牡丹江师范学院
博士科研启动基金资助（编号: MSB200910）

约束微分包含相关问题的研究

YueShuWeiFenBaoHanXiangGuanWenTiDeYanJiu

许宏文◎著

黑龙江教育出版社
HeiLongJiangJiaoYuChuBanShe

牡丹江师范学院
博士科研启动基金资助(编号:MSB200910)

约束微分包含相关问题的研究

许宏文 著

黑龙江教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

约束微分包含相关问题的研究/许宏文著.—哈尔滨:黑龙江教育出版社,2010.7
ISBN 978-7-5316-5566-4

Ⅰ.①约… Ⅱ.①许… Ⅲ.①微分方程 Ⅳ.①O175

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 129195 号

约束微分包含相关问题的研究
Yueshu Weifen Baohan Xiangguan Wenti De Yanjiu
许宏文 著

责任编辑	徐永进
封面设计	王　刚　周　磊
责任校对	严　雪
出版发行	黑龙江教育出版社 (哈尔滨市南岗区花园街 158 号)
印　　刷	哈尔滨太平洋彩印有限公司
开　　本	880×1230 毫米　1/32
印　　张	5.75
字　　数	150 千
版　　次	2010 年 7 月第 1 版
印　　次	2010 年 7 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5316-5566-4
定　　价	19.00 元

黑龙江教育出版社网址:www.hljep.com.cn
如需订购图书,请与我社发行中心联系。联系电话:0451-82529593　82534665
如有印装质量问题,请与我社联系调换。联系电话:0451-82529347
如发现盗版图书,请向我社举报。举报电话:0451-82560814

序 言

这是一本关于微分包含定性理论及其应用方面的论文集锦。目的在于向广大数学工作者或研究生提供一本关于微分包含理论方面的中文书籍。微分包含作为当今研究不确定系统的重要工具，在国内从事这一领域研究的人还相对较少，所以在本书中，作者注重微分包含理论产生和发展的科学背景的介绍，首先使读者对微分包含理论有一定的了解，并使有从事数学工作愿望的人，对微分包含理论产生浓厚的兴趣。其次想为从事与微分包含相关理论研究的数学工作者和工程人员展示在微分包含理论中占有重要地位的Filippov定理，使其了解这类理论结果在微分包含的相关理论研究中的重要作用，和作为理论工具处理微分包含结构稳定性时的一些技巧和方法，使其在对微分包含的定性研究和定量计算时，头脑中有更多的理论工具。

阅读本书所需要的预备知识：需要集值分析中集值映射连续性及选择理论，需要非光滑分析中的广义次微分的相关概念和性质。本书共分五章。第一章可以看做是微分包含理论产生和发展的科学背景报告，第二、三、四章在介绍建立Lipschitz和单边Lipschitz 连续微分包含的Filippov定理和离散包含的Filippov定理的基础上，分别建立了约束微分包含的解的存在性、Filippov定理。作

为Filippov定理的应用，建立了松弛原理、最优控制问题的价值函数的连续性。第五章作为微分包含理论的一个应用，求解了一类非光滑凸鞍点问题。

本书在写作过程中得到了我的老师薛小平教授的悉心指导，得到了黑龙江教育出版社学术专著出版中心徐永进主任的诸多帮助，在这里一并表示忠心的感谢；同时也感谢家人在我写作的这一年时间里对我的理解和支持。

限于本人的学识和能力，书中还有很多偏颇之处。出版此书，愿达到我前面所说的两个目的。希望也相信会有更多的微分包含理论方面的书籍大量涌现。

许宏文

2010年3月20日

目　录

序　言 …………………………………………………… (Ⅰ)
第 1 章　绪论 ……………………………………………… (1)
1.1　微分包含理论产生的背景………………………… (1)
1.2　微分包含相关理论研究概况 ………………… (7)
1.2.1　初值问题及 Filippov 定理 ……………… (7)
1.2.2　结构稳定性和 Lyanpunov 稳定性 …… (11)
1.2.3　生存理论 ……………………………… (14)
1.2.4　约束微分包含的 Filippov 定理及其应用 ……………………………………… (17)
1.3　微分包含理论的相关应用 ………………… (20)
1.3.1　最优控制及价值函数 ………………… (20)
1.3.2　用神经网络求解优化问题 …………… (22)
1.4　本章小结 …………………………………… (26)
第 2 章　约束微分包含的 Filippov 定理 …………… (27)
2.1　预备知识 …………………………………… (27)
2.2　光滑情况下的 Filippov 定理 ……………… (38)
2.3　非光滑情况下的 Filippov 定理 …………… (47)
2.4　分片连续解的 Filippov 定理 ……………… (59)
2.5　本章小结 …………………………………… (67)
第 3 章　可行轨的存在性及应用…………………… (68)
3.1　预备知识和基本假设 ……………………… (68)

3.2 可行性的存在性 …………………………… (72)
3.3 约束微分包含的 Filippov 定理和松弛原理 …………………………… (80)
3.3.1 无限时间区间上的 Filippov 定理 …… (80)
3.3.2 无限时间区间上的松弛原理 ………… (83)
3.4 约束最优控制的价值函数的连续性 ……… (85)
3.5 本章小结 …………………………… (90)
第 4 章 约束微分包含的离散分析 ………… (92)
4.1 问题与预备知识 …………………………… (92)
4.1.1 问题介绍及相关概念 …………………… (93)
4.1.2 基本假设和预备知识 …………………… (94)
4.2 主要结果 …………………………… (98)
4.2.1 无约束离散系统的 Filippov 定理 …… (99)
4.2.2 约束离散系统的 Filippov 定理 ……… (101)
4.2.3 无约束微分包含的结构稳定性……… (110)
4.3 本章小结…………………………… (112)
第 5 章 基于微分包含的鞍点问题 ……………… (114)
5.1 预备知识…………………………… (115)
5.1.1 局部 Lipschitz 函数与次微分………… (115)
5.1.2 切锥与法锥…………………………… (119)
5.1.3 集值映射与微分包含…………………… (121)
5.2 微分包含模型的建立及解的存在性……… (123)
5.2.1 相关记号…………………………… (123)
5.2.2 微分包含系统的建立…………………… (125)
5.2.3 网络解的存在性和唯一性…………… (127)
5.3 微分包含模型的精确性…………………… (132)
5.4 轨道的收敛性…………………………… (142)
5.5 数值算例…………………………… (151)
5.6 本章小结…………………………… (152)
参考文献 …………………………… (154)

第 1 章 绪论

在20世纪五六十年代，由间断微分方程、隐函数微分方程的研究产生一个新的数学研究对象——微分包含. 它是揭示不连续系统规律的工具，这类系统的数学描述可以写成$x'(t) \in F(t,x)$, 其中$F(t,x)$ 是一个集合，表示在时刻t 和状态x 时速度的允许取值范围. 随着集值分析，非线性分析及非光滑分析等数学分支研究的不断深入，微分包含在近半个多世纪里，无论是在理论上还是在应用中都得到了长足的发展，并成为处理不确定系统的有效工具. 本章，主要介绍微分包含理论产生和发展的科学背景和微分包含理论不段丰富和发展的过程.

1.1 微分包含理论产生的背景

在描述物理、力学、工程、微观经济学等方面的系统模型时，一般都是使用微分方程，但在现实生活和科学实践中，当我们考虑的对象涉及动力系统完全描述的不可能性，或没有控制与系统状态相联系的规则以及可能的动力学系统有多样性时，通常的微分方程这种确定模型就已经不适合描述这些动态系统. 微分包含正是基于对系统过程有一定了解但不完全确定而建立起来的动力系统，它是用于揭示不确定的动力系统和不连续动力系

统的未来规律的工具. 特别的，对经济、管理、控制等不确定系统在各种约束条件下的状态演变，描述系统的动态与约束间的联系，揭示其潜在的调节反馈等问题的研究与带有状态约束的微分包含有着紧密的联系. 微分包含理论大约产生于20世纪五六十年代，当时上面所阐述的理论问题和应用数学领域的研究相继遇到了困难，迫切需要更加有效的理论、方法和工具的出现. 例如，

1. 在讨论常微分方程$x'(t) = f(x(t))$ 时，一般情况总是假定右端是连续函数. 可许多实际问题中的连续性是很难保证的. A.F.Filippov [1,2] 首先研究了这种右端不连续的方程. 在研究中构造集值函数$F(x) = \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{co} f(x+\varepsilon B)$ (这里B 是单位闭球)并得到在适当的条件下微分方程$x'(t) = f(x(t))$ 和微分包含$x'(t) \in F(x(t))$ 具有相同的解. 我们通常称这种转化为带有不连续右端项的微分方程的正则化，也就是把不连续的函数转化为具有一定连续性的集值函数. 这样的微分包含做为微分方程的推广就很自然和适宜. 相应的微分方程$x'(t) = f(t, x(t))$ 可转化成非自治的微分包含

$$x'(t) \in F(t, x(t)) \tag{1-1}$$

2. 隐函数微分方程$f(t, x, x') = 0$ 可以转化为微分包含(1-1)的形式，其中

$$F(t, x) = \{v : f(t, x, v) = 0\}$$

3. 微分不等式$f(t,x,x')\le 0$可以转化为微分包含(1-1) 的形式，其中

$$F(t,x)=\{v: f(t,x,v)\le 0\}$$

4. 微分包含和描述控制系统的微分方程之间的联系由经典的关于隐函数的FIlippov引理[3] 建立起来的，这种联系的本质如下：

考查一般的控制系统

$$x'(t)=f(t,x(t),u(t)) \tag{1-2}$$

其中$u(t)\in U$ 是控制参数. 引入集值映射$F(t,x)=f(t,x(t),U)$，则我们可以利用微分包含(1-1) 来研究控制系统(1-2)的可接受状态-控制对的存在性问题. 在适当的假设下，如果我们给定一个可测函数$u(t)$, 相应地，我们可以获得控制系统的一个状态轨道$x(t)$，即微分方程(1-1)的解. 显然，这个轨道是由控制系统派生出来的微分包含(1-1)的解. 相反地，如果$x(t)$ 是由控制系统(1-2)所派生出来的微分包含(1-1)的解，则根据Filippov引理[3]我们可以找到一个可测函数$u(t)$ 使方程(1-2)成立. 换句话说，由控制系统所派生出来的微分包含的解是相应与该控制系统的某个状态轨道. 这个解也满足微分包含$x'(t)\in F(t,x(t))$. 基于微分包含与控制系统的这种关系，对于工程上遇到的较为复杂的控制系统是可以通过微分包含来进行研究的.

5. 优化问题广泛出现在科学和工程应用的许多领域，而且，许多实际工程应用问题都要求对优化问题实时求解. 解决实时优化问题的一个非常有效的方法是应用人工神经网络. 而对于连续可微凸优化问题，动态反馈神经网络模型是利用梯度的概念构造的. 而在实际工程应用中，一般目标函数的可微性，或对于约束优化问题的约束函数的可微性，或目标函数的凸性很难被满足，这说明基于梯度的方法已经不能严格用来解决这类问题. 这时利用罚函数的办法，所构造的能量函数一般就没有了光滑性. 这使得应用神经网络求解优化问题进入了一个困难的阶段. 幸运的是，在1975年，Clarke[4]在Lipschitz函数类中推广了凸函数的次微分和广义导数的概念，进而对于非光滑或非凸的优化问题可以建立微分包含网络模型来求解. 例如下面非光滑非凸的约束优化问题：

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \phi(x) \\ \text{约束条件为} & x \in \mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \le 0\} \end{array} \tag{1-3}$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 和$V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是局部Lipschitz函数，$\mathcal{S}$ 是一个非空紧集. 问题的优化解集合$\mathcal{M}$是非空的，而且包含于ϕ 在$\mathcal{S}$ 中的临界点集$\mathcal{C}$ 中. 在[5]中作者们考虑用下面这个微分包含来求解此优化问题

$$x'(t) \in \psi_\sigma(x) \qquad \text{对 } t \ge 0 \text{ 几乎处处成立} \tag{1-4}$$

其中$\psi_\sigma(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$依赖于一个参数$\sigma > 0$，且定义如下：

$$\psi_\sigma(x)=\begin{cases}-\partial\phi(x)-\sigma\partial V(x) & x\in\mathbb{R}^n\backslash\mathcal{S}\\ -\partial\phi(x) & x\in int(\mathcal{S})\\ -\partial\phi(x)-[0,\sigma]\partial V(x) & x\in bd(\mathcal{S})\end{cases} \tag{1-5}$$

这里$bd(\mathcal{S})$表示集合$\mathcal{S}$的边界. 在适当的条件下得到了约束域的不变性和临界点集的可达性.

6. 在非光滑Hamilton系统，非光滑最优控制[4, 6–9]中，引入微分包含也是非常自然和必要的. 例如经典的Hamilton-Jacobi-Bellman方程（HJB方程):

$$-p'(t)=\nabla_x H(x(t),p(t)),\ -x'(t)=\nabla_p H(x(t),p(t))$$

是描述力学系统的重要的工具之一，其中H 是Hamilton函数. 但上面的这种表达只有在函数H 光滑的情况下才成立. 而描述实际系统，尤其在实际的控制问题中光滑性很难被满足. 但Clarke在Lipschitz 函数类中推广了凸函数的次微分和广义导数的概念后，对于非光滑Hamilton 系统可以利用该广义梯度推广为如下的形式:

$$\begin{bmatrix}-p'(t)\\ x'(t)\end{bmatrix}\in\partial H(x(t),p(t)) \tag{1-6}$$

这里$\partial H(x(t),p(t))$ 是函数$H(x(t),p(t))$ 的广义梯度. 这一推广极为重要. 于是HBJ方程这类推广就归结为形如(1-6)的微分包含，它们都是微分包含(1-1)的特例.

此外微分包含还广泛应用与数理经济[4, 6–9]等领域. 恰恰是这些理论和实际问题研究和解决的需要促使微分

包含理论蓬勃发展.

一般地，微分包含理论处理的典型问题有以下几个方面:

1. 各种定解条件下解的存在性问题;

2. 解集的拓扑结构问题;

3. 松弛定理;

4. 解的性质及定性理论，例如稳定性，渐进性，振动性等等;

5. 生存理论;

6. 离散分析，数值计算等其他理论;

7. 在其它数学分支中的应用问题，例如非光滑的优化问题，最优控制理论等. 不过这些方面也不是孤立的，而是互相联系和相互影响的.

随着最优控制理论及优化理论的发展，很多实际上带有约束的控制问题，优化问题都能相应的转化为带有状态约束的微分包含系统来解决，所以一直以来带有状态约束的微分包含系统的研究都受到人们的广泛关注. 目前，微分包含作为一般微分方程理论的一个独立的分支已经形成，并且有着广泛的应用. 在微分包含理论中，一般的微分方程所讨论的问题仍占有传统的地位. 此外微分包含理论在研究具有不连续右端项的微分方程，非光滑的优化，具有不唯一值的非线性控制系统，经济动力系统等许多领域发挥着越来越重要的作用.

尽管微分包含和微分方程类似，研究的对象都是各

种动态系统的性质，但两者又有很大的不同. 由于微分包含系统的右端项是集值映射，所以除通常的研究方程用到的基本工具外，研究微分包含还需要大量的来自泛函分析、集值分析、非光滑分析的概念理论、方法和技巧.

下面就我们所关心的微分包含理论及在有约束的最优控制问题及求解最优化问题中的应用的几个方面简单介绍一下发展的概况.

1.2 微分包含相关理论研究概况

1.2.1 初值问题及Filippov定理

微分包含的初值问题解的存在性是微分包含的最早的研究对象之一. 研究微分包含初值问题的方法主要有不动点的方法[10], 选择的方法[11, 12], 构造近似解序列的方法[1], 拓扑度理论[13] 及Baire 纲定理的方法[14] 以及ε 轨逼近的办法[15] 等. 20世纪80年代以来，有大量的文献讨论了微分包含的初值问题，在这个过程中学者们同时也证明一些集值映射选择的存在性和不动点的若干结果，这样对于集值映射性质的研究日臻完善. 这些都为日后讨论更为复杂的微分包含系统及以微分包含理论为工具的很多实际应用问题的解决提供了必要的基础. 1978年，V. I. Blagodatskih[16]出版专著总结了20世纪80年代前此领域的研究成果，J. P. Aubin 和A. Cellina 在专著[17]中总结了有限维空间中微分包含的研究结果，苏联学者A. A.

Tolstonogov[18] 系统地讨论了Banach空间中微分包含的解的存在性、解集结构和松弛定理，代表了20世纪90年代前该领域的研究水平.

这一小节我们主要介绍微分包含初值问题的Filippov型存在定理的研究现状. 这里所谈到的Filippv定理指的是对于微分包含的初值问题，在预先给定一个满足一定条件的函数后，在适当的条件下建立该微分包含的一个解，同时给出预先给定的函数与所确定的解之间的数量关系. 恰恰是因为在确定解的存在性的同时给出了给定的函数与解之间的估计，使得Filippov定理成为了微分包含相关问题研究的理论基础和定量研究的理论依据，被广泛应用于松弛原理、离散分析、可达集的性质、最优控制问题中价值函数的性质等问题的研究中.

经典的Filippov定理，有时称为Gronwall-Filippov-Wazewski 定理，由Filippov [2] 在考虑非凸值微分包含时通过构造渐进解序列的办法建立的. 这类结果因此而得名. 在[2]中A. F. Filippov 研究了如下的微分包含初值问题：

$$\begin{cases} x'(t) \in F(t, x(t)) \\ x(0) = \xi_0 \end{cases} \tag{1-7}$$

在集值映射$F(\cdot,\cdot)$ 为Hausdorff 连续取非空闭值，$F(t,\cdot)$为Lipchitz连续的条件下由给定的绝对连续函数基于可测选择的存在性通过构造绝对连续函数序

列的方法建立了问题(1-7)的解的存在性，同时给出了已知函数和所得到的解之间的估计和已知函数的导数与解的导数之间的估计.特别的，当预先给定的函数也为初值问题的解时，Filippov定理实质上给出了解对初始值的连续依赖性. 随后，这一结果得到了广泛的应用. P. R. Wolenski[19] 依赖Filippov定理给出微分包含可达集的唯一性定理，随后P. R. Wolenski在[20]中研究了自治的微分包含的初值问题：

$$\begin{cases} x'(t) \in F(x(t)) \\ x(0) = \xi_0 \end{cases} \tag{1-8}$$

的连续可微解的Filippov定理，并应用这一结果给出了问题(1-8)及非自治微分包含初值问题(1-7)的可达集的指数公式. T. Lorenz[21]应用非自治微分包含的连续可微解的Filippov定理[22] 给出了微分包含可达集的epi-Lipschitz性.

继Filippov之后，A. Plis[10]降低对F连续性的要求，在$F(\cdot, x)$ 可测，$F(t, \cdot)$ 为Kamke型连续的条件下建立了微分包含初值问题(1-7) 的Filippov定理. V. M. Veliov[23]把Filippov定理推广为更一般的形式，在$\mathbb{R}^n$ 空间中考虑问题(1-7), 在集值映射满足取紧凸值，具有可测性，Lipschitz连续性，强单调性的条件下通过构造具有一定几何、拓扑、和正则性的微分包含，利用上半连续的微分包含初值问题的解的存在性定理建立了Filippov定理. 同时作者把这一结果应用于一类微分包含的扰动

分析和解集的下半连续性的研究中. T. Donchev 和E. Farkhi[24] 也应用构造微分包含的办法，在集值映射为单边Lipschitz和上半连续并满足线性增长型条件下，建立了初值问题(1-7)的Filippov定理. 由于要使用上半连续微分包含的解的存在性定理，所以还要求集值映射为紧凸值的. 但遗憾的是在这篇文章中只得到了已知函数和解之间的估计，并没有得到导数之间的估计. 同时作者应用这一结果进行了微分包含的离散分析，即给出了问题(1-7)与其相应的欧拉离散模型的可达集之间的一个比较.

最近，A. Ioffe[25] 利用构造绝对连续函数序列的办法应用集值映射的闭性给出了无界Lipschitz连续的微分包含的Filippov定理，这里的绝对连续函数序列的收敛性是应用一个不等式递推系统的收敛性得到的，作者应用这个结果建立了闭包型松弛原理. B. Ingalls等人在[26]中应用由R.M. Colombo等人在[27] 建立的Lipschitz微分包含的解映射的连续选择建立了问题(1-7)的Filippov型存在定理. R. Baier等人在[28]中建立了右端项集值映射为Lipchitz连续的微分包含(1-1) 的离散欧拉模型的Filippov定理，并把这一结果用在了有约束微分包含的离散分析中. 以上的这些结果都是在有限维空间中的. 在无限维空间这方面的结果还很少. H. Frankowska[29]，A. Cernea[30]在可分的Banach空间中分别建立了半线性发展包含和非凸的发展包