



21世纪高等教育规划教材

大学物理学

(下册)

主编◎朱艳英 范力茹 周彦

DAXUE WULIXUE



北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

大学物理学

下 册

主 编 朱艳英 范力茹 周 彦
副主编 张素红 王明利 韩振丽 李子敬 王晓颖

 **北京理工大学出版社**
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

第三篇

电 磁 学

电磁学是物理学的一个重要组成部分，它是经典物理学中研究电现象、磁现象、电磁相互作用及其规律的学科。学习电磁场的方法，应从实验事实出发，总结实验规律，掌握有关的定理、定律及其简单的应用。由于静电场和稳恒电流的磁场在知识结构上和描述方法上，以及结论的数学形式上都有极大的相似性和对称性，可把它们类比起来进行学习，这样十分有助于理解有关概念，掌握有关内容，但必须注意它们之间的区别及联系。由于电磁场是三维空间连续分布的矢量场，因此，在电磁学中所遇到的物理量、物理规律以及研究方法与力学、热学有着不同的特点，比较复杂，用矢量分析和微积分等工具来定量描述电磁场的分布、性质和规律是十分重要的方法，在今后的学习中应认真领会。

静 电 场

电场是电荷或变化磁场在周围空间中激发的一种特殊形态的物质。相对于观察者静止的电荷所激发的电场称为静电场，本章介绍静电场的描述方法和基本规律。首先介绍真空中点电荷间的相互作用规律——库仑定律和力的叠加原理，然后由电场对电荷的作用力及电场力做功两个角度分别引入描述电场性质的物理量——电场强度和电势，同时推导出反映静电场性质的两条基本定理——静电场的高斯定理和环路定理。在此基础上，研究静电场与导体和电介质的相互作用，最后讨论静电场的能量。

第一节 库仑定律

电磁学理论的形成是从静电研究开始的。早在 1650 年，德国马德堡的工程师格里凯就发明了产生电荷的装置——摩擦起电机。1733 年，法国物理学家杜菲发明了金属箔验电器，用它对不同材料经摩擦后产生的电做实验，发现可以将电荷分成树脂型（即负电）和玻璃型（即正电）两种，并总结出了静电相互作用的基本特性，同性相斥，异性相吸。1746 年，莱顿大学的马森布罗克发明了收集电荷的莱顿瓶。美国的物理学家富兰克林在 1747 年至 1755 年做了大量的实验，指出了闪电的本质，统一了天电和地电。富兰克林还发现了正电和负电，并提出了著名的电荷守恒定律：在任一封闭系统中，电荷的总量是不变的，它只能被重新分配而不能被创造。在 1909 年至 1913 年，美国物理学家密立根进行了一系列用油滴测量电子电荷的实验，得出结论，电荷总是以一个基本单元的整数倍出现，即

$$q = ne(n = 1, 2, 3, \dots)$$

这一结论称为电荷的量子化。基本单元 e 就是电子所带电量。密立根测量的结果为 $e = 1.59 \times 10^{-19} \text{ C}$ （库仑）与现代测量值 $e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$ 非常接近。

在 18 世纪中叶，人们开始定量地研究电荷之间的作用力。1766 年，普列斯特利根据一系列的实验结果推测，电的吸引与万有引力遵从相同的定律，即按距离的反平方而变化。但他没有作进一步的研究，也没有对电的斥力作出猜测。要得出电力作用规律的科学结论，还需要从实验上去验证。其中卓有成就的是英国物理学家卡文迪许和法国物理

学家库仑。

* 一、卡文迪许的论证

1773 年,卡文迪许曾做过一个实验,将两个金属半球壳盖在一个金属球上,如图 10-1 所示。内球直径 12.1 in(31 cm),外球直径 13.3 in(34 cm),厚 $1/20$ in(0.127 cm)。先用一根导线将莱顿瓶接到外球,使外球带电,内外球间也有导线相连,外球壳带电后即拆去连线。然后打开外球壳,用木髓球验电器试验内球是否带电。结果发现,验电器没有指示,证明内球没有带电,电荷完全分布在外球壳上。

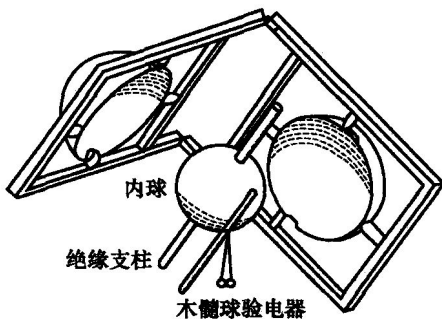


图 10-1 卡文迪许的实验装置

卡文迪许将这个实验重复了多次,确定电力服从平方反比定律,指数偏差不超过 0.02。

这是一个十分精确的实验,设计思想相当巧妙。然而,卡文迪许用的却是极其简陋而原始的实验仪器,他成功的关键在于,以牛顿的力学原理为借鉴,通过数学分析,将直接测量变为间接测量,用示零法来判断结果,这就充分发挥了人的主观能动性。但是,卡文迪许的工作没有及时发表,他的实验比库仑还早十几年。直到 1879 年,一百年过去了,他的手稿由麦克斯韦整理发表,这件事才为人所知。

* 二、库仑扭秤实验

1785 年,法国物理学家库仑设计制作了一台精密的扭秤,进行了测定电力的实验,如图 10-2 所示。

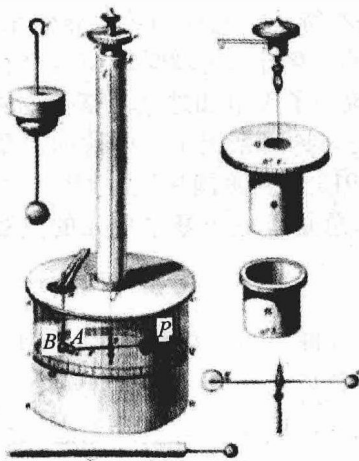


图 10-2 库仑的扭秤实验

这是一个直径和高均为 30 cm 的玻璃缸,上面盖一块玻璃板,盖板上开了两个洞。中间的洞装有一支高 60 cm 的玻璃管,管的顶端有一个螺旋测角器,下连银质悬丝,悬丝下端挂一个横杆,杆的一端为一个小球 A,另一端贴一个纸片 P 作配平用, A 的旁边还有一个固定小球 B。圆缸顶上刻有 320 个分格,可以读数。实验时使 A、B 带同性电荷,由于 A 受到 B 的斥力横杆发生偏转,转动悬丝上端的旋钮,使横杆回到原来位置,这时悬丝的扭力矩等于 B 施于 A 上的电力的力矩。悬丝的扭力矩与扭转角度之间的关系已事先校准、标定,则由旋钮上指针转过的角度读数和已知的横杆长度,可以得知在此距离下 A、B 之间的电力,保持 A 与 B 上的电量不变,改变 A 与 B 之间的距离 r ,从实验结果中,库仑得出

电力与距离的平方成反比, 即 $F \propto 1/r^2$ 。

为了找到电力与电量的关系, 库仑使用了一个巧妙的方法。他从对称性的考虑断定, 另一个带电金属球与一个半径、材料完全相同的另一个不带电的金属球接触后再分开, 每个球的带电量应是原带电球电量的一半, 他用这个方法证实了电力与电量成正比的关系, 从而完整地得出了

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

这就是库仑定律的数学表达式。它可以表述如下, 真空中两个静止点电荷之间的作用力(斥力或引力), 与这两个电荷所带电量的乘积成正比, 与它们之间距离的平方成反比, 作用力的方向沿着这两个点电荷的连线。

从实际带电体中抽象出来的“点电荷”是一种理想模型。当两个带电体本身的线度 d 较之它们间的距离 r 小得多时, 即 $d \ll r$ 时, 在所讨论的问题里完全可以忽略掉带电体的形状和大小, 带电体可视为点电荷。点电荷这一概念只具有相对的意义, 它本身可以不是一个很小的带电体。如果两个带电体满足能看作点电荷的条件, 那么两个带电体之间的电力只决定于各个带电体所带的电荷量和它们之间的距离。

库仑定律也可用矢量表示。如图 10-3 所示, 若两点电荷的电量分别为 q_1 和 q_2 , 由 q_1 指向 q_2 的位置矢量用 $\mathbf{r}_{21}$ 表示。那么, q_2 所受 q_1 的作用力 $\mathbf{F}_{21}$ 为

$$\mathbf{F}_{21} = k \frac{q_1 q_2}{r_{21}^2} \mathbf{r}_{21}^0 = -\mathbf{F}_{12}$$

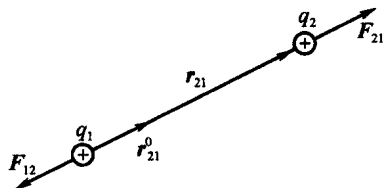


图 10-3 库仑定律

q_1 受到的 q_2 的作用力 $\mathbf{F}_{12}$ 与 q_2 所受 q_1 的作用力 $\mathbf{F}_{21}$ 大小相等, 方向相反, 且在同一条直线上。式中 $\mathbf{r}_{21}^0$ 为 $\mathbf{r}_{21}$ 的单位矢量, k 为比例系数。为使由库仑定律导出的其他常用公式形式简单, 这里把 k 有理化, 即 $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$ 。 ϵ_0 称为真空电容率, 也称为真空介电常量, 其值为

$$\epsilon_0 \approx 8.854 \times 10^{-12} \text{C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)$$

库仑定律的数学表达式常写为

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \mathbf{r}^0 \quad (10-1)$$

式中, $\mathbf{r}^0$ 为由施力电荷指向受力电荷的单位矢量; r 为两点电荷之间的距离。

三、叠加原理

实验证明, 当点电荷 q 受 n 个点电荷 q_1 、 q_2 、 $\dots$ 、 q_n 共同作用时, 它所受到的静电力, 等于各点电荷单独存在时作用于它的静电力的叠加, 即

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \cdots + \boldsymbol{F}_n = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{F}_i \quad (10-2)$$

这一结论叫做静电力的叠加原理。按照这个原理,也可计算两个连续带电体之间的静电力,具体做法是先将带电体划分为许多可看成是点电荷的电荷元,利用式(10-1)求出每一对电荷元间的作用力,然后借助静电力的叠加原理,得到两个连续带电体之间的静电力。对于静电学的问题,一般来说都可以根据库仑定律和静电力的叠加原理来处理。

[例 10-1] 在氢原子的玻尔模型中,电子与质子之间的平均距离为 $r = 5.3 \times 10^{-11} \text{ m}$, 试分别估算静电力和万有引力。

解: 电子的电荷是 $-e$, 质子的电荷是 $+e$, 取 $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$, 电子的质量 $m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$, 质子的质量 $m_p = 1.7 \times 10^{-27} \text{ kg}$, 由库仑定律,求得两粒子间的静电力的大小为

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = 9.0 \times 10^9 \cdot \frac{(1.6 \times 10^{-19})^2}{(5.3 \times 10^{-11})^2} = 8.1 \times 10^{-8} \text{ (N)}$$

由万有引力定律,求得两粒子间的万有引力大小为

$$F_g = G \frac{m_e m_p}{r^2} = 6.07 \times 10^{-11} \cdot \frac{9.1 \times 10^{-31} \times 1.7 \times 10^{-27}}{(5.3 \times 10^{-11})^2} = 3.7 \times 10^{-47} \text{ (N)}$$

所以在这一系统中,两者之比 $F_e/F_g \approx 10^{39}$ 。可见在原子内,电子与质子之间的静电力远大于万有引力,处理电子与质子间的相互作用时,万有引力可忽略不计,只需考虑静电力。

第二节 电场和电场强度

* 一、超距作用与近距作用之争

从上节的讨论可以知道,在真空中,两个相隔一段距离的电荷间存在相互作用力,那么电荷之间的作用力是如何传递的呢?关于这个问题,历史上曾有过长期的争论。一种是超距作用的观点,持这种观点的人认为静电力不需要任何媒介,也不需要传递时间就能从一个带电体作用到相隔一定距离的另一个带电体上。另一种观点认为静电力也是近距作用的,19世纪普遍流行的观点认为静电力是通过一种充满空间的弹性介质——“以太”来传递的。

近代物理学的知识表明,“超距作用”的观点是错误的,“以太”这种介质也是不存在的。实验表明,任何带电体周围空间都存在着一种特殊的物质,这种物质称为电场。电场的特性之一是对位于场中的电荷有力的作用。电荷与电荷之间的相互作用就是通过电场发生的。当电荷 q_1 位于另一电荷 q_2 的附近,即处于 q_2 的电场中时, q_1 所受到的作用力就是通过 q_2 的电场施加给它的。同样, q_2 也处于 q_1 的电场中, q_2 所受到的作用力,是通过 q_1 的电场

施加给它的。

当电荷发生变化时（包括电量的变化或电荷的运动等），其周围的电场也随之变化。这个变化的电场是以光速在空间传播的，电荷之间的相互作用也是以光速传递的。由于光速极快，因此，在通常情况下，电场力传递所需的时间极短，是很难察觉的。但是，随着科学技术的发展，人们已有足够的手段来证明电场力的传递是需要时间的。在后面将会讲到，运动电荷周围，除了有电场之外，还有磁场，变化的电场会产生磁场，变化的磁场也会产生电场，变化的电场和磁场构成了统一的电磁场。实验证明，电磁场可以脱离电荷和电流而单独存在，它具有自己的运动规律，和实物一样电磁场也具有能量、动量等物质的属性。电场、磁场和统一的电磁场是客观存在的一种物质，是不同于由分子、原子组成的实物的另一种形式的物质。本章讨论静止电荷周围存在的静电场。

电场不像实物一样看得见、摸得着，要认识它需要从其对电荷的作用出发。放在电场中的电荷要受到电场的作用力；电荷在电场中运动时，电场力要对电荷作功。因此可以从力和能量的角度来研究电场的性质和规律，并相应地引入描述电场的电场强度和电势两个重要的物理量。

下面从力的角度出发引入描述电场的物理量电场强度。

二、电场强度的定义

设空间中存在着一个带电体，它将在周围的空间激发电场。如图 10-4 所示，在电场中引入一个电荷 q_0 ，通过研究 q_0 在空间中不同点的受力情况来研究电场的性质，这个被用来作为探测工具的电荷 q_0 称为试验电荷。为了保证测量的准确性，电荷量必须足够小，以致它的引进几乎不会影响原来电场在空间的分布；同时要求试验电荷的几何线度必须充分小，以保证能反映出空间任意一点电场的性质。

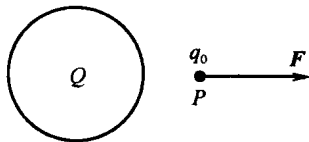


图 10-4 电场强度

实验表明，在电场中不同点，试验电荷所受电场力的大小和方向一般不同，这说明带电体周围不同点，电场的性质一般不相同。而对于电场中任意一确定点，将正的试验电荷 q_0 放入，它受到的电场力将和它的电量 q_0 成正比。如果把试验电荷的电量增大 n 倍（但仍满足试验电荷的条件），电场力也将增大 n 倍，而力的方向不变。如果把试验电荷换成等量异号的负电荷，力的大小不变，而方向相反。可见，电场力的大小和方向不仅与试验电荷所在处的电场有关，而且与试验电荷本身电量的大小、正负有关。然而，对给定电场中的确定点来说，试验电荷所受到的作用力 F 与试验电荷电量 q_0 的比值是一个确定的矢量，这个矢量只和给定电场中各确定点的位置有关，而与试验电荷的大小、正负无关。因此，这个矢量反映了各确定点电场本身的性质。通常把这个矢量定义为电场中各确定点的电场强度（简称场强），用 E 表示，即

$$E = \frac{F}{q_0} \quad (10-3)$$

由式(10-3)可知,电场中某点电场强度 E 的大小等于单位电荷在该点受力的大小,其方向与正电荷在该点受力方向相同。

在国际单位制中,电场强度的单位为牛顿每库仑,符号为 N/C。

三、电场强度叠加原理

若电场是由 n 个点电荷 $q_1, q_2, \dots, q_n$ 共同激发的,根据电场力的叠加原理,试验电荷 q_0 所受到的电场力,等于各个点电荷单独存在时对 q_0 作用的电场力的矢量和,即

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$$

则有

$$\frac{\mathbf{F}}{q_0} = \frac{\mathbf{F}_1}{q_0} + \frac{\mathbf{F}_2}{q_0} + \dots + \frac{\mathbf{F}_n}{q_0} = \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{F}_i}{q_0}$$

由电场强度的定义式(10-3)知,等号左边为场点的总场强,右边各项分别为各点电荷单独存在时在场点激发的场强。即

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots + \mathbf{E}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i \quad (10-4)$$

式(10-4)称为电场强度的叠加原理,它表明点电荷系在空间任一点激发的总场强,等于各个点电荷单独存在时在该点激发的场强的矢量和。利用这一原理,可以计算任意带电体所产生的场强。

四、电场强度的计算

用电场强度描述电场,需指出空间场点处电场强度的大小和方向。若电场是由一个放在真空中的点电荷 q 产生的,由库仑定律和电场强度的定义,可以直接求出其周围电场的电场强度。

任取与 q 相距为 r 的点 P ,设想把一个试验电荷 q_0 放在 P 点,由库仑定律可知 q_0 受力为

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2} \mathbf{r}^0$$

式中, $\mathbf{r}$ 为由 q 指向 P 的位置矢量; $\mathbf{r}^0$ 是 $\mathbf{r}$ 的单位矢量。根据电场强度的定义式(10-3), P 点的电场强度为

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{r}^0 \quad (10-5)$$

式(10-5)即为点电荷的电场强度表示式。当 $q > 0$ 时, E 与 r^0 同向, $q < 0$ 时, E 与 r^0 反向。从式(10-5)中还可以看出,在真空中若以点电荷 q 为球心,以 r 为半径作一球面,球面上各处 E 的大小相等, E 的方向均沿径矢 r^0 ,具有球对称性,如图10-5所示。

有了点电荷产生的电场强度分布公式,结合电场强度叠加原理,很容易就可以求出点电荷系产生的场强。设 P 点相对于各点电荷的位矢分别为 r_1 、 r_2 、 $\cdots$ 、 r_n ,则各点电荷单独在 P 点产生的电场强度分别为

$$E_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} r_i^0 \quad (i = 1, 2, 3, \cdots, n)$$

所以,点电荷系在 P 点产生的总电场强度为

$$E = \sum_{i=1}^n E_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} r_i^0 \quad (10-6)$$

若电场是由电荷连续分布的带电体产生的,可以把带电体看成许多极小的连续分布的电荷元的集合,如图10-6所示,每个电荷元 dq 都可视为点电荷,而电荷元 dq 在 P 点激发的电场强度为

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} r^0 \quad (10-7)$$

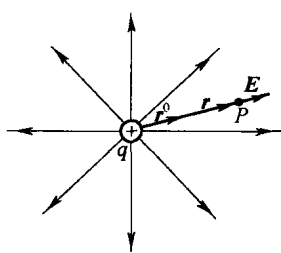


图 10-5 点电荷产生的电场

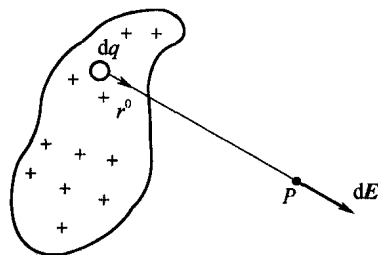
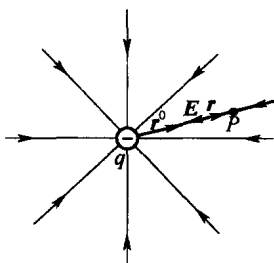


图 10-6 连续带电体场强计算

整个带电体在 P 点产生的电场强度,等于所有电荷元在 P 点产生的电场强度的矢量和。由于电荷是连续分布的,可将式(10-6)的求和符号换成积分,即求得 P 点的场强为

$$E = \int dE = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} r^0 \quad (10-8)$$

积分遍及整个带电体。

一般情况下,带电体上电荷的分布是不均匀的,为表示电荷在任意一点附近的分布情况,需引入电荷密度的概念。然后根据带电体上电荷是体分布、面分布或线分布等不同情况,相应地场强的计算可具体表示为

$$\begin{cases} E = \int_v \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho dV}{r^2} \mathbf{r}^0 \\ E = \int_s \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma dS}{r^2} \mathbf{r}^0 \\ E = \int_l \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{r^2} \mathbf{r}^0 \end{cases} \quad (10-9)$$

式中, ρ 为电荷按体积分布的密度, $\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV}$; σ 为电荷按面积分布的密度, $\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS}$; λ 为电荷按线长度分布的密度, $\lambda = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl}$ 。

上式的积分为矢量积分。实际上在具体运算时, 把 dE 在 x 、 y 和 z 三个坐标轴上的分量式写出, 然后再积分。

【例 10-2】求电偶极子延长线上一点 P 和中垂线上任一点 P' 的电场强度。

解: 对等量异号点电荷, 其距离 l 远小于所讨论的场点到它们的距离时, 此电荷系统称电偶极子。如图 10-7 所示用 l 表示负电荷到正电荷的矢量线段, 定义 $p = ql$ 为电偶极矩 (简称电矩), 它是表示电偶极子性质的物理量。电偶极子是一个重要的物理模型, 在研究电介质极化、电磁场的发射等问题中都要用到。

首先计算点 P 处的场强。如图 10-7 (a) 所示, $+q$ 和 $-q$ 在 P 点产生的场强大小分别为

$$E_+ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2} \quad (\text{方向向右})$$

$$E_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2} \quad (\text{方向向左})$$

因此, 总场强的大小为

$$\begin{aligned} E &= E_+ - E_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2} \right] \\ &= \frac{q \left(r + \frac{l}{2}\right)^2 - q \left(r - \frac{l}{2}\right)^2}{4\pi\epsilon_0 \left(r - \frac{l}{2}\right)^2 \left(r + \frac{l}{2}\right)^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2rl}{\left(r^2 - \frac{l^2}{4}\right)^2} \quad (\text{方向向右}) \end{aligned}$$

考虑到 $r \gg l$ 及 $p = ql$, 上述结果可写为 $E \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3}$ 。

再计算点 P' 的场强。选取如图 10-7 (b) 所示的坐标系, 由于 $+q$ 和 $-q$ 到点 P' 的距离都是 $(r^2 + l^2/4)^{1/2}$, 所以 E_+ 和 E_- 的大小相等, 即

$$E_+ = E_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2 + \frac{l^2}{4}}$$

如图 10-7 所示, E_+ 和 E_- 的方向不同。

由对称性可知, E_+ 和 E_- 的 x 分矢量大小相等, 方向一致; y 分矢量大小相等, 方向相反, 故有

$$E_x = 2E_+ \cos\theta$$

$$E_y = 0$$

由图 10-7 可知

$$\cos\theta = \frac{\frac{l}{2}}{\sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4}}}$$

故总场强的大小为

$$E = |E_x| = 2E_+ \cos\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql}{\left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{3/2}}$$

E 沿 x 轴正方向。此结果可简化为

$$E \approx -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3}$$

[例 10-3] 设真空中有一均匀带电棒, 长为 l , 总电量为 q , 求带电棒中垂线上一点的场强。

解: 取如图 10-8 所示的坐标系, 在细棒上任取电荷元 dq , $dq = \lambda dx$, $\lambda = q/l$ 为电荷线密度, dq 在场点 P 产生的场强 dE 大小为

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{r^2}$$

dE 的方向如图 10-8 所示, 由电荷分布对 Oy 轴的对称性可知 $E_x = \int dE_x = 0$ 。

故

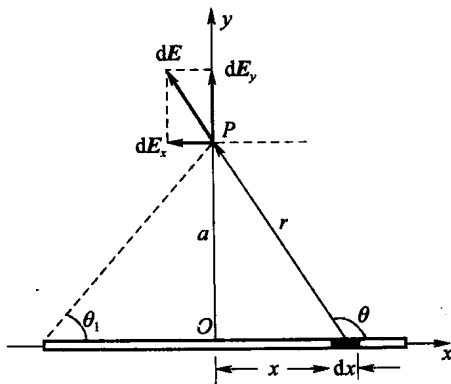


图 10-8 均匀带电细棒的电场 例 10-3 图

$$E = E_y = \int dE_y$$

又

$$dE_y = dE \sin \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{r^2} \sin \theta$$

统一变量, 有

$$r = \frac{a}{\sin \theta}, \quad \cot \theta = -\frac{x}{a}, \quad dx = \frac{a d\theta}{\sin^2 \theta}$$

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda a d\theta \sin \theta}{\sin^2 \theta} / \left(\frac{a}{\sin \theta} \right)^2 = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin \theta}{a} d\theta$$

则

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \int_{\theta_1}^{\pi-\theta_1} \sin \theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} (-\cos \theta) \Big|_{\theta_1}^{\pi-\theta_1} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a} \cos \theta_1$$

所以

$$E = E_y = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a} \frac{l/2}{\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + a^2}} = \frac{\lambda l}{2\pi\epsilon_0 a \sqrt{l^2 + 4a^2}}$$

E 的方向沿 y 轴正方向。

若这一均匀带电棒为“无限长”, 即 $\theta_1 = 0$, 那么

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a} \quad (10-10)$$

【例 10-4】电量 q 均匀地分布在一个半径为 R 的圆环上 (如图 10-9 所示)。求圆环轴线上任意一点 P 的场强。

解: 选取如图 10-9 所示的坐标系, 在圆环上选取线元 dl , 线元 dl 上所带电量为 $dq =$

$\frac{q}{2\pi R} dl$, 则该电荷元在 P 点产生的场强大小为

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2\pi R} \frac{dl}{r^2}$$

dE 的方向如图 10-9 所示。

P 点的场强为圆环上全部电荷元在 P 点场强的叠加。考虑到圆环上电荷分布的轴对称性, 将 dE 分解为沿轴线的分量 $dE_{//}$ 和垂直于轴线的分量 $dE_{\perp}$, 各 $dE_{\perp}$ 的叠加结果为零, 即 $E_{\perp} = 0$ 。因此

$$E = E_{//} = \int dE_{//} = \int dE \cos \theta$$

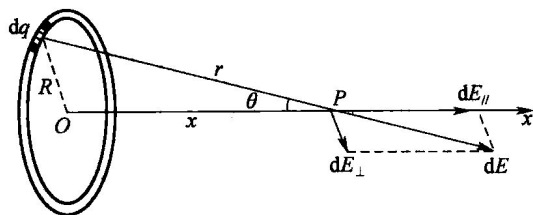


图 10-9 均匀带电圆环 例 10-4 图

而 $\cos\theta = x/r$, $r^2 = R^2 + x^2$, 于是有

$$E = \int_0^{2\pi R} dE \cos\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx}{2\pi R(R^2 + x^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

若 q 为正电荷, E 的方向沿 x 轴正方向; 若 q 为负电荷, E 的方向沿 x 轴负方向。 $x=0$ 时 $E=0$ 。

【例 10-5】一均匀带电圆盘, 半径为 R , 电荷面密度为 σ (设 $\sigma > 0$), 如图 10-10 所示。求圆盘平面轴线上距盘心 O 为 x 处的场强。

解: 将均匀带电的圆盘看成由许多以 O 为圆心的细圆环组成, P 点的场强为每个细圆环在该点场强叠加的结果。选取如图 10-10 所示的坐标系。在带电圆盘平面上取半径为 r 、宽度为 dr 的细圆环, 则此圆环的带电量为 $dq = \sigma \cdot 2\pi r dr$, 利用例 10-4 的结果, 该细圆环在 P 点所产生的场强 dE 的大小为

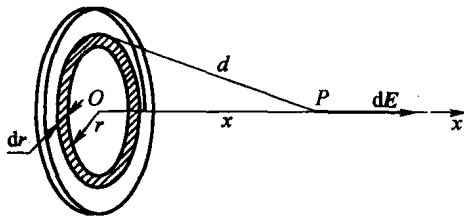


图 10-10 均匀带电的圆盘 例 10-5 图

$$dE = \frac{\sigma x \cdot 2\pi r dr}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + x^2)^{3/2}}$$

方向沿 x 轴正向, 整个带电圆盘在 P 点产生的场强大小为

$$E = \int dE = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{x}{(R^2 + x^2)^{1/2}} \right]$$

其方向也是沿 x 轴正向的。

可得出以下结论:

(1) 当 $x \ll R$ 时, $E = \sigma/2\epsilon_0$ 。此时, 相对于这样的场点, 带电圆盘可视为无限大带电平面。

(2) 当 $x \gg R$ 时, $E = \frac{\pi R^2 \sigma}{4\pi\epsilon_0 x^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2}$, 即在远离带电圆盘处的电场相当于一个点电荷的电场。

在以上例题中, 都是依据电场的叠加原理, 以点电荷或某些带电体产生的电场为基础, 求出带电体系的电场分布的, 这种方法通常称为场强叠加法。这是计算电场强度的一种常用方法。

第三节 高斯定理

一、电场线

前面讲述了根据给定的电荷分布, 怎样用计算方法确定电场中各点的电场强度分布。为

了能够形象直观地描述场强在空间的分布情形,这里引入电场线的概念。

电场线是按下述规定画出的一簇假想曲线:线上每一点的切线方向都与该点场强 E 的方向一致,如图 10-11 所示。为了能从电场线的分布直观地看出电场中各点电场强度的大小,规定在电场中任意一点处,在垂直于电场强度的方向上,想象取一极小的面积元 dS ,穿过该小面积的电场线

条数 dN 满足 $E = \frac{dN}{dS}$ 的关系, E 为该点电场强度的大小。

按这样的规定画出电场线,密的地方,电场强度大;疏的地方,电场强度小。图 10-12 所示为几种典型带电系统产生的电场线分布图。

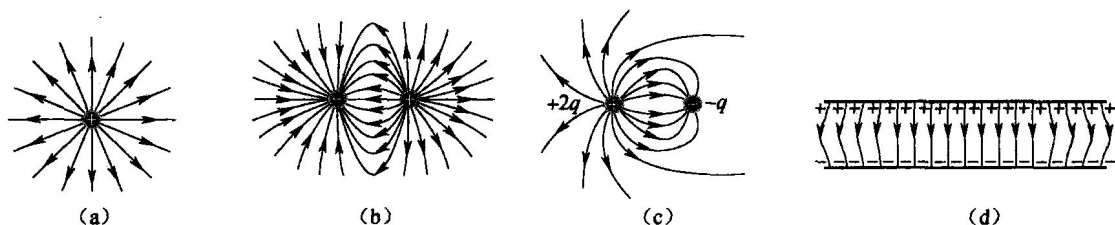


图 10-12 电场线分布图

(a) 正点电荷; (b) 两等量异号点电荷; (c) 两个不等量异号电荷; (d) 带等量异号电荷的平行板

静电场中电场线有以下 3 条重要性质:

- (1) 电场线始于正电荷或无穷远处,终止于负电荷或伸向无穷远处,不会在没有电荷的地方中断;
- (2) 电场线不能形成闭合曲线;
- (3) 在无电荷处任意两条电场线都不会相交。

由图 10-12 (a) 可见,正的点电荷的电场线是以正点电荷为中心的、沿径矢向外辐射的直线。而负的点电荷的电场线则是以负点电荷为中心的、沿径矢向内会聚的直线。以点电荷为中心的球面上各点电场线的疏密程度相同,表示场强大小相等。

由图 10-12 (d) 可知,带等量异号电荷的平行板中间部分电场的电场线密度处处相同,而且方向一致,表明各点场强方向处处一致,大小处处相等,这种电场称为匀强电场。

虽然电场线并非电场中的客观存在,但引入电场线概念可以形象地表示电场的空间分布,对分析和研究实际问题很有帮助。在研究某些复杂的电场时,可以采用模拟的方法把它们的电场线作出来,进行分析、研究。

二、电通量

通过电场中任意一曲面 S 的电场线条数称为穿过该面的电场强度通量,简称为电通量,

用 Φ_e 表示。在匀强电场中, 电场线是一系列均匀分布的有向平行直线。对于一个面积为 S 并且与 $\mathbf{E}$ 垂直的平面(如图10-13(a)所示), 显然, 通过它的电场线总条数即电通量为

$$\Phi_e = ES$$

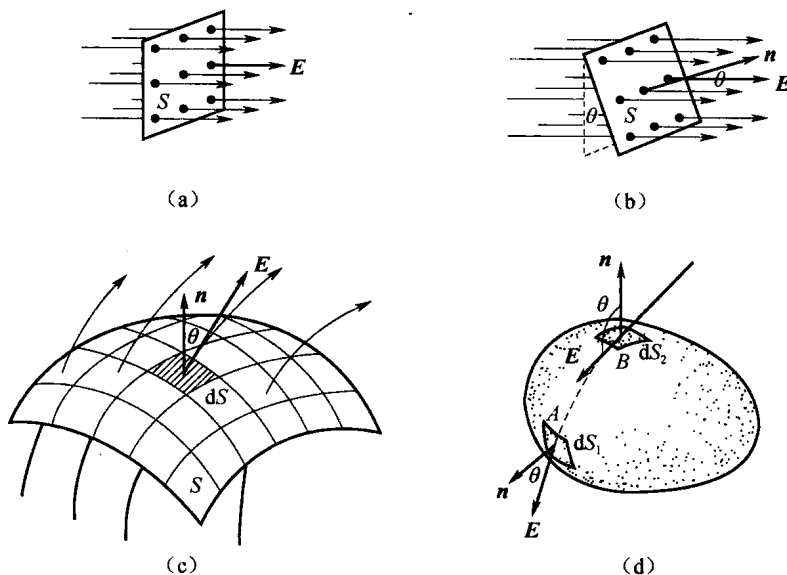


图 10-13 电通量

若平面 S 与场强不垂直, 其方位可用它的单位法向矢量 $\mathbf{n}$ 来表示。引入面积矢量 $\mathbf{S}$, 规定其大小为 S , 方向用 $\mathbf{n}$ 表示, 即 $\mathbf{S} = S\mathbf{n}$ 。面积矢量 $\mathbf{S}$ 与电场强度 $\mathbf{E}$ 的夹角为 θ (如图10-13(b)所示), 则通过 S 的电通量为

$$\Phi_e = ES_{\perp} = ES\cos\theta$$

由矢量标积的定义, 上式可表示为 $\Phi_e = \mathbf{E} \cdot \mathbf{S}$ 。由此可见, 通过某一面积的电通量可正可负, 其正负取决于该面积 S 的法线 $\mathbf{n}$ 与 $\mathbf{E}$ 的夹角。

对于非匀强电场中的任意曲面来说, 要计算通过该曲面的电通量, 则要把该曲面分割为无限多个小面积元 dS , 使得在每一个无限小的面积元 dS 上, 电场强度 $\mathbf{E}$ 可以视为均匀的, 如图10-13(c)所示。则面积元 dS 的电通量为

$$d\Phi_e = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

通过曲面 S 的电通量为

$$\Phi_e = \int_S d\Phi_e = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (10-11)$$

式中的积分遍及整个曲面。

当 S 是闭合曲面时(如图10-13(d)所示), 上式可写为