高等学校基础课程配套辅导用书

恩波理工 ENBO

高等数学
习题全解

（含同步辅导）同济六版 下册

恩　波　主编

全面讲解概念及重难点

深度解析典型例题

教材习题均有详细解答

学苑出版社

高等数学习题全解

（新增教材同步辅导）

同济六版（下册）

主　编　恩　波

副主编　吴业军　翁连贵　孙福树
　　　　刘建新

编　者　吴业军　翁连贵　孙福树
　　　　刘建新　杨降龙　杨　帆
　　　　吴　莉

修订者　江　平　王　军

学　苑　出　版　社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题全解/恩波主编．—3版—北京：学苑出版社，2007.8

ISBN 978—7—5077—1772—3

Ⅰ．高…　Ⅱ．恩…　Ⅲ．高等数学—高等学校—解题
Ⅳ．013—44

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第007175号

责任编辑：刘　涟
责任校对：邵加宝
封面设计：锦　虹
出版发行：学苑出版社
社　　址：北京市丰台区南方庄2号院1号楼　100079
网　　址：www.book001.com
电子信箱：xueyuanyg@sina.com
　　　　　　xueyuan@public.bta.net.cn
销售电话：010—67674055、67675512、67678944
印 刷 厂：北京才智印刷厂
开本尺寸：850×1168　1/32
印　　张：22
字　　数：570千字
版　　次：2007年8月北京第3版
印　　次：2008年2月北京第2次印刷
印　　数：5001—7000册
定　　价：29.80元

编 者 的 话

《高等数学》(同济6版)已于2007年4月与读者见面了,为了更好地为使用同济6版的读者服务,在恩波编辑部的精心策划下,本书才得以面市.本书具有如下特点:

1. 对同济第6版《高等数学》(下册)的全部习题及总习题一一给出解答.章节顺序、习题编号均与原书相同.求解过程既详细又不繁琐,解题思路清晰、明了,关键步骤一目了然.有些题目还给出了多种解法.

2. 按不同深度将全部题目分为A,B,C三级,并用相应的字母标在题首.

A级:基础练习.为理解课本内容所必需.

B级:提高类型.有助于对课本内容的深入理解及对解题方法、技巧的进一步提高.

C级:难度较高.用于提高对问题的分析、综合能力及对课本知识的灵活运用.

3. 为了更好地为读者服务,本书还新增了教材同步辅导,其中包括知识要点,重点及难点解读,典型例题,综合例题.值得说明的是,例题的选择除了体现作者多年从教经验的成果,还精挑细选了近年的历年考研真题进行深入分析。

4. 相信本书对《高等数学》(同济六版)的所有读者都是一本好的辅导书:如果你完成课程练习有困难,可从本书找到启发;如果你学习成绩原本就很好,本书可让你学习成绩再上一个台阶,实现质的飞跃.

目录
Contents

第八章　空间解析几何与向量代数

第一节　向量及其线性运算

知识要点

表 1.1　向量的概念与性质

名称	概念	性质、应用与注解
向量	有向线段 $\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AB}$ 等	向量既有大小，又有方向
单位向量	模为 1 的向量	与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量 $\boldsymbol{a}^0=\dfrac{1}{\lvert\boldsymbol{a}\rvert}\boldsymbol{a}$
线性运算	$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$，$\lambda$、$\mu$ 为实数	(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 由平行四边形法或三角形法确定 (2) $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行，且当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 同向，$\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 反向，其模 $\lvert\lambda\boldsymbol{a}\rvert=\lvert\lambda\rvert\lvert\boldsymbol{a}\rvert$

表 1.2　向量在轴上投影的性质

1. 向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 u 上的投影等于向量的模乘以此轴与向量夹角的余弦，即

$$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=\lvert\overrightarrow{AB}\rvert\cos\varphi$$

2. 两个向量的和在轴 u 上的投影等于两个向量在该轴上的投影的和，即

$$\mathrm{Prj}(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)=\mathrm{Prj}\boldsymbol{a}_1+\mathrm{Prj}\boldsymbol{a}_2$$

3. 向量与数的乘积在轴上的投影等于向量在轴上的投影与数的乘积. 即

$$\mathrm{Prj}_u(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$$

表 1.3　向量的坐标与运算

名　称	概　念	坐标下的表示	性质、应用与注解
向量	有向线段 $\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}$ 等	$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ $=\{x,y,z\}$	模：$\lvert\boldsymbol{a}\rvert=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 方向角：α,β,γ 方向余弦：$\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{x}{\lvert\boldsymbol{a}\rvert}\\ \cos\beta=\dfrac{y}{\lvert\boldsymbol{a}\rvert}\\ \cos\gamma=\dfrac{z}{\lvert\boldsymbol{a}\rvert}\end{cases}$ $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

(续表)

名　称	概　念	坐标下的表示	性质、应用与注解
线性运算	λ,μ 为实数，$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$，	$\boldsymbol{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$ $\boldsymbol{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$ $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\{\lambda x_1+\mu x_2,\lambda y_1+\mu y_2,\lambda z_1+\mu z_2\}$	(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 由平行四边形法或三角形法确定. (2) $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行，且当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 同向，$\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 反向，其模 $\|\lambda\boldsymbol{a}\|=\|\lambda\|\|\boldsymbol{a}\|$

表 1.4　空间两点间的距离

点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 与点 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 之间的距离

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

重点及难点解读

1. 向量定义为有向线段：具有长度与方向两要素，且起点是自由的. 如果我们将向量的起点移到坐标原点，那么，向量就与它的终点一一对应，这样的向量又称为向径.

2. 在线性运算问题中，$-\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 大小相等方向相反，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 可以由将 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 进行首尾相接的方法获得. 由此，按首尾相接法，$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$ 等于将 $\boldsymbol{a}_2$ 的起点接 $\boldsymbol{a}_1$ 的终点，$\boldsymbol{a}_3$ 的起点接 $\boldsymbol{a}_2$ 的终点等，依次相连接后，连接 $\boldsymbol{a}_1$ 的起点与 $\boldsymbol{a}_n$ 的终点所得到的向量 $\overrightarrow{AB}$. 如图 8.1.

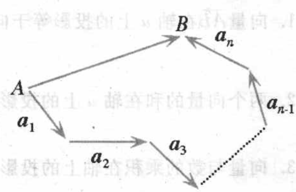

图 8.1

$\lambda\boldsymbol{a}$ 称为数乘向量，$\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 是向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量. 另外，$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的一个线性组合，所谓向量的分解就是将一个向量表示成另外若干个向量的线性组合.

3. 确定向量通常有两种方法，其一是依据向量具有大小和方向的特性，分别求出它的大小(模) $|\boldsymbol{a}|$ 和方向 $\boldsymbol{a}^0$(或求出方向余弦或方向角)，即可确定 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$；其二是分别求出 $\boldsymbol{a}$ 的三个坐标分量 a_x,a_y,a_z，即可写出 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$.

4. 求向量坐标的方法，要根据给定的条件来确定，一般有以下几种常用方法

(1) 如果已知 $\boldsymbol{a}$ 的起点坐标 $A(x_1,y_1,z_1)$ 及终点 $B(x_2,y_2,z_2)$ 则

$$\boldsymbol{a}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\};$$

(2) 如果已知向量 $\boldsymbol{a}$ 按基本单位向量分解式 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，则

$$\boldsymbol{a}=\{x,y,z\};$$

(3) 当向量 $\boldsymbol{a}$ 的模 $|\boldsymbol{a}|$ 及方向角 α,β,γ 已知时，

$$\boldsymbol{a}=\{|\boldsymbol{a}|\cos\alpha,|\boldsymbol{a}|\cos\beta,|\boldsymbol{a}|\cos\gamma\};$$

(4) 当向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}=\{x,y,z\}$ 平行时，$\boldsymbol{a}=\{\lambda x,\lambda y,\lambda z\}$，其中当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时 $\lambda>0$；

当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时 $\lambda<0$；

(5) 根据向量的运算性质确定.

典型例题

例 1.1　把 ΔABC 底边 BC 三等分，D、E 分别为三等分点，若 $\overrightarrow{DE}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$.

图 8.2

解　如图 8.2.

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DE}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$.

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{DE}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

例 1.2　(选择题)设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 互相平行，但方向相反，当 $|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|>0$ 时，必有(　　).

(A) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$　　(B) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$

(C) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$　　(D) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$

解　选(A)　当两向量方向相反时，两向量和的模等于两向量模差的绝对值，由于 $|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$，故选(A).

例 1.3　指出下列向量等式的几何意义

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$；　　(2) $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$.

答　(1) 表示把 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 三个向量首尾相连时，第一个向量的起点与第三个向量的终点重合. 此时，若三向量不共线，则它们首尾相连时构成一个三角形.

(2) 表示 $\boldsymbol{c}$ 能由 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 经线性运算得到(或称 $\boldsymbol{c}$ 能由 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 线性表示)，因此 $\boldsymbol{c}$ 位于 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 所决定的平面，即 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 三向量共面.

例 1.4　写出 $P(1,-2,-1)$ 的下列对称点的坐标：

(1) 关于三个坐标平面分别对称；　　(2) 关于三个坐标轴分别对称；

(3) 关于原点对称.

解　(1) P 点关于 xOy，yOz，zOx 对称点的坐标分别为

$$(1,-2,1),(-1,-2,-1),(1,2,-1);$$

(2) P 点关于 x 轴，y 轴，z 轴对称的点的坐标分别为

$$(1,2,1),(-1,-2,1),(-1,2,-1);$$

(3) P 点关于原点对称的点的坐标为 $(-1,2,1)$.

注意　一点关于某一坐标面对称的点的坐标，只需保留对应于该坐标平面的两个坐标不变，改变另一个坐标的符号即得. 一点关于某一坐标轴对称的点的坐标，只需保留对应于该坐标轴的坐标不变，改变另外两个坐标的符号即得。将该点三个坐标的符号全部改变，即得该点关于原点的对称点的坐标.

例 1.5　已知起自原点的单位向量 $\overrightarrow{OP}$ 与 z 轴的方向角为 30°，另两个方向角相等，求 P 点的坐标.

解　设 P 点坐标 (x,y,z)，$\overrightarrow{OP}$ 方向角为 α,β,γ，由于 $\alpha=\beta,\gamma=30^\circ$，故有

$$2\cos^2\alpha+\frac{3}{4}=1,\ \cos\alpha=\cos\beta=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

因$|\overrightarrow{OP}|=1$,$\overrightarrow{OP}=\{x,y,z\}$,故

$$x=1\cdot\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{2}}{4},\ y=1\cdot\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{2}}{4},\ z=1\cdot\cos\gamma=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

从而 P 点坐标为$(\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{3}}{2})$ 或 $(-\frac{\sqrt{2}}{4},-\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{3}}{2})$.

例 1.6 已知有向线段$\overrightarrow{P_1P_2}$的长度为 6,方向余弦为$-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}$. P_1 点坐标为$(-3,2,5)$. 求 P_2 点的坐标.

解 设 P_2 点坐标为(x,y,z),则$\overrightarrow{P_1P_2}=\{x+3,y-2,z-5\}$,

则
$$x+3=6\times(-\frac{2}{3}),y-2=6\times\frac{1}{3},z-5=6\times\frac{2}{3}$$

解得 $x=-7,y=4,z=9$,即 P_2 点的坐标为$(-7,4,9)$.

综合例题

综例 1.1 设 $ABCD$ 是平行四边形,E 是 AB 的中点,AC 与 DE 交于 O 点,证明 O 点分别是 ED 与 AC 的三等分的分点.

证 如图 8.3

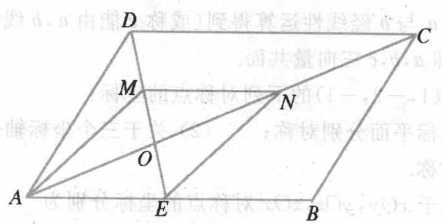

图 8.3

DE 和 AC 交于 O 点,取 OD,OC 的中点分别为 M,N,连接 MN.

由于$\overrightarrow{MO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DO}$, $\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$,$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$.

又 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,所以$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$,而且 E 为$\overrightarrow{AB}$的中点,故$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{MN}$,因此四边形 $AENM$ 构成平行四边形,于是$|\overrightarrow{OM}|=|\overrightarrow{OE}|$,$|\overrightarrow{ON}|=|\overrightarrow{OA}|$,这样,$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{EO}=\frac{1}{3}\overrightarrow{ED}$证得.

综例 1.2 设向量 $\boldsymbol{a}=\{4,-3,2\}$,轴 u 的正向与三坐标轴的正向构成相等的锐角,试求:(1) 向量 $\boldsymbol{a}$ 在轴 u 上的投影;(2) 向量 $\boldsymbol{a}$ 与轴 u 的夹角 θ.

解　设 $\boldsymbol{u}_0=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$. 由条件 $\alpha=\beta=\gamma$ 并为锐角，又因向量的方向角必须满足 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

所以　$3\cos^2\alpha=1$　即　$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{\sqrt{3}}{3}$.　　$\boldsymbol{u}_0=\left\{\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$.

(1) $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}_0=\frac{1}{\sqrt{3}}(4-3+2)=\sqrt{3}$.

(2) $\cos\theta=\frac{\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\sqrt{\frac{3}{29}}$　$\therefore\ \theta=\arccos\sqrt{\frac{3}{29}}$.

综例 1.3　试问下列各组角是否为某向量的方向角

(1) $\alpha=90°,\beta=150°,\gamma=60°$;　　(2) $\alpha=45°,\beta=135°,\gamma=60°$.

解　α,β,γ 是一组方向角的充要条件是：$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

(1) $\cos^2 90°+\cos^2 150°+\cos 60°=\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=1$，所以是一组方向角.

(2) $\cos^2 45°+\cos^2 135°+\cos^2 60°=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\neq 1$ 所以不是.

综例 1.4　设一向量与三个坐标平面的夹角分别为 θ,φ,ψ. 证明

$$\cos^2\theta+\cos^2\varphi+\cos^2\psi=2.$$

证　设 α,β,γ 分别是该向量与三个坐标轴的夹角，

则有
$$\alpha=\frac{\pi}{2}\pm\psi,\beta=\frac{\pi}{2}\pm\varphi,\gamma=\frac{\pi}{2}\pm\theta$$

由于
$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

所以
$$\sin^2\psi+\sin^2\varphi+\sin^2\theta=1,$$

即
$$(1-\cos^2\psi)+(1-\cos^2\varphi)+(1-\cos^2\theta)=1$$

故
$$\cos^2\theta+\cos^2\varphi+\cos^2\psi=2$$

习题 8－1(教材下册 p12～p13)

A 1. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，试用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 表示 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.

解　$2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}=2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c})-3(-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=5\boldsymbol{a}-11\boldsymbol{b}+7\boldsymbol{c}$.

A 2. 如某平面上一个四边形的对角线互相平分，试用向量证明它是平行四边形.

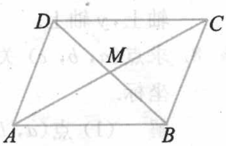

图 8.4

证明　如图 8.4，设在 $\square ABCD$ 中，$AM=MC$，$BM=MD$. 因为

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{DC}$，

所以 $AB \mathrel{\underline{\parallel}} DC$，故四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

A 3. 把 $\triangle ABC$ 的 BC 边五等分，设分点依次为 D_1、D_2、D_3、D_4，再把各点与点 A 连接. 试以 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$、$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$ 表示向量 $\overrightarrow{D_1A}$、$\overrightarrow{D_2A}$、$\overrightarrow{D_3A}$ 和 $\overrightarrow{D_4A}$.

解　如图 8.5,

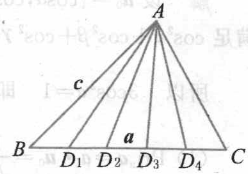

图 8.5

$\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{D_1D_2}=\overrightarrow{D_2D_3}=\overrightarrow{D_3D_4}=\overrightarrow{D_4C}=\frac{1}{5}\boldsymbol{a}$,所以

$$\overrightarrow{D_1A}=\overrightarrow{D_1B}+\overrightarrow{BA}=-\frac{1}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c},$$

$$\overrightarrow{D_2A}=\overrightarrow{D_2B}+\overrightarrow{BA}=-\frac{2}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c},$$

$$\overrightarrow{D_3A}=\overrightarrow{D_3B}+\overrightarrow{BA}=-\frac{3}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c},$$

$$\overrightarrow{D_4A}=\overrightarrow{D_4B}+\overrightarrow{BA}=-\frac{4}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}.$$

Ⓐ 4. 已知两点 $M_1(0,1,2)$ 和 $M_2(1,-1,0)$. 试用坐标表示式表示向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 及 $-2\overrightarrow{M_1M_2}$.

解　$\overrightarrow{M_1M_2}=(1-0,-1-1,0-2)=(1,-2,-2)$;

$-2\overrightarrow{M_1M_2}=-2(1,-2,-2)=(-2,4,4)$.

Ⓐ 5. 求平行于向量 $\boldsymbol{a}=(6,7,-6)$ 的单位向量.

解　$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{6^2+7^2+(-6)^2}=\sqrt{121}=11$.

$$\mathbf{e}_a=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\left(\frac{6}{11},\frac{7}{11},-\frac{6}{11}\right),$$

平行于 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量或为 $\mathbf{e}_a$,或为 $-\mathbf{e}_a$,即为 $\left(\pm\frac{6}{11},\pm\frac{7}{11},\mp\frac{6}{11}\right)$.

Ⓐ 6. 在空间直角坐标系中,指出下列各点在哪个卦限?

$A(1,-2,3)$; $B(2,3,-4)$; $C(2,-3,-4)$; $D(-2,-3,1)$.

答　A(Ⅳ), B(Ⅴ), C(Ⅷ), D(Ⅲ).

Ⓐ 7. 在坐标面上和在坐标轴上的点的坐标各有什么特征?指出下列各点的位置:$A(3,4,0)$; $B(0,4,3)$; $C(3,0,0)$; $D(0,-1,0)$.

答　在 xOy、yOz、zOx 坐标面上的点的坐标中至少有一个为零,依次是 $z=0$,$x=0$ 与 $y=0$;在 x、y、z 轴上点的坐标中至少有两个坐标为零,依次为 $y=z=0$,$x=z=0$,与 $x=y=0$,上述四点,它们依次在 xOy 面上,yOz 面上,x 轴上,y 轴上.

Ⓐ 8. 求点 (a,b,c) 关于(1) 各坐标面;(2) 各坐标轴;(3) 坐标原点的对称点的坐标.

解　(1) 点 (a,b,c) 关于 xOy,yOz,zOx 面的对称点依次是:

$$(a,b,-c);\ (-a,b,c);\ (a,-b,c).$$

(2) 点 (a,b,c) 关于 x、y、z 轴的对称点依次是

$$(a,-b,-c);\ (-a,b,-c);\ (-a,-b,c).$$

(3) (a,b,c) 关于原点的对称点的坐标是 $(-a,-b,-c)$.

A 9. 自点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 分别作各坐标面和各坐标轴的垂直,写出各垂足的坐标.

解 作坐标面的垂线,垂足在该坐标面上,因此对应的那个坐标为零.例如,过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 依次引 xOy、yOz、zOx 面垂线的垂足的坐标,依次是

$$(x_0, y_0, 0), (0, y_0, z_0), (x_0, 0, z_0).$$

而坐标轴上的点,有两个坐标为零.因此垂足在各坐标轴上,另两个坐标应为零,于是过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 作 x、y、z 轴垂线的垂足,其坐标依次是

$$(x_0, 0, 0), (0, y_0, 0), (0, 0, z_0).$$

A10. 过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 分别作平行于 z 轴的直线和平行于 xOy 面的平面,问在它们上面的点的坐标各有什么特点?

答 过点 P_0 而平行于 z 轴的直线上的点的坐标为 (x_0, y_0, z),即前两个坐标与 P_0 的坐标相同,而第三个坐标换成流动坐标 $z \in \mathbf{R}$.

过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 而平行于 xOy 面的平面上的点,其坐标为 (x, y, z_0),即与 P_0 的第三个坐标相同,而前两个坐标应改为流动坐标.

A11. 一边长为 a 的立方体放置在 xOy 面上,其底面的中心在坐标原点,底面的顶点在 x 轴和 y 轴,求它各顶点的坐标.

解 如图 8.6,各顶点的坐标依次为:

$A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, 0\right)$, $B\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}a, 0\right)$,

$C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, 0\right)$, $D\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0\right)$;

$A_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, a\right)$, $B_1\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}a, a\right)$,

$C_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, a\right)$, $D_1\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}a, a\right)$.

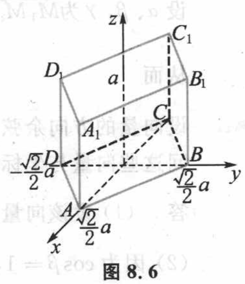

图 8.6

A12. 求点 $M(4, -3, 5)$ 到各坐标轴的距离.

解 点 M 向各坐标轴作垂线的垂足依次是:

$$N_1(4, 0, 0), N_2(0, -3, 0), N_3(0, 0, 5).$$

因此 M 到各坐标轴的距离依次是

$$d_x = |N_1M| = \sqrt{0 + (-3)^2 + 5^2} = \sqrt{34};$$

$$d_y = |N_2M| = \sqrt{4^2 + 0 + 5^2} = \sqrt{41};$$

$$d_z = |N_3M| = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + 0} = 5.$$

A13. 在 yOz 面上,求与三点 $A(3, 1, 2)$、$B(4, -2, -2)$ 和 $C(0, 5, 1)$ 等距离的点.

解 设该点为 $M(x, y, z)$,因为 M 在 yOz 面上,所以 $x = 0$,该点为 $M(0, y, z)$,而 $|MA| = |MB|$,即

$$(3-0)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 4^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2$$

化简得 $$3y + 4z = -5 \quad (1)$$

同理,由 $|MA| = |MC|$,得

$9-(y-1)^2+(z-2)^2 = 0+(y-5)^2+(z-1)^2$,

化简得 $$4y-z=6. \tag{2}$$

由(1)、(2) 得 $y=1$, $z=-2$,故所求点为 $(0, 1, -2)$.

A14. 试证明以三点 $A(4, 1, 9)$、$B(10, -1, 6)$、$C(2, 4, 3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

证明　因为

$|AB| = \sqrt{(4-10)^2+(-1-1)^2+(9-6)^2} = \sqrt{49} = 7$,

$|BC| = \sqrt{(2-10)^2+(4+1)^2+(3-6)^2} = \sqrt{98}$,

$|AC| = \sqrt{(4-2)^2+(4-1)^2+(9-3)^2} = \sqrt{49} = 7 = |AB|$.

又 $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2$ 满足勾股定理,所以 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

A15. 设已知两点 $M_1(4, \sqrt{2}, 1)$ 和 $M_2(3, 0, 2)$. 计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

解　$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(3-4)^2+(0-\sqrt{2})^2+(2-1)^2} = 2$.

设 α、β、γ 为 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的方向角,则 $\cos\alpha = -\dfrac{1}{2}$, $\cos\beta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\gamma = \dfrac{1}{2}$.

从而 $$\alpha = \frac{2}{3}\pi,\ \beta = \frac{3}{4}\pi,\ \gamma = \frac{\pi}{3}.$$

A16. 设向量的方向余弦分别满足(1) $\cos\alpha = 0$;(2) $\cos\beta = 1$;(3) $\cos\alpha = \cos\beta = 0$,问这些向量与坐标轴或坐标面的关系如何?

答　(1) 设该向量为 $\boldsymbol{a}$. 因为 $\cos\alpha = 0$, $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$,故 $\boldsymbol{a} \perp Ox$ 轴,亦即 $\boldsymbol{a} \parallel yOz$ 面.

(2) 因为 $\cos\beta = 1$,所以 $\beta = 0$,故 $\boldsymbol{a} \parallel Oy$ 轴且 $\boldsymbol{a}$ 与 y 轴正向一致,亦即 $\boldsymbol{a} \perp xOz$ 面并与 y 轴正向一致.

(3) 因为 $\cos\alpha = \cos\beta = 0$,所以 $\alpha = \beta = \dfrac{\pi}{2}$,故 $\boldsymbol{a} \parallel Oz$ 轴,亦即 $\boldsymbol{a} \perp xOy$ 面.

A17. 设向量 $\boldsymbol{r}$ 的模是 4,它与轴 u 的夹角是 $\dfrac{\pi}{3}$,求 $\boldsymbol{r}$ 在轴 u 上的投影.

解　$\mathrm{prj}_u\boldsymbol{r} = |\boldsymbol{r}|\cos(\widehat{u, \boldsymbol{r}}) = |\boldsymbol{r}|\cos\dfrac{\pi}{3} = 4\cdot\dfrac{1}{2} = 2$.

A18. 一向量的终点在 $B(2, -1, 7)$,它在 x 轴、y 轴和 z 轴上的投影依次为 4,-4 和 7,求这向量的起点 A 的坐标.

解　设 $A(x, y, z)$,则 $\overrightarrow{AB} = \{2-x, -1-y, 7-z\}$.

由题意,此向量在坐标轴上的投影依次为 4,-4 和 7,所以

$$2-x=4,\ -1-y=-4,\ 7-z=7,$$

从而 $$x=-2,\ y=3,\ z=0,$$

故 A 的坐标为 $A(-2,3,0)$.

A19. 设 $\boldsymbol{m}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{p}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$. 求向量 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}$ 在 x 轴上的投影及在 y 轴上的分向量.

解 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}=4(3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k})+3(2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k})-(5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k})$
$=13\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}-15\boldsymbol{k}$,

所以 $\mathrm{prj}_{Ox}\boldsymbol{a}=13$,而 $\boldsymbol{a}$ 在 y 轴上的分向量为 $7\boldsymbol{j}$.

第二节 数量积 向量积 *混合积

知识要点

表 2.1 向量运算与性质

名称	定义	计算公式	性质与应用
数量积	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\cos\theta$, θ 是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角	$\boldsymbol{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$ $\boldsymbol{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$ 交换律 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$ 结合律 $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$ 分配律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角余弦 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|}$ $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2}$
向量积	$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$,其中 $\|\boldsymbol{c}\|=\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\sin\theta$ θ 是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角, $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都垂直,且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 成右手系	$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}$ $=\{y_1z_2-y_2z_1,z_1x_2-z_2x_1,x_1y_2-x_2y_1\}$ $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$ 结合律 $\lambda(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})=(\lambda\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\times\lambda\boldsymbol{a}$ 分配律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$	(1) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行,那么,求与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都垂直的向量可由 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 获得.特别,在求平面直线问题中应用广泛. (2) 以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为边的三角形面积: $S=\dfrac{1}{2}\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|$ (3) $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$
混合积	$[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$ $\boldsymbol{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$ $\boldsymbol{c}=\{x_3,y_3,z_3\}$ 则 $[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]=\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}$ $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}$ $=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$ $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{c}$ $=-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}$	(1) $[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]$的绝对值等于以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积,并且当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 成右手系时,$[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]$为正,当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 成左手系时$[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]$为负 (2) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面$\Leftrightarrow[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]=0\Leftrightarrow$存在不全为零的 λ、μ 和 υ,使得 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\upsilon\boldsymbol{c}=0$

重点及难点解读

1. 数量积与向量积是本节的重点，在向量的各种关系中，主要就是依赖它们的性质与运算求解各类问题的.

2. 数量积：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$，在计算两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，判别两向量是否垂直时非常有效，模的计算也常用到数量积：$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$.

3. $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 是一个向量. $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都垂直，并使 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 成右手系，所以 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$. 其模 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 等于以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形面积. 如图8.7.

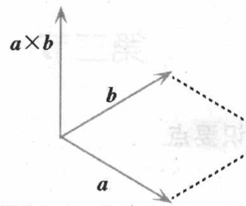

图 8.7

4. 混合积 $[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]=\pm V$，其中 V 是以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为相邻三边的平行六面体体积. 并且当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为右手系时，上式为正. 反之为负. 由此我们得到

(1) $[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]=[\boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}\ \boldsymbol{a}]=[\boldsymbol{c}\ \boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}]=-[\boldsymbol{b}\ \boldsymbol{a}\ \boldsymbol{c}]$等.

(2) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面$\Leftrightarrow[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]=0$.

5. 在坐标表示下的向量积运算

由于 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$ 是一个向量，它的三个分量不易记忆，所以常用表格中三阶行列式来帮助记忆，设 $\boldsymbol{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$，则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}$.

典型例题

例 2.1 下列各式对吗？为什么？

(1) 当 $\boldsymbol{a}\neq0$ 时，$\dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}}=1$；　　(2) $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2\boldsymbol{b}$；

(3) $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2\cdot|\boldsymbol{b}|^2$；

(4) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$；

(5) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$；

(6) 若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$ 则 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$；　　(7) 若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$ 则 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$.

答　以上都是错误的，这里主要错误就是把实数的运算法则搬入了向量的运算，比较明显的是实数运算具有乘法的交换律与结合律，并且有除法运算. 而向量运算中并无除法的概念，并且向量积运算不满足交换律与结合律. 由此(1)的左边是一个没定义过的运算，所以并无意义. (2)式与(3)式误用了向量的结合律，其中(2)式的左边是一个与 $\boldsymbol{a}$ 平行的向量，而其右式却平行于 $\boldsymbol{b}$，(3)式左端$=[|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})]^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\cos^2(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$而右端不含有$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$因子. (4)(5)两式误用了向量积的交换律. 事实上(4)式左端$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{0}$，而右式将 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ 计算成 $2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，(5)式出了同样的错误. (6)(7)两式套用了实数的消去律，事实上，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$ 等价于 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0$，该式等价于 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，所以 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 未必为零向量. 同样 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$ 等价于