

算法与建模



医学图像重建

Medical Image Reconstruction

曾更生 著



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

R445
67

算法与建模

Medical Image Reconstruction

医学图像重建

YIXUE TUXIANG CHONGJIAN

曾更生 著



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书主要介绍医学图像分析系统的现代图像重建技术,内容涵盖二维(2D)平行光束和扇形束成像,三维(3D)平行线、平行面和锥形束成像,详细内容包括:解析算法和迭代算法,以及这些算法在X光CT、SPECT、PET、MRI等医学影像中的应用;使用截断的投影数据精确重建ROI、Katsevich的锥形束滤波反投影(FBP)算法以及利用 l_0 极小化方法来重建极度欠采样数据。本书力图用深入浅出的方式介绍一些高深的理论,用图示的方式来展开讨论。

本书可作为生物医学工程类高年级本科生和研究生的教学参考书,也可作为生物医学工程类的工程技术人员学习医学图像和图像处理与重建知识的入门读物。

图书在版编目(CIP)数据

医学图像重建 / (美)曾更生著. —北京:高等教育出版社, 2010. 2

ISBN 978-7-04-028828-5

I. ①医… II. ①曾… III. ①医学图像-图像处理
IV. ①R445

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第006274号

策划编辑 陈红英 责任编辑 陈红英 封面设计 张楠
版式设计 张岚 责任校对 王效珍 责任印制 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100120	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landracom.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landracom.com.cn
印 刷	山东沂南县汇丰印刷有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	787×1092 1/16	版 次	2010年2月第1版
印 张	13	印 次	2010年2月第1次印刷
字 数	220 000	定 价	35.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 28828-00

前言

我第一次接触到医学图像重建是来到犹他大学做博士后的时候。当时 Grant Gullberg 博士和 Rolf Clackdoyle 博士开课讲授图像重建算法。我在课上很详细地记了笔记，这些笔记对我后来所从事的医学成像工作很有帮助，直到今天我还要时常翻阅那些笔记。这本书摘选了那些笔记中的一些内容，并包含了最近的一些研究成果。

这是一本入门的书，其宗旨是向读者介绍经典的和现代的图像重建方法，内容涵盖了二维 (2D) 平行光束和扇形束成像，三维 (3D) 平行线、平行面以及锥形束成像，其算法包括解析算法和迭代算法。本书还描述了这些算法在 X 光 CT、SPECT、PET 和 MRI 等医学影像中的应用。本书对最新的研究成果，如使用截断的投影数据精确重建 ROI, Katsevich 的锥形束滤波反投影 (FBP) 算法以及利用 l_0 极小化方法来重建极度欠采样数据也作了介绍。

本书力图用深入浅出的方式介绍一些高深的理论，尽量用图示和直观的方式来展开讨论。笔者觉得用这种聊天的方式，而不是用严紧的数学推导方式来介绍一门应用数学学科，可以使读者不至于望而却步。通过阅读本书可以对医学图像重建领域有个概括性的了解。希望读者朋友们能喜欢这本书。

在这里我要感谢我的启蒙老师 Grant Gullberg 博士和 Rolf Clackdoyle 博士，以及我的同事们和同行们（特别是华人学者尤江生、梁正荣、潘晓川、王革、陈光红）对我的大力帮助。我要感谢 Michel Defrise 博士对书稿提出的修改意见以及毛燕飞对书稿的校阅。我还要感谢我的母校西安电子科技大学（原西北电讯工程学院）和新墨西哥大学（University of New Mexico）对我的培养。最后，我特别要感谢我的家人李亚、Andrew、Kathy 和 Megan

的支持。

读者第一次阅读时可以跳过书中标有星号* 的章节，而不影响书的连贯性。

曾更生

2009 年 8 月

于美国犹他州盐湖城

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话：(010) 58581897/58581896/58581879

反盗版举报传真：(010) 82086060

E - mail：dd@hep.com.cn

通信地址：北京市西城区德外大街4号

高等教育出版社打击盗版办公室

邮 编：100120

购书请拨打电话：(010)58581118

目录

1 断层成像的基本原理	1
1.1 断层成像	1
1.2 投影	4
1.3 图像重建	6
1.4 反投影	9
*1.5 数学表达式	10
1.5.1 投影	10
1.5.2 反投影	12
1.5.3 狄拉克 δ 分布函数	13
1.6 例题	14
小结	18
练习题	18
参考文献	19
2 平行光束图像重建	21
2.1 傅里叶变换	21
2.2 中心切片定理	22
2.3 重建算法	25
2.3.1 方法一	25
2.3.2 方法二	25
2.3.3 方法三	26

读者第一次阅读时可以跳过书中标有星号 (*) 的章节, 而不影响书的连贯性。

2.3.4	方法四	28
2.3.5	方法五	28
2.4	计算机模拟例子	29
*2.5	利用截断的投影数据重建 ROI	31
*2.6	数学表达式	35
2.6.1	傅里叶变换与卷积	36
2.6.2	希尔伯特变换与有限希尔伯特变换	36
2.6.3	中心切片定理的证明	39
2.6.4	FBP 算法的推导	40
2.6.5	先卷积后反投影算法的数学表达式	41
2.6.6	Radon 反演公式的数学表达式	41
2.6.7	先反投影后滤波算法的推导	41
2.7	例题	42
	小结	45
	练习题	46
	参考文献	47
3	扇形束图像重建	49
3.1	扇形束成像的几何描述及其点扩散函数	49
3.2	平行光束算法到扇形束算法的转换	52
3.3	短扫描	55
*3.4	数学表达式	57
3.4.1	扇形束 FBP 算法的推导	57
3.4.2	扇形束的 DHB 算法	59
3.5	例题	61
	小结	64
	练习题	64
	参考文献	65
4	透射型投影和发射型投影的断层成像	67
4.1	X 光 CT	67
4.2	PET 和 SPECT	71

4.3	发射型断层成像的衰减修正	75
*4.4	数学表达式	79
4.5	例题	81
	小结	83
	练习题	83
	参考文献	84
5	三维图像重建	87
5.1	平行的线积分数据	87
5.1.1	先反投影后滤波算法	90
5.1.2	先滤波后反投影 FBP 算法	91
5.2	平行的面积分数据	92
5.3	锥形束数据	94
5.3.1	Feldkamp 算法	95
5.3.2	Grangeat 算法	96
5.3.3	Katsevich 算法	98
*5.4	数学表达式	102
5.4.1	平行的线积分数据的先反投影后滤波算法	102
5.4.2	平行的线积分数据的先滤波后反投影算法	103
5.4.3	三维 Radon 反演公式	104
5.4.4	三维 Radon 数据的先反投影后滤波算法	105
5.4.5	Feldkamp 算法	106
5.4.6	Tuy 关系	107
5.4.7	Grangeat 关系	109
5.4.8	Katsevich 算法	112
5.5	例题	118
	小结	120
	练习题	121
	参考文献	122
6	迭代重建	125
6.1	解线性方程组	125

6.2	代数重建 ART 算法	130
6.3	梯度下降算法	131
6.4	ML-EM 算法	135
6.5	OS-EM 算法	136
6.6	噪声控制	137
6.6.1	解析方法 —— 加窗函数	137
6.6.2	迭代方法 —— 提前停止迭代	137
6.6.3	迭代方法 —— 选择像素模型	138
6.6.4	迭代方法 —— 精确建模	140
6.7	噪声模型建于似然函数中	141
6.8	利用先验知识	144
*6.9	数学表达式	145
6.9.1	ART	145
6.9.2	共轭梯度算法	147
6.9.3	ML-EM	148
6.9.4	OS-EM	151
6.9.5	MAP	151
6.9.6	匹配的和匹配的投影运算与反投影运算对	152
*6.10	利用 l_0 极小化来重建极度欠采样数据	154
6.11	例题	157
	小结	168
	练习题	169
	参考文献	171
7	MRI 中的图像重建	175
7.1	磁 “M”	175
7.2	共振 “R”	177
7.3	成像 “I”	180
7.3.1	获取 z 方向信息 —— 断层选择	180
7.3.2	获取 x 方向信息 —— 频率编码	181
7.3.3	获取 y 方向信息 —— 相位编码	183
*7.4	数学表达式	185

7.5 例题.....	188
小结.....	190
练习题.....	191
参考文献.....	192
名词术语英汉对照.....	193

1 断层成像的基本原理

本章主要介绍断层成像中最基本的概念。首先，给断层成像定义，然后用两个简单的例子演示如何从测量数据得到断层图像，并对什么是投影数据作出解释。接下来，用一个点源为例引入先滤波后反投影的图像重建方法。最后，对反投影的概念进行讨论。

1.1 断层成像

顾名思义，断层成像就是要得到一个物体内部的截面图像。比如想知道西瓜里面是什么样的，最简单的办法就是把西瓜切开，如图 1.1 所示。显然对病人来说这是万不可行之举。需要想一个办法，不用开刀就可把病人内部看得清清楚楚。

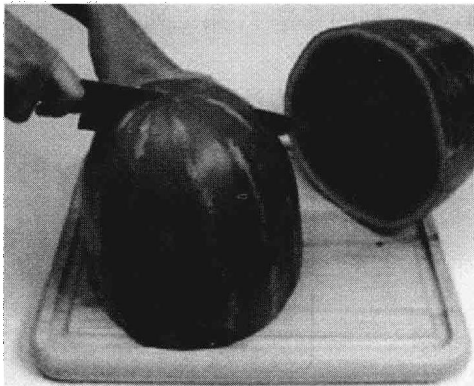


图 1.1 切开西瓜，内部一目了然

让我们来看另一个例子。你想到一个美丽的街心公园去参观，可惜公园正在维修，游人不得入内，你只好在公园的外围走走，拍几张照片。公园内有两棵参天大树，极为繁茂。你在公园的东面和南面对公园拍了照 [见图 1.2 (a)]，颇为满意。回到家后，用你的得意照片，居然画出了公园地图，并确定了那两棵大树的位置 [见图 1.2 (b)]。其实，要确定那两棵树的位置并不难，只要把那两张照片按原本的方位放好，从照片上的每棵树画出一条垂线，这些线的交点就是大树的位置了。如果你有足够多的照片的话，画出这个公园地图并非难事。

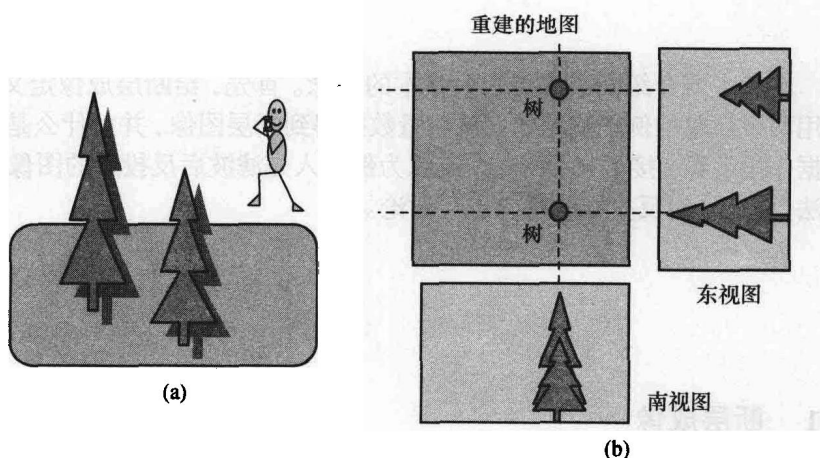


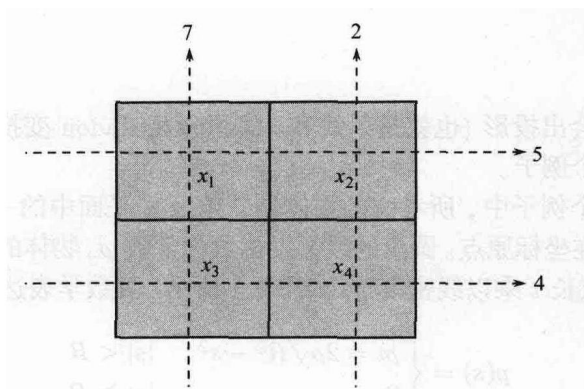
图 1.2 用两张照片重建公园地图

断层成像是个数学问题。让我们一起做个有趣的数学习题。如有一个 2×2 的矩阵，矩阵中元素的数值暂时保密 (给你一些暗示：第一行的和是 5，第二行的和是 4，第一列的和是 7，第二列的和是 2，如图 1.3 所示)，你可以算出这个 2×2 矩阵吗？

这个问题可以用解方程组的方法解决。设那些矩阵元素为未知数，列一个线性方程组：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_3 = 7 \\ x_2 + x_4 = 2 \end{cases} \quad (1.1.1)$$

解这个方程组便得到，

图 1.3 猜猜这个 2×2 的矩阵

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 4 \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad (1.1.2)$$

祝贺你！你用数学方法解决了一个断层成像问题。一般来说，断层成像都是用数学计算的手段解决的。怪不得它被称为 CT (Computed Tomography, 计算机断层成像)，这个词直译为：计算出的断层成像。通常为简捷起见，“计算出的”这几个字就略去不说了。矩阵每一行的和，每一列的和的概念可以推广为一个图像的射线和、线积分和投影数据。从物体的投影数据来得到物体的内部断层图像的过程就称之为图像重建。

如果断层成像问题再复杂一点怎么办呢？比如说，公园里有很多树。仅靠两张照片就能画出一张公园地图吗？如果考虑的矩阵远远大于两行两列，仅仅靠知道每一行的和及每一列的和能解出原矩阵吗？一般来说，不能。通常需要更多的数据。这些数据从何而来呢？需要从更多不同的角度来采集数据。类似于上面谈到的“猜猜矩阵”的问题，需要从不同的角度对矩阵求和。这样一来，就需要用到更复杂的数学来解决一个实际的断层成像问题。

1.2 投影

为了体会出投影 (也就是射线和、线积分及 Radon 变换) 的概念, 在这里给出几个例子。

在第一个例子中, 所考虑的物体是二维 $x-y$ 平面中的一个均匀圆盘。圆盘的圆心在坐标原点。圆盘的线密度函数为常数 ρ 。物体的投影值 (即线积分值) 为弦长 t 乘以线密度 ρ , 如图 1.4 所示。其数学表达式为:

$$p(s) = \begin{cases} \rho t = 2\rho\sqrt{R^2 - s^2} & |s| < R \\ 0 & |s| \geq R \end{cases}$$

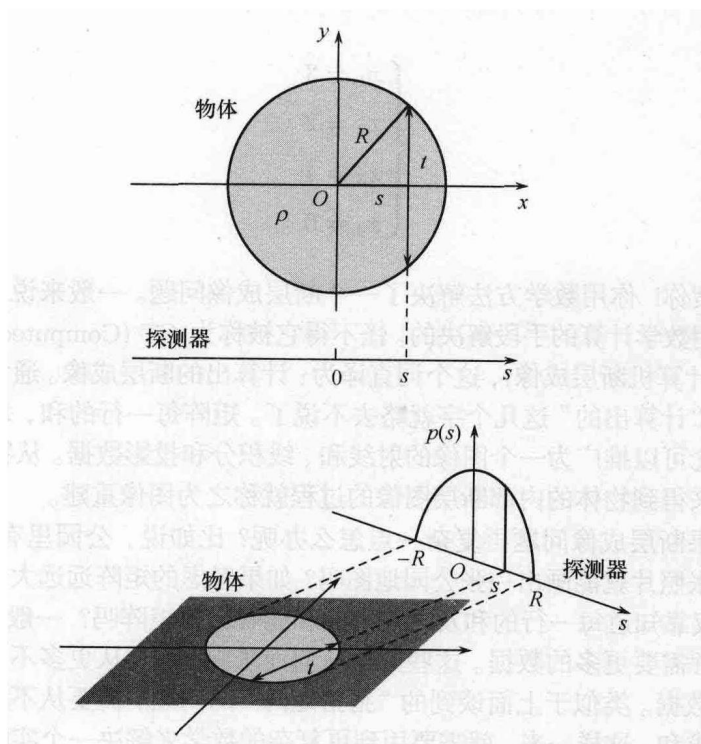


图 1.4 用跨圆盘的线积分产生数据

在这个特例中, 投影值 $p(s)$ 对于所有的角度 θ 来说都是一样的。角度 θ 是探测器相对于物体的旋转角度。

如果物体相对于旋转中心没有对称性的话, 物体的投影值 $p(s, \theta)$ 则因角度 θ 的不同而不同, 如图 1.5 所示。

下一个例子考虑 y 轴上的一个点源。我们来探讨投影值 $p(s, \theta)$ 与角

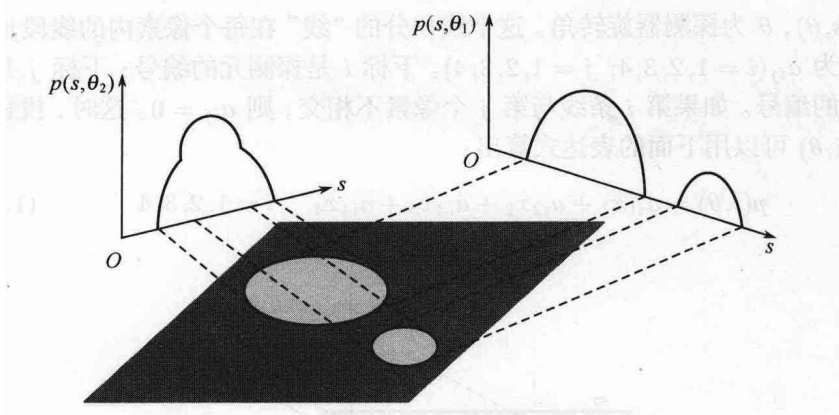


图 1.5 物体的投影在不同的探测角度是不同的

度 θ 之间的奥妙关系 (见图 1.6)。请留意探测器上点源留下的“足迹” s 的位置。该点源在一维探测器 s 的位置上产生了一个脉冲, 该脉冲的位置 s 表达为:

$$s = r \sin \theta \quad (1.2.1)$$

可以发现, 脉冲的位置 s 是角度 θ 的正弦函数。如果把投影数据 $p(s, \theta)$ 显示在 $s-\theta$ 坐标系中 [见图 1.6 (b)], 就会看到一条优美的正弦曲线。由此人们干脆就把投影数据称为正弦图。

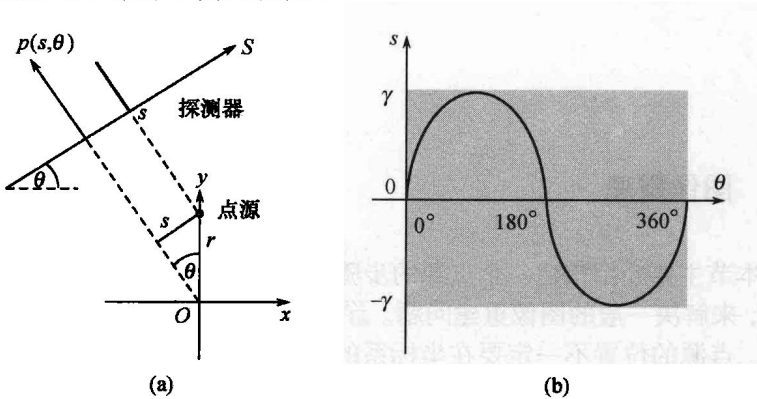


图 1.6 正弦图就是把投影数据显示在 $s-\theta$ 平面上

第四个例子类似图 1.3 所示的 2×2 矩阵问题。这里, 探测器是离散的, 它由 4 个离散的探测元组成, 如图 1.7 所示。这个 2×2 矩阵是个连续的图像。每个矩阵元素代表一个均匀的像素。像素值 $x_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 为第 i 个像素的线密度值。这个矩阵图像的投影数据是图像线积分数值

$p(s, \theta)$, θ 为探测器旋转角。这个线积分的“线”在每个像素内的线段长度记为 a_{ij} ($i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2, 3, 4$)。下标 i 是探测元的编号；下标 j 是像素的编号。如果第 i 条线与第 j 个像素不相交, 则 $a_{ij} = 0$ 。这时, 投影值 $p(i, \theta)$ 可以用下面的表达式算出:

$$p(i, \theta) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + a_{i4}x_4 \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (1.2.2)$$

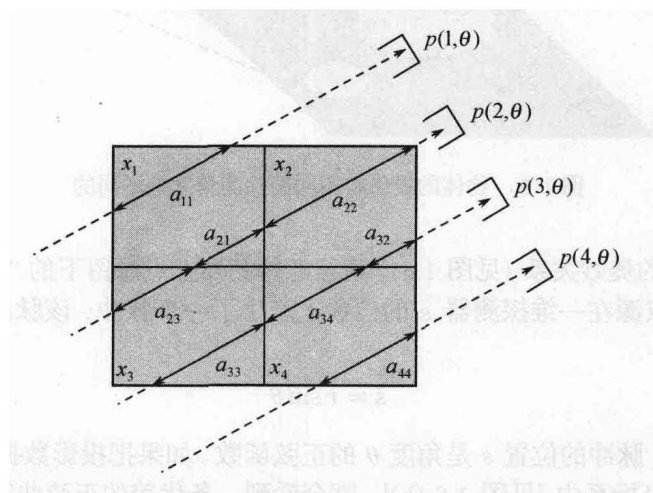


图 1.7 投影值是用像素内的线段长度加权的像素值的和

1.3 图像重建

本节主要介绍重建一个点源的步骤及方法。这些步骤和方法可以推而广之, 来解决一般的图像重建问题。首先在二维 $x-y$ 坐标系中随便放一个点源。点源的位置不一定要在坐标系的原点 (见图 1.8)。设想有一个探测器绕着坐标系的原点旋转, 旋转角为 θ , 这个探测器可以是架照相机。探测器测到的投影数据为 $p(s, \theta)$, 这里 s 是探测器上的一维坐标。

为了计算投影数据 $p(s, \theta)$, 可以画出一条条垂直于探测器的直线。然后沿着这些直线对物体求线积分。对于点源物体, 投影数据 $p(s, \theta)$ 可以简单地得到。这只需在 $x-y$ 平面上过该点源向探测器作一条垂线。这条垂线与探测器的交点位置 s 有一个高度为 1 的脉冲。若垂线不经过点源, 线积分的值 $p(s, \theta)$ 则为零如图 1.8 所示。