x| \leqslant 1$,$|\cos x| \leqslant 1$,$|\arcsin x| \leqslant \frac{\pi}{2}$;而 $y = \tan x, y = \cot x$ 都是无界函数.

四、函数的周期性

定义 4 对于函数 $y = f(x)$,如果存在一个非零常数 T,对定义域内的一切 x 均有 $f(x+T)=f(x)$,则称函数 $y = f(x)$ 为周期函数,T 称为 $f(x)$的周期.

显然,如果 $y = f(x)$ 以 T 为周期,那么 $2T$,$3T$ 等也是它的周期. 应当指出的是,通常讲的周期函数的周期是指最小的正周期(如果存在的话).

如三角函数,$y = \sin x$,$y = \cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数;$y = \tan x$,$y = \cot x$ 则是以 π 为周期的周期函数;$y = A\sin(\omega t + \varphi)(\omega > 0)$ 是以 $\frac{2\pi}{\omega}$ 为周期的函数.

对于函数的性质,除了有界性与无界性之外,单调性、奇偶性、周期性都是函数的特殊性质,而不是每一个函数都一定具备的.

思考题: 周期函数的定义域可能是有界集吗?

【习题 1-2】

1. 判断下列函数的单调性:

(1) $y = 3x + 2$;　　(2) $y = \log_2 x$;

(3) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$;　　(4) $y = \frac{1}{x}$,$x \in (0, +\infty)$.

2. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $y = x\sin x$；　(2) $y = x + 4$；　(3) $y = a + b\cos x$；

(4) $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$；　(5) $y = x \cdot \dfrac{a^x - 1}{a^x + 1}$；　(6) $y = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

3. 下列函数中哪些函数在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的?

(1) $y = \cos^2 x$；　(2) $y = 1 + \tan x$.

第三节　初等函数

一、基本初等函数

我们学过的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数．这些基本初等函数在以后的学习和生活中都很重要，因此这里将主要的地方再概括地叙述一下.

1. 幂函数 $y = x^\alpha (\alpha \in R)$

幂函数的定义域和值域依 α 的取值不同而不同，如当 $\alpha = 2$ 时，$y = x^2$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$；当 $\alpha = \dfrac{1}{2}$ 时，$y = x^{\frac{1}{2}}$ 的定义域是 $[0, +\infty)$；当 $\alpha = -1$ 时，$y = x^{-1}$ 的定义域是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. 当 $\alpha \in N$ 或 $\alpha = \dfrac{1}{2n-1}$，$n \in N$ 时，定义域为 $\mathbf{R}$. 但是无论 α 取何值，幂函数在 $x \in (0, +\infty)$ 内总有定义．常见的幂函数的图形如图 1-3 所示.

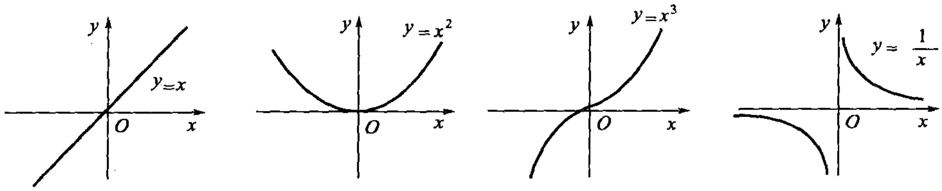

图 1-3

2. 指数函数 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$

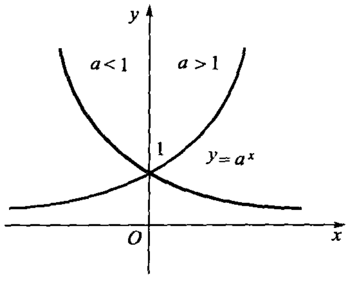

图 1-4

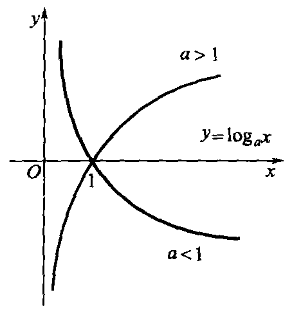

图 1-5

指数函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域为 $(0, +\infty)$. 当 $a > 1$ 时，函数 $y = a^x$ 单调增加；当 $0 < a < 1$ 时，函数 $y = a^x$ 单调减少．当 $x = 0$ 时，$y = a^0 = 1$．所以指数函数的图形总在 x 轴上方且过点 $(0,1)$，图形形象地比喻成“一撇一捺”(图 1-4).

3. 对数函数 $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$

对数函数的定义域为 $(0, +\infty)$，值域为 $(-\infty, +\infty)$. 当 $a > 1$ 时，函数 $y = \log_a x$ 单调增加；当 $0 < a < 1$ 时，函数 $y = \log_a x$ 单调减少，且不论 a 为何值 $(a > 0, a \neq 1)$，总有 $\log_a 1 = 0$，所以指数函数的图形总在 y 轴右侧且过点(1,0)(图 1-5).

对数函数与指数函数互为反函数.

常用的有以 10 为底的对数，称为常用对数，记为 $y = \lg x$；以 e 为底的对数，称为自然对数，记为 $y = \ln x$，其中底数 $e = 2.7182818\cdots$.

4. 三角函数

这里主要介绍 $y = \sin x$，$y = \cos x$，$y = \tan x$，$y = \cot x$. $y = \sin x$，$y = \cos x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域为 $[-1, 1]$；$y = \tan x$ 的定义域为 $\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right), k \in Z$，值域为 $(-\infty, +\infty)$；$y = \cot x$ 的定义域为 $(k\pi, k\pi + \pi), k \in Z$，值域为 $(-\infty, +\infty)$. $y = \sin x$，$y = \cos x$ 的周期 2π；$y = \tan x$，$y = \cot x$ 的周期 π. $\cos x$ 是偶函数；$\sin x$，$\tan x$，$\cot x$ 是奇函数(图 1-6). 三角函数中自变量 x 一般均以弧度为单位.

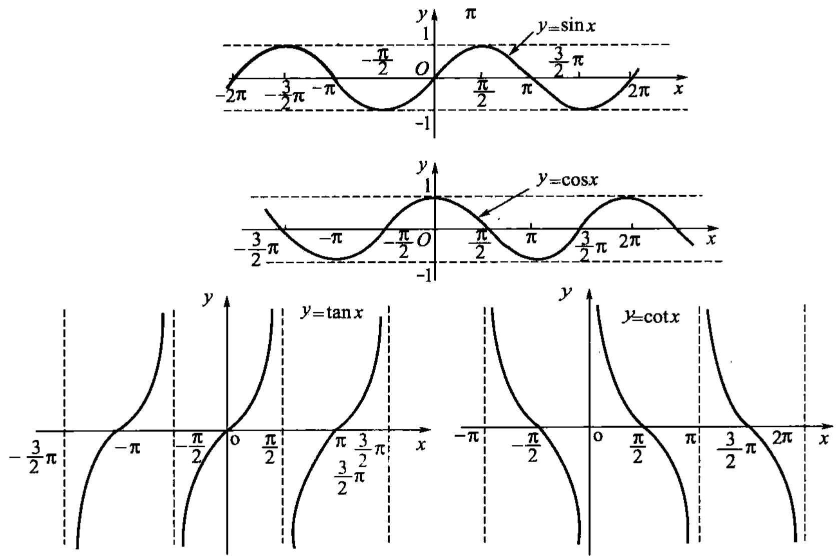

图 1-6

5. 反三角函数

三角函数 $y = \sin x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$，$y = \cos x, x \in [0, \pi]$，$y = \tan x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$，$y = \cot x, x \in (0, \pi)$ 的反函数称为反三角函数. 反正弦函数记作 $y = \arcsin x$，定义域为 $[-1, 1]$，值域为 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$；反余弦函数记作 $y = \arccos x$，定义域为 $[-1, 1]$，值域为 $[0, \pi]$；反正切函数记作 $y = \arctan x$，定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域为 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$；反余切函数记作 $y = \operatorname{arccot} x$，定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域为 $(0, \pi)$ (图 1-7).

二、复合函数

定义 1 若函数 $y = f(u)$ 的定义域为 U_1，而函数 $u = \varphi(x)$ 的定义域为 D，值域为 U_2，并且 U_2 与 U_1 的交集为非空集合时，则 y 经过中间变量 u 由 x 唯一确定，于是 y 经过中间变量

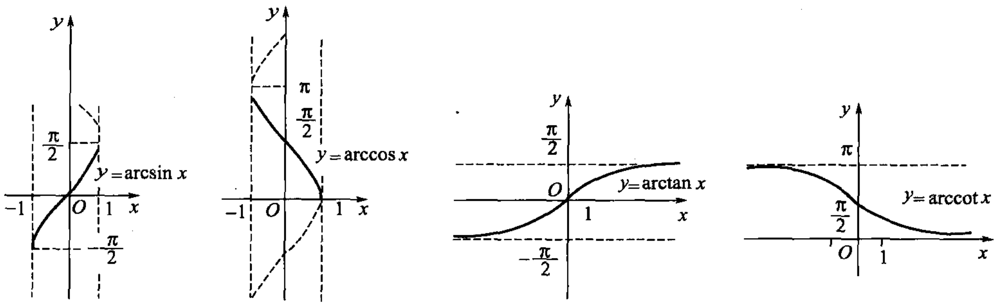

图 1-7

u 而成为 x 的函数，记为 $y = f[\varphi(x)]$，这种函数称为复合函数.

由复合函数概念可知，构成复合函数的关键是：后一个函数的值域至少要有一部分含于前一函数的定义域中．如 $y = \arcsin u, u = 2 + x^2$ 不能复合成一个函数，因为无论 x 取什么值，$u = 2 + x^2 \geqslant 2$，而 $y = \arcsin u$ 的定义域为$[-1,1]$，相应的 u 值不能使 $y = \arcsin u$ 有意义.

【例 8】 求 $y = 2u^2 + 1$ 与 $u = \cos x$ 构成的复合函数.

解 将 $u = \cos x$ 代入 $y = 2u^2 + 1$ 中，即为所求的复合函数

$y = 2\cos^2 x + 1$，定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

【例 9】 指出下列个各复合函数的复合过程：

(1) $y = \sqrt{1 + x^2}$； (2) $y = \arctan\ln(3^x - \cos x)$； (3) $y = \arctan 2^{\sqrt{x}}$.

解 (1) $y = \sqrt{1 + x^2}$ 是由 $y = \sqrt{u}$ 和 $u = 1 + x^2$ 复合而成的.

(2) $y = \arctan\ln(3^x - \cos x)$ 是由 $y = \arctan u$，$u = \ln v$，$v = 3^x - \cos x$ 复合而成的.

(3) $y = \arctan 2^{\sqrt{x}}$ 是由 $y = \arctan u, u = 2^v, v = \sqrt{x}$ 复合而成的.

三、初等函数

定义 2 由基本初等函数和常数经过有限次四则运算和有限次的函数复合并用一个数学式子表示的函数称为初等函数.

如 $y = e^{\sqrt{x}+2} - \dfrac{\ln 3x + \sin^2 x}{x^3 \tan x}$ 就是一个初等函数.

四、建立函数关系举例

1. 工程设计问题

工程设计问题是指运用数学知识对工程的定位、大小、采光等情况进行合理布局、计算的一类问题.

【例 10】 要在墙上开一个上部为半圆，下部为矩形的窗户(如图 1-8 所示)，在窗框为定长 l 的条件下，要使窗户透光面积最大，窗户应具有怎样的尺寸？

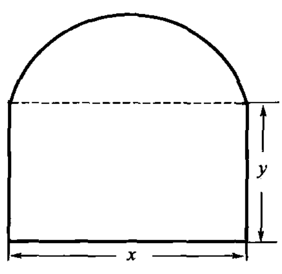

图 1-8