中学数学专题辅导丛书

用构造法解数学题

广西教育出版社

用构造法解数学题

陈进兴　　编著

广西教育出版社

中学数学专题辅导丛书
用构造法解数学题
陈进兴　编著
☆
广西教育出版社出版
（南宁市七一路7号）
广西新华书店发行　　广西大学印刷厂印刷
*
开本 787×1092　1/32　　6.25 印张　　130 千字
1990年9月第1版　　1990年9月第1次印刷
印　　数：1—5000 册
ISBN 7-5435-1017-0/G·803
定价：2.20元

序　言

学习数学必须善于解题，不仅要善于解标准题，而且要善于解那些需要独立思考，见解独到和有所创新的题。解这样的题意味着要发现一条摆脱疑难，绕过障碍的途径，它是智力的特殊成就，是对已有的知识、方法采用调动、重组、变换、类比、限定、推广等手段进行再创造的过程。这种创造性的解题方法就是本书介绍的构造法。

运用构造法解题，可以促使代数、三角、几何等各科知识相互渗透，它有利于发挥思维的灵活性，提高分析问题和解决问题的能力。长期有计划地进行构造性思想与方法的解题训练，对发展创造性思维有着重要的作用。

编者执教中学数学多年，深入研究了构造法解题的方法、规律，并取得一定的成果，本书中部分章节就是编者在数学杂志上发表过的文章。现根据中学数学教学大纲及统编教材，编著了《用构造法解数学题》一书。观其全书，内容基本涉猎了中学数学的全部内容。例题选择新颖，解法构思奇巧，当你阅读时不免会觉得妙趣横生、拍手叫绝。因此，可以肯定本书是中学生的一本有益的课外读物，也是中学数学教师一份有价值的教学参考资料。

构造法作为一种新开拓的解题方法，将会随着教育科研的不断发展而日臻完善，将成为中学数学的一种重要解题方法。

杨景星

1988．12

写在前面

这是一本介绍用构造性思维方法解数学题的小册子。

本书介绍了构造法解题的思想、方法、步骤，从七个不同的侧面，谈及构造法在初等数学中的应用。每章配有适量练习题，做好这些练习题，对于理解掌握本书的内容和解题方法是必要的。

本书初稿完成，承蒙尊师福建省特级教师杨景星、高级教师黄水源两位老师提出了宝贵的意见并精心做了校核。杨景星老师还在百忙中为本书作序，在此谨致谢意。

由于编者水平有限，本书难免有错漏和不妥之处，请读者批评指正。

编　者

1988．12．

目　录

§ 1　问题的引入

先从下面两道例题的解法所想到的谈起。

例 1．解方程组

$$\begin{cases} x+ay+a^2z=a^3 \\ x+by+b^2z=b^3 \\ x+cy+c^2z=c^3 \end{cases}$$

其中a、b、c互不相等。

解法一　直接按照三元一次方程组的消元法解。

解法二　把原方程组改写为

$$\begin{cases} a^3-a^2z-ay-x=0 \\ b^3-b^2z-by-x=0 \\ c^3-c^2z-cy-x=0 \end{cases}$$

逆用方程根的定义，我们把a、b、c看成关于t的三次方程 $t^3-zt^2-yt-x=0$ 的三个根，根据韦达定理得：$a+b+c=z$，$ab+bc+ca=y$，$abc=x$，因此原方程组的解为

$$\begin{cases} x=abc \\ y=ab+bc+ca \\ z=a+b+c \end{cases}$$

比较例 1 的两种解法，解法一虽然是一般的方法，但求解极为麻烦，运算量大。解法二则是构造一个满足问题条件的t的三次方程．构造的元件是a、b、c，构造的“支架”是

原方程变形的关系式 $t^3-zt^2-yt-x=0$。解法一是非构造性的解法，解法二则是构造性解法。

在解法二中，以问题已知元素或条件为“元件”，数学中的某些关系式为“支架”，在思维中构造了一种新的“建筑物”，这种方法有一定的普遍意义。我们再看一个例子。

例 2．a、b、c、d都是正数，证明：存在这样的三角形，它的三边等于$\sqrt{b^2+c^2}$，$\sqrt{a^2+c^2+d^2+2cd}$，$\sqrt{a^2+b^2+d^2+2ab}$，并计算这个三角形的面积。

分析：如果要利用三线段构成三角形的三边的充要条件（三角形不等式）来判定满足题设条件的三角形的存在性，是不容易的。再用海仑公式根据三边计算这个三角形的面积更使人望而生畏了！

怎么办？在这“山穷水尽疑无路”之际，又要注意到$\sqrt{b^2+c^2}$，$\sqrt{a^2+(c+d)^2}$，$\sqrt{(a+b)^2+d^2}$的特点，就会点燃起思维的火花，考虑用勾股定理把这三条线段构作出来，不妨试试看。

如图1，以$a+b$，$c+d$为边画一个矩形$ABCD$，则对三角形CEF的三边，有

$CE=\sqrt{a^2+(c+d)^2}$，

$CF=\sqrt{(a+b)^2+d^2}$，

$EF=\sqrt{b^2+c^2}$，这就把满足题设条件的三角形构造出来了，它的存在性是很直观的。

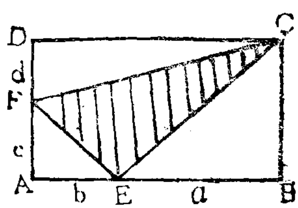

图 1

设$\triangle CEF$的面积为S，显然

$$S=(a+b)(c+d)-\frac{1}{2}bc-\frac{1}{2}d(a+b)-\frac{1}{2}a(c+d)$$

$$= \frac{1}{2}(ac + bc + bd)$$

真可谓“柳暗花明又一村”了。

在这个过程中思维的创造活动的特点是“构造”，我们不妨称之为构造性思维。运用构造性思维解题的方法称为构造法。从解题过程中我们容易看出，由于某种需要，要把题设条件中的关系构造出来，要么将这些关系设想在某个模型上得到实现，如例2设想在矩形中；要么把题设条件中经适当地逻辑组合而构成一种新形式，如例1根据方程根的定义转化为新的一元三次方程，并利用韦达定理，从而使问题获得解决。

早在公元前三百年左右，欧几里德为了证明素数有无穷多个，假设只有有限个素数 p_1，p_2，p_3，…，p_n，构造一个含有新素数的数 $p_1p_2\cdots p_n+1$。古希腊人为了证明毕达哥拉斯学派的信条“万物皆为(有理)数”是不对的，构造一个边长为1的正方形，则它的对角线长竟不是一个“有理数”。上述这些大概是数学史上最早采用构造法解题的例子吧！

§2　构造法解题的思想、方法、步骤

构造法解题的思想到底是什么呢？概括起来就是转化，达到从难到易、从繁到简，从未知到已知的转化目的。一些题目表面上似易而难，当搭起所构造的“桥”后，不仅迎刃而解，而且有时会因构思的奇巧而拍手叫绝。怎样转化呢？这就要注意观察命题的条件与结论的形式，分析结构特点，善于联想我们所熟悉的数学问题，掌握各种数学概念、性质、几何意义，给实现转化的构造性思维方法创造条件。

例1． 若 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ 都是实数，求证：

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

分析： 要证的不等式变形得

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \leqslant 0$$

添加系数，即

$$\left(2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \leqslant 0$$

这一结构与一元二次方程判别式 $b^2-4ac\leqslant 0$ 类似，因此联想判别式就启发我们要构造一元二次方程，即

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)x^2-2(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)x$$
$$+(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)=0$$

从而利用判别式性质即可证得．

例2． 判断方程 $\lg x=\sin x$ 实数根的个数．

分析： 如果要从原方程直接求出其根再作结论，显然不可能．对于这种超越方程怎样判断它的解呢？观察方程左、右两边，不难发现可以分别看成函数 $y=\sin x$和$y=\lg x$，这样要判断解的个数．实际上只要判断这两个函数图象交点个数即可．这就要联想函数图象．构造图形（如图2），容易看出交点个数有3个即方程的解的个数有3个．

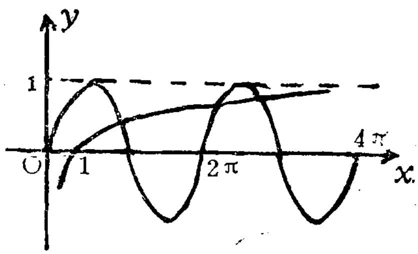

图 2

例3．已知$a_{n+1}=\dfrac{1+a_n}{1-a_n}$，$a_1=a$，$|a_n|\neq 1$ $(n=1, 2, \cdots)$，试求$a_{1989}=$？

分析： 由题设条件的结构联想到三角公式

$$\frac{1+\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}\alpha}=\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right),$$

因此构造递推关系$a_n=\mathrm{tg}\beta_n$．

$\because a_1=a$，$\therefore \mathrm{tg}\beta_1=a$．

$$又 a_{n+1}=\mathrm{tg}\beta_{n+1}=\frac{1+\mathrm{tg}\beta_n}{1-\mathrm{tg}\beta_n}=\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\beta_n\right)$$

$$\beta_{n+1}=\beta_n+\frac{\pi}{4}+k\pi\ (k\in Z，k与n无关)$$

$$\therefore \beta_n=\beta_1+(n-1)\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)$$

$\therefore a_{1989}=\mathrm{tg}\beta_{1989}=\mathrm{tg}\left[\beta_1+1988\left(k\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$$=\mathrm{tg}(\beta_1+497\pi)=\mathrm{tg}\beta_1=a.$$

容易看出，利用构造法解题，就是对题目中的条件、结论经过适当的逻辑组合，而构造成一种新的形式，从而使数学问题得到解决．或者将条件中元素间的关系一般化、特殊化，巧妙地对概念进行分析与综合，联想熟悉的数学命题，利用有关的定理法则，最后制造出一种新的模式，使问题获得解决。

利用构造法解题，有时体现在解题的全过程．如例１、２、３．有时体现在解题的某个关键环节或步骤中。

例４．已知α、β为锐角，且$\cos\alpha+\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)=\frac{3}{2}$，求证：$\alpha=\beta=\frac{\pi}{3}$．

分析：由一个方程要求两个未知数α、β的值，就要用特殊的方法解决．由条件式变形化为关于$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$的一元二次方程得$4\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}-4\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+1=0$

由于这个方程有实数根，得$\Delta\geqslant 0$．

即$\left(-4\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2-4\times4\times1\geqslant0$，从而$\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\geqslant1$．

根据余弦函数的值域$\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\leqslant1$，从而

$\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}=1$，又$\alpha$、$\beta$均为锐角，故$\alpha=\beta$．

通过构造，我们已完成了这个命题的一部分——关键点$\alpha=\beta$，代入已知条件得$\cos\alpha=\frac{1}{2}$，故 $\alpha=\frac{\pi}{3}$，因此$\alpha=\beta=\frac{\pi}{3}$.

从前面例题的分析，关于构造法解题我们可以概括如下步骤：

一、分析命题的条件与结论.

二、从命题的结构特征，联想熟悉的数学问题或者考虑题目本身的意义．如几何意义、公式变形等等.

三、构造新的数学模式（一个方程、函数、图形……）.

四、研究新的数学模型的性质、求解.

五、从所研究新的数学模型的性质、求解结论转化为原来命题上来.

六、作出结论.

§ 3 构造方程法及应用

早在1596年～1650年，数学家笛卡尔（Rene Descartes）在"思维的法则"专论中，曾提出运用方程观点解世间的各类型的问题，他设计的思维模式是：

第一步：把要解决的问题转化为数学问题。

第二步：把数学问题转化为代数问题。

第三步：把代数问题归结为求解方程（组）或研究其性质。

笛卡尔寻找解决所有问题的万能法——方程法，在他本人的生命史上没得到实现，其实这种万能之法显然是找不到的。他所设计的模式虽然不能广泛应用于一般情况，但他的思维品质确实不凡，他的思想在中学数学教学领域里确有广泛的应用。

这里所介绍的构造辅助方程解决中学数学中的主要问题，可以看出这是布列方程解应用题的又一形式，然而又和一般的应用题不同。它不是求一个数，而是寻找一种等量或不等量关系。它不是通过纯粹数学的加、减、乘、除运算而达到目的，而是借助于已有的等量与不等量关系，并结合这些关系之间的逻辑联系来求解方程。这里包含了一般列方程中把具体问题抽象为数学模型的思想方法，也融汇了代数、几何、三角等各科知识及逻辑思维方式，通过这种解题训练，将有助于沟通各科知识间的联系，有助于对学生进行综合的数学思维训练。

一、构造方程的几种途径

一般说来，利用辅助方程法的关键就是构造辅助方程，通常有这几种构造方法。

途径 1　将条件等式或变形后的条件等式中的一个或几个数（或字母）看成未知数，使等式变成方程（组）。

例 1．设 a、b、c 为正数，其中至少有一个不等于 1，且 $a^x b^y c^z = a^y b^z c^x = a^z b^x c^y = 1$，求证：$x+y+z=0$ 或 $x=y=z$。

分析：由条件 $a^x b^y c^z = a^y b^z c^x = a^z b^x c^y = 1$ 转化为对数式得

$$\begin{cases} x\lg a + y\lg b + z\lg c = 0 \\ y\lg a + z\lg b + x\lg c = 0 \\ z\lg a + x\lg b + y\lg c = 0 \end{cases}$$

把上式看成关于 $\lg a$、$\lg b$、$\lg c$ 的齐次线性方程组，则方程组必有非零解．

$$故 \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} = 0,$$

即 $(x+y+z)[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]=0$

$\therefore x+y+z=0$ 或 $x=y=z$。

途径 2．　设置参数，构造方程．这是对于代数中有些求值、化简或证明类型的问题常用的构造方法．

例 2．化简 $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$．

分析：这是化简问题，设

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=y \qquad (1)$$

显然问题变成求y。

把(1)变形得

$y^3=2+\sqrt{5}+2-\sqrt{5}+3\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$
$(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}})=4-3y$

得辅助方程

$$y^3+3y-4=0 \qquad (2)$$

现在问题关键已从化简变为求(2)的方程了，因式分解得

$$(y-1)(y^2+y+4)=0.$$

由于方程$y^2+y+4=0$没有实数根，所以$y=1$，即

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=1.$$

这里参数y起了大作用，把问题——化简问题自然地转化为求关于y的方程，这实质上正是构造方程思想方法的妙处所在。

在解析几何中，设置参数常常伴随着设置参数方程来构造解决。

例3. 如图3，已知OA、OB的方程分别为$y=\sqrt{3}x$，$y=-\sqrt{3}x$，线段CD有定长$4\sqrt{3}$，求当C、D两点分别在射线OA、OB上滑动时，线段CD的中点P的轨迹。

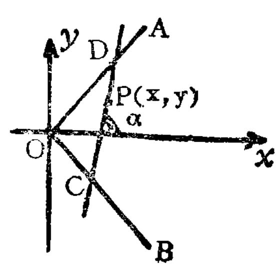

图3

分析：射线OA、OB的方程可以合并成退化的双曲线的方程$Y^2=3X^2$ $(X\geqslant 0)$设P点的坐标为(x, y)，CD的倾斜角为α，则CD的参数方程为