



2011 知识树考研

全国硕士研究生入学统一考试

考研数学

数学三

10年真题点评

✧ 文登培训学校策划 ✧

陈文灯 / 主 编

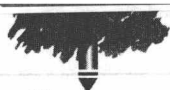
陈启浩 / 副主编

立足真题 把握规律

名师亲笔 点评独到

附赠真题线路图 考点一目了然

 北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



KNOWLEDGE
TREE

2011 知识树考研

全国硕士研究生入学统一考试

考研数学

数学三

10年真题点评

陈文灯 / 主 编

陈启浩 / 副主编



北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

版权专有 侵权必究

图书在版编目(CIP)数据

考研数学 10 年真题点评. 3/陈文灯主编. —3 版. —北京:
北京理工大学出版社, 2010. 3

(知识树考研)

ISBN 978 - 7 - 5640 - 0713 - 3

I. ①考… II. ①陈… III. ①高等数学 - 研究生 - 入学
考试 - 自学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 034807 号

出版发行 / 北京理工大学出版社

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010)68914775(办公室) 68944990(批销中心) 68911084(读者服务部)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 北京柯蓝博泰印务有限公司

开 本 / 787 毫米×1092 毫米 1/16

印 张 / 12.25

字 数 / 290 千字

版 次 / 2010 年 3 月第 3 版 2010 年 3 月第 11 次印刷

责任校对 / 陈玉梅

定 价 / 19.80 元

责任印制 / 母长新

图书出现印装质量问题,本社负责调换

前 言

一年一度的硕士研究生入学统一考试已经举行了十几届,积累了近百份数学试卷,这既是众多命题专家智慧和劳动的结晶,也是广大考研学子的宝贵财富。

历届的考研真题,除其内容外,还包含诸多有价值的信息,例如试题的形式、涵盖面、难度及试题所蕴涵的规律性。为了使考生在考研真题中汲取更多知识、掌握更多解题方法,我们将 2001—2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题作了精心的解析,编写成《考研数学·10 年真题点评》系列丛书,奉献给广大考研朋友,书中对每道真题通过“分析”、“详解”和“评注”三部分进行点评。在“分析”中用简明的语言给出解题思路;在“详解”中用简捷、新颖的方法给出详细解答;在“评注”中强调与真题有关的知识点及题解中使用的技巧。

我们希望读者在使用本书时,不要輕易地翻阅真题的解答,只有当百思不得其解时才查阅解答;而且每做完一道真题,应回过头来仔细阅读书中有关这道真题的分析、详解和评注,进行比对和总结。如果能如此下功夫做完最近十年的数学考研真题,读完全书,我们深信读者在考研数学的基本概念和基本理论的理解上,在计算方法和计算技巧的掌握上都将获得一个飞跃,而且在解题能力和应考水平上也将有一个较大幅度的提高,从而更加从容地面对研究生入学考试。

这套系列丛书自去年问世以来,深得广大考研学子的喜爱。今年在此基础上,作了认真的修订,增加了新的内容(如增加了考题路线图),使得它更适合广大考研朋友复习时使用。

由于成书时间仓促,书中疏漏之处在所难免,恳请广大读者和同仁指正。

编 者

2010 年 3 月

近 10 年考题路线图

(2001—2010 年)

(注:一(1),2003 表示 2003 年第一大题第 1 小题,其中一()、二()为客观题,其他为解答题。此外,本表中删除了大纲中不要求的内容。)

第一部分 微积分

(10 年考题总数:125 题,总分值:717 分。占三部分题量之比重:50%;占三部分分值之比重:52%)

第一章 函数、极限、连续

(10 年考题总数:28 题,总分值:139 分。占第一部分题量之比重:22%;占第一部分分值之比重:19%)

- 题型 1 求 1^∞ 型极限(一(1),2002)
- 题型 2 求 $0/0$ 型极限(三,2002;二(9),2009)
- 题型 3 求 $0 \cdot \infty$ 有界量型极限(二(11),2007)
- 题型 4 求 $\infty - \infty$ 型极限(三(15),2004;三(15),2005)
- 题型 5 求 $\infty \cdot 0$ 型极限(一(1),2005;三(15),2008)
- 题型 6 求 0^0 型极限(三(15),2010)
- 题型 7 函数性质(奇偶性,周期性,单调性,有界性)的判定(二(2),2001;二(7),2004;二(11),2005)
- 题型 8 无穷小的比较或确定无穷小的阶(一(1),2007;一(2),2009)
- 题型 9 数列极限存在的判定或证明或求解(一(1),2006)
- 题型 10 函数极限存在的判定或证明或求解(三(15),2006)
- 题型 11 函数连续性的讨论或证明或逆问题(一(1),2003;三,2003;二(8),2004;二(9),2008)
- 题型 12 函数间断点的判定或证明(二(1),2003;一(1),2008;一(1),2009)
- 题型 13 极限中常数的确定(四,2001;一(1),2004;二(8),2006;一(1),2010)
- 题型 14 与极限的定理(介值定理,保号性,单调有界等)相关的命题(二(11),2004)

第二章 一元函数微分学

(10 年考题总数:31 题,总分值:173 分。占第一部分题量之比重:25%;占第一部分分值之比重:24%)

- 题型 1 与导数或微分的概念和性质相关的命题(二(7),2006;一(2),2007)
- 题型 2 求复合函数的导数或微分(一(2),2006)
- 题型 3 求隐函数的导数或微分(二(9),2010)
- 题型 4 函数极值或最值的判定或求解(六(2),2003;二(10),2005;一(3),2010)
- 题型 5 函数拐点或凹凸性的判定或求解或逆问题(三(17),2007;二(12),2010)
- 题型 6 求一元函数的高阶导数(二(12),2007)
- 题型 7 函数在某一区间至少存在一点或两点使某一式子成立的判定或证明(七,2001;二(1),2002;八,2002;八,2003;三(19),2007;三(18),2009;三(19),2010)
- 题型 8 函数不等式或文字不等式的证明或判定(三(19),2005;三(17),2006;一(4),2010)
- 题型 9 求一元函数在一点的切线方程或法线方程(一(2),2003;三(18(I)),2006)
- 题型 10 微分学在经济中的应用题(一(1),2001;三(18),2004;一(5),2007;二(12),2009;二(11),2010)
- 题型 11 求曲线的渐近线(一(6),2007)
- 题型 12 与函数图形(单调区间,极值,拐点,渐近线等)相关的命题(二(1),2001;二(9),2004)
- 题型 13 方程的根的判定或证明(二(7),2005)

第三章 一元函数积分学

(10年考题总数:16题,总分值:94分。占第一部分题量之比重:13%;占第一部分分值之比重:13%)

- 题型 1 求不定积分或原函数(五,2002;三(16),2009)
- 题型 2 已知函数图形,判定原函数图形(一(4),2009)
- 题型 3 定积分的计算(一(3),2004;二(10),2008)
- 题型 4 定积分的比较(一(3),2007;三(18),2010)
- 题型 5 定积分等式或不等式的判定或证明(三(17),2004;一(5),2005;三(18),2008;一(3),2009)
- 题型 6 求平面图形的面积(六,2001;三(18(II)),2006;一(2),2008)
- 题型 7 求平面图形绕坐标轴的旋转体的体积(六,2002;二(10),2010)

第四章 多元函数微积分学

(10年考题总数:28题,总分值:181分。占第一部分题量之比重:22%;占第一部分分值之比重:25%)

- 题型 1 多元函数在一点偏导存在的判定(一(3),2008)
- 题型 2 求多元复合函数的偏导,全导或全微分(三,2001;四,2002;四,2003;一(2),2004;一(3),2005;三(16),2005;一(3),2006;二(13),2007;一(4),2008;三(16),2008;二(10),2009)
- 题型 3 多元函数极值的判定或求解或应用(二(2),2003;二(11),2006;三(15),2009;三(17),2010)
- 题型 4 二重积分的计算(五,2001;一(3),2003;五,2003;三(16),2004;三(17),2006;三(18),2007;二(11),2008;三(17),2008;三(17),2009;三(16),2010)

题型 5 二重积分更换积分次序(一(2),2002;一(4),2007)

第五章 无穷级数

(10 年考题总数:12 题,总分值:72 分。占第一部分题量之比重:10%;占第一部分分值之比重:10%)

题型 1 无穷级数敛散性的判定(二(3),2003;二(10),2004;二(9),2005;二(9),2006)

题型 2 求无穷级数的和(八,2001;六(1),2003)

题型 3 求函数的幂级数展开,求幂级数的收敛域或收敛半径或和函数(二(2),2002;三(18),2005;三(19),2006;三(20),2007;二(11),2009)

题型 4 无穷级数在经济中的应用(三(19),2008)

第六章 常微分方程与差分方程

(10 年考题总数:10 题,总分值:58 分。占第一部分题量之比重:8%;占第一部分分值之比重:8%)

题型 1 与线性微分方程解的性质和结构相关的命题(二(10),2006;一(2),2010)

题型 2 求一阶齐次或可化为齐次微分方程的通解或特解(二(14),2007)

题型 3 求一阶线性微分方程的通解或特解(七,2003;三(19),2004;一(2),2005;二(12),2008)

题型 4 求二阶齐次线性微分方程的通解或特解(七,2002)

题型 5 求一阶差分方程的通解(一(2),2001)

题型 6 通过求导建立微分方程求解函数表达式或曲线方程(三(19),2009)

第二部分 线性代数

(10 年考题总数:60 题,总分值:339 分。占三部分题量之比重:24%;占三部分分值之比重:24%)

第一章 行列式

(10 年考题总数:3 题,总分值:12 分。占第二部分题量之比重:5%;占第二部分分值之比重:4%)

题型 1 求矩阵的行列式(一(4),2006;二(13),2008;二(13),2010)

第二章 矩阵

(10 年考题总数:15 题,总分值:62 分。占第二部分题量之比重:25%;占第二部分分值之比重:18%)

题型 1 与矩阵的逆相关的计算、判定或证明(一(4),2003;一(5),2008)

题型 2 矩阵的运算(三(21(I)),2005;三(21(II)),2008)

题型 3 矩阵的幂的计算(三(21(III)),2006)

题型 4 与伴随矩阵相关的计算或证明(二(4),2003;二(12),2005;一(5),2009)

题型 5 与矩阵的秩相关的计算,判定或证明(一(3),2001;二(15),2007)

题型 6 与初等矩阵或初等变换相关的命题(二(3),2001;二(13),2006;一(6),2009)

题型 7 两个矩阵关系(等价、相似或合同等)的判定(二(12),2004;一(8),2007)

第三章 向量

(10 年考题总数:12 题,总分值:67 分。占第二部分题量之比重:20%;占第二部分分值之比重:20%)

题型 1 向量组线性相关性的判断或证明(二(5),2003;二(12),2006;一(7),2007;三(21(I)),2008;三(20(II)),2009;一(5),2010)

题型 2 根据向量的线性相关性求参数(一(3),2001;一(4),2005;二(13),2005)

题型 3 讨论含参变量的向量的线性表出(三(20),2004;三(20),2006)

第四章 线性方程组

(10 年考题总数:11 题,总分值:86 分。占第二部分题量之比重:18%;占第二部分分值之比重:25%)

题型 1 与解的判定、性质和结构相关的命题的判定或证明(二(4),2001;九(1),2001;二(4),2002;二(13),2004)

题型 2 线性方程组的通解的计算或判定(三(20(I)),2009)

题型 3 讨论含参数的线性方程组的解(九,2002;九,2003;三(20),2005;三(21),2007;三(20),2008;三(20),2010)

第五章 矩阵的特征值和特征向量

(10 年考题总数:11 题,总分值:67 分。占第二部分题量之比重:18%;占第二部分分值之比重:20%)

题型 1 求矩阵的特征值或特征向量(十(1),2002;三(21(I)),2004;三(21(I)),2006;三(22),2007;三(21(I)),2009)

题型 2 已知实对称矩阵的特征值或特征向量,反求矩阵的表达式或使其对角化的正交阵(三(21),2010)

题型 3 矩阵对角化的判定或证明或对角阵的求解(九(2),2001;三(21(II)),2004;三(21(II)),2006)

题型 4 相似矩阵的判定或逆问题(二(13),2009;一(6),2010)

第六章 二次型

(10 年考题总数:8 题,总分值:45 分。占第二部分题量之比重:13%;占第二部分分值之比重:13%)

题型 1 求化实二次型为标准二次型的正交变换或正交矩阵(十(2),2003)

题型 2 已知一二次型的特征值,求二次型中的参数(十(1),2003)

题型 3 求二次型的秩(一(4),2004)

题型 4 矩阵正定的判定或证明(十(2),2002;三(21(II)),2005)

题型 5 与二次型规范型相关的命题(十,2001;三(21(II)),2009)

题型 6 矩阵合同的判定或求解(一(6),2008)

第三部分 概率论与数理统计

(10 年考题总数:61 题,总分值:330 分。占三部分题量之比重:25%;占三部分分值之比重:24%)

第一章 随机事件和概率

(10 年考题总数:4 题,总分值:16 分。占三部分题量之比重:7%;占三部分分值之比重:5%)

题型 1 求随机事件的概率(一(5),2004;一(5),2005;一(9),2007)

题型 2 随机事件的关系运算(一(7),2009)

第二章 随机变量及其分布

(10 年考题总数:7 题,总分值:42 分。占三部分题量之比重:11%;占三部分分值之比重:13%)

题型 1 求一维随机变量函数的分布(十二,2002;十一,2003;三(22(I)),2006)

题型 2 与一维随机变量概念、性质相关的命题(二(14),2006;一(8),2010)

题型 3 已知分布,求概率(二(14),2008;一(7),2010)

第三章 二维随机变量及其分布

(10 年考题总数:24 题,总分值:134 分。占三部分题量之比重:39%;占三部分分值之比重:41%)

题型 1 求二维离散型随机变量的联合分布律或分布函数或边缘概率分布(十一(1),2002;三(22(I)),2004;一(6),2005;三(23(II)),2009;三(23(I)),2010)

题型 2 求二维连续型随机变量的分布或分布密度或边缘密度函数(三(22(I)),2005)

题型 3 两个或多个随机变量的独立性或相关性的判定或证明(二(6),2003)

题型 4 求二维随机变量的条件概率或条件密度函数(一(10),2007;三(22(I)),2008;三(22),2009;三(23(I)),2009;三(22),2010)

题型 5 求两个随机变量的函数的概率分布或概率密度或在某一区域的概率(十二,2001;十二,2003;三(22(III)),2004;一(5),2006;三(22(III)),2006;二(16),2007;三(23),2007;一(7),2008;三(22(II)),2008;一(8),2009)

第四章 随机变量的数字特征

(10 年考题总数:8 题,总分值:32 分。占三部分题量之比重:13%;占三部分分值之比重:10%)

题型 1 求二维随机变量或函数的数字特征(十一(2),2002)

题型 2 求两个随机变量的协方差或相关系数(二(5),2001;一(4),2002;一(5),2003;三(22(II)),2004;三(22(II)),2006;一(8),2008;三(23(II)),2010)

第五章 大数定律和中心极限定理

(10 年考题总数:3 题,总分值:15 分。占第三部分题量之比重:5%;占第三部分分值之比重:5%)

题型 1 估计概率的值(一(4),2001)

题型 2 与中心极限定理相关的命题(十一,2001;一(6),2003)

第六章 数理统计

(10 年考题总数:15 题,总分值:91 分。占第三部分题量之比重:25%;占第三部分分值之比重:28%)

题型 1 分位数的求解(二(14),2004)

题型 2 求参数的矩估计或最大似然估计(一(5),2002;三(23),2004;三(23),2006;三(24(I)),2007)

题型 3 统计量的分布的求解或判定或证明(一(5),2001;二(5),2002;二(14),2005)

题型 4 求统计量的数字特征(十一(1),2000;一(6),2004;三(23),2005;一(6),2006;三(23),2008;二(14),2009;二(14),2010)

10 年考题总数:15 题,总分值:91 分。占第三部分题量之比重:25%;占第三部分分值之比重:28%

10 年考题总数:15 题,总分值:91 分。占第三部分题量之比重:25%;占第三部分分值之比重:28%

目 录

近 10 年考题路线图(2001—2010 年)	I
--------------------------------	---

近 10 年真题集

2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	1
2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	4
2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	8
2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	11
2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	14
2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	17
2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	20
2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	24
2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	27
2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	30

近 10 年真题分析、详解及评注

2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题分析、详解及评注	33
2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题分析、详解及评注	44
2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题分析、详解及评注	57
2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题分析、详解及评注	68
2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题分析、详解及评注	84
2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题分析、详解及评注	97
2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题分析、详解及评注	112
2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题分析、详解及评注	126
2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题分析、详解及评注	138
2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题分析、详解及评注	150
附 录 研究生入学考试中常见问题解析	162

2010 年研究生入学统一考试

数学三试题

一、选择题:1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.

(1) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \left(\frac{1}{x} - a \right) e^x \right] = 1$, 则 a 等于

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3. 【 】

(2) 设 y_1, y_2 为一阶非齐次线性微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的两个特解, 若 λ, μ 使 $\lambda y_1 + \mu y_2$ 为该方程的解, $\lambda y_1 - \mu y_2$ 为该方程对应齐次微分方程的解, 则

- (A) $\lambda = \frac{1}{2}, \mu = \frac{1}{2}$. (B) $\lambda = -\frac{1}{2}, \mu = -\frac{1}{2}$.
(C) $\lambda = \frac{2}{3}, \mu = \frac{1}{3}$. (D) $\lambda = \frac{2}{3}, \mu = \frac{2}{3}$. 【 】

(3) 设函数 $f(x), g(x)$ 具有二阶导数, 且 $g''(x) < 0, g(x_0) = a$ 是 $g(x)$ 的极值, 则 $f(g(x))$ 在 x_0 取到极大值的一个充分条件是

- (A) $f'(a) < 0$. (B) $f'(a) > 0$.
(C) $f''(a) < 0$. (D) $f''(a) > 0$. 【 】

(4) 设 $f(x) = \ln^{10} x, g(x) = x, h(x) = e^{\frac{x}{10}}$, 则当 x 充分大时, 有

- (A) $g(x) < h(x) < f(x)$. (B) $h(x) < g(x) < f(x)$.
(C) $f(x) < g(x) < h(x)$. (D) $g(x) < f(x) < h(x)$. 【 】

(5) 设向量组 (I) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 可由向量组 (II) $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表示, 则

- (A) 若向量组 (I) 线性无关, 则 $r \leq s$.
(B) 若向量组 (I) 线性相关, 则 $r > s$.
(C) 若向量组 (II) 线性无关, 则 $r \leq s$.
(D) 若向量组 (II) 线性相关, 则 $r > s$. 【 】

(6) 设 A 为 4 阶实对称矩阵, 且 $A^2 + A = O$, 若 A 的秩为 3, 则 A 相似于

- (A) $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$.
(C) $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$. (D) $\begin{bmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$. 【 】

(7) 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1 \\ 1 - e^{-x}, & x \geq 1 \end{cases}$, 则 $P\{X = 1\} =$

- (A) 0. (B) $\frac{1}{2}$. (C) $\frac{1}{2} - e^{-1}$. (D) $1 - e^{-1}$. 【 】

(8) 设 $f_1(x)$ 是标准正态分布的概率密度函数, $f_2(x)$ 是 $[-1, 3]$ 上均匀分布的概率密度, 且

$f(x) = \begin{cases} af_1(x), & x \leq 0 \\ bf_2(x), & x > 0 \end{cases}$, ($a > 0, b > 0$) 为概率密度, 则 a, b 应满足

- (A) $2a + 3b = 4$. (B) $3a + 2b = 4$.
(C) $a + b = 1$. (D) $a + b = 2$. 【 】

二、填空题: 9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 把答案填在题中横线上.

(9) 设可导函数 $y = y(x)$ 由方程 $\int_0^{x+y} e^{-t^2} dt = \int_0^x x \sin t^2 dt$ 确定, 则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} =$ _____.

(10) 设位于曲线 $y = \frac{1}{\sqrt{x(1+\ln^2 x)}}$ ($e \leq x < +\infty$) 下方, x 轴上方的无界区域 G , 则 G 绕 x 轴

旋转一周所形成空间区域的体积为 _____.

(11) 设某商品的收益函数为 $R(p)$, 收益弹性为 $1 + p^3$, 其中 p 为价格, 且 $R(1) = 1$, 则 $R(p) =$ _____.

(12) 若曲线 $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$ 有拐点 $(-1, 0)$, 则 $b =$ _____.

(13) 设 A, B 为 3 阶矩阵, 且 $|A| = 3, |B| = 2, |A^{-1} + B| = 2$, 则 $|A + B^{-1}| =$ _____.

(14) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ($\sigma > 0$) 的简单随机样本, 统计量 $T =$

$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$, 则 $ET =$ _____.

三、解答题: 15 ~ 23 小题, 共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^{\frac{1}{x}} - 1)^{\frac{1}{\ln x}}$.

(16) (本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint_D (x+y)^3 dx dy$, 其中 D 由曲线 $x = \sqrt{1+y^2}$ 与直线 $x + \sqrt{2}y = 0, x - \sqrt{2}y = 0$

所围成.

(17) (本题满分 10 分)

求函数 $M = xy + 2yz$ 在约束条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 10$ 下的最大值和最小值.

(18) (本题满分 10 分)

(I) 比较 $\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$ 与 $\int_0^1 t^n |\ln t| dt$ ($n = 1, 2, \dots$) 的大小, 说明理由.

(II) 记 $u_n = \int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$ ($n = 1, 2, \dots$), 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

(19) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 3]$ 上连续, 在开区间 $(0, 3)$ 内存在二阶导数, 且 $2f(0) = \int_0^2 f(x) dx$

$$= f(2) + f(3),$$

(I) 证明存在 $\eta \in (0, 2)$, 使得 $f(\eta) = f(0)$;

(II) 证明存在 $\xi \in (0, 3)$, 使得 $f''(\xi) = 0$.

(20)(本题满分 11 分)

$$\text{设 } A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

已知线性方程组 $Ax = b$ 有两个不同的解,

(I) 求 λ, a ; (II) 求方程 $Ax = b$ 的通解.

(21)(本题满分 11 分)

$$\text{设 } A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{bmatrix}, \text{ 存在正交矩阵 } Q, \text{ 使得 } Q^T A Q \text{ 为对角阵, 若 } Q \text{ 的第一列为 } \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)^T,$$

求 a, Q .

(22)(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = A e^{-2x^2 + 2xy - y^2} \quad (-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty),$$

求常数 A 及条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$.

(23)(本题满分 11 分)

箱中装有 6 个球, 其中红、白、黑球的个数分别为 1, 2, 3 个, 现从箱中随机地取出 2 个球, 记 X 为取出的红球个数, Y 为取出的白球个数,

(I) 求随机变量 (X, Y) 的概率分布; (II) 求 $\text{Cov}(X, Y)$.

2009 年全国硕士研究生入学统一考试 数学三试题

一、选择题:1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.

(1) 函数 $f(x) = \frac{x-x^3}{\sin \pi x}$ 的可去间断点的个数为

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 无穷多个.

(2) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1-bx)$ 为等价无穷小,则

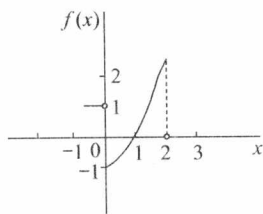
- (A) $a = 1, b = -\frac{1}{6}$. (B) $a = 1, b = \frac{1}{6}$.

- (C) $a = -1, b = -\frac{1}{6}$. (D) $a = -1, b = \frac{1}{6}$.

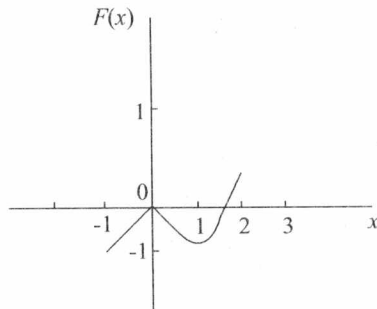
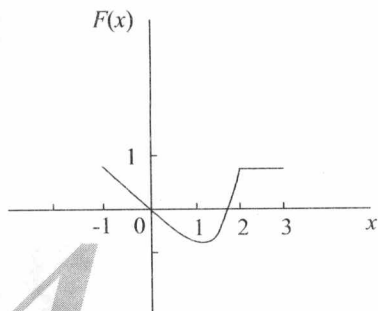
(3) 使不等式 $\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt > \ln x$ 成立的 x 的范围是

- (A) $(0, 1)$. (B) $(1, \frac{\pi}{2})$. (C) $(\frac{\pi}{2}, \pi)$. (D) $(\pi, +\infty)$.

(4) 设函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-1, 3]$ 上的图形为

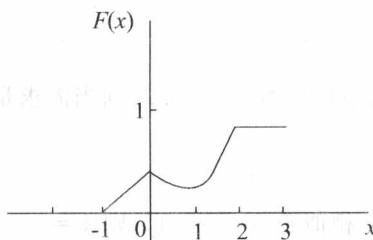


则 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 的图形为

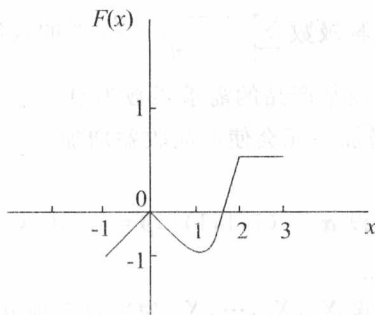


(A)

(B)



(C)



(D)

【 】

(5) 设 A, B 均为 2 阶矩阵, A^*, B^* 分别为 A, B 的伴随矩阵, 若 $|A| = 2, |B| = 3$, 则分块矩阵 $\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}$ 的伴随矩阵为

(A) $\begin{bmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{bmatrix}$.

(B) $\begin{bmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{bmatrix}$.

(D) $\begin{bmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{bmatrix}$.

【 】

(6) 设 A, P 均为 3 阶矩阵, P^T 为 P 的转置矩阵, 且 $P^T A P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. 若 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), Q = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$, 则 $Q^T A Q$ 为

(A) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(B) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

【 】

(7) 设事件 A 与事件 B 互不相容, 则

(A) $P(\overline{AB}) = 0$.

(B) $P(AB) = P(A)P(B)$.

(C) $P(A) = 1 - P(B)$.

(D) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1$.

【 】

(8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 X 服从标准正态分布 $N(0, 1)$, Y 的概率分布为 $P\{Y = 0\} = P\{Y = 1\} = \frac{1}{2}$, 记 $F_Z(z)$ 为随机变量 $Z = XY$ 的分布函数, 则函数 $F_Z(z)$ 的间断点的个数为

(A) 0.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 3.

【 】

二、填空题: 9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 把答案填在题中横线上.

(9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2} - 1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(10) 设 $z = (x + e^y)^x$, 则 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,0)} = \underline{\hspace{2cm}}$.