NL 农林类高等职业院校基础课系列教材

线性代数

谢厚桂 徐文智 张青娥 主编

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

中国林业出版社

线性代数

农林类高等职业院校基础课系列教材

线性代数

谢厚桂　徐文智　张青娥　主编

中国林业出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/谢厚桂，徐文智，张青娥主编．—北京：中国林业出版社，2010.3
（农林类高等职业院校基础课系列教材）
ISBN 978-7-5038-5476-7

Ⅰ.①线… Ⅱ.①谢… ②徐… ③张… Ⅲ.①线性代数—高等学校：技术学校—教材
Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 041368 号

出版 中国林业出版社（100009 北京西城区刘海胡同 7 号）
E-mail forestbook@163.com 电话 010－83222880
网址 www.cfph.com.cn
发行 中国林业出版社
印刷 北京林业大学印刷厂
版次 2010 年 3 月第 1 版
印次 2010 年 3 月第 1 次
开本 787mm×960mm 1/16
印张 10
字数 180 千字
印数 1～4000 册

定价 15.00 元

《线 性 代 数》
编 者 名 单

主　编　谢厚桂　徐文智　张青娥
副主编　李　钧　马建国　梁　颖
编　者　（按姓氏笔画排序）

马建国　王志武　王　晨　代　瑛　闫宝英
李　钧　辛永清　张青娥　张　凤　郑瑞根
郝建民　徐文智　梁　颖　聂淑媛　谢厚桂

前　　言

为了更好地满足高职、高专对数学课程的需求，根据教育部关于高职、高专的培养目标及对数学课程教学大纲所规定的教学内容的最新要求，本着数学“服务专业、必须够用”的原则，以实施素质教育，加强数学素养，培养数学应用能力及创新能力为宗旨，在原编“农林类高职高专基础课系列教材——《高等数学（上册）（第二版）》（主要内容为微积分）及《高等数学（下册）》（主要内容为线性代数、概率论与数理统计）”的基础上，经过用书单位师生的反馈意见及要求，经过多年高职、高专的课程建设经验及教学改革实践，经过各参编单位专家讨论、研究决定：重新整合编写出版这套新的“农林类高等职业院校基础课系列教材”——《高等数学》、《线性代数》、《概率论与数理统计》。这样，各用书单位可以根据不同专业及培养目标选择相应的教材。新教材更便于教学，使数学在高职教学中更好地发挥应有的作用。

本次出版的是继《高等数学》出版后的《线性代数》。本教材特点是：知识结构严谨、合理，内容安排恰当；重点突出基础知识、基本思想与方法；语言叙述通俗、简练，避免专门数学知识；全书理论推导从简，以彰显高职特点，注重数学知识的应用及能力培养；此外，每章都配有习题，以供学生练习、巩固知识所用，且习题均有参考答案附后作参考。原出版的《高等数学上、下册》均配套用书——《高等数学学习指导上、下册》，为减轻学生负担，在本次教材编写时特别注重了习题的优化，且在书末增加了综合测试题，故本套教材不再出版配套用书。

本书共五章。其中第一章为行列式，第二章为矩阵，第三章为 n 维向量和线性方程组，第四章为特征值与特征向量，第五章为二次型。内容系统完备，较好的覆盖了线性代数的基本内容，能较好地满足高职、高专教学的需要。

本书可作为农林类及综合类高职院校、成人高校、高等专科学校及普通本科院校下设的职业技术学院等的教学用书，也可作为专升本及自学高等数学、农林业科技人员的参考用书。

本书由谢厚桂、徐文智、张青娥主编。参加编写的有：山东农业大学谢厚桂、王志武、梁颖（第一、四章）；河南科技大学林业职业学院张青娥、马建国、聂淑媛（第二章）；甘肃林业职业技术学院徐文智、辛永清、王晨、代瑛（第三章）；山东农业大学李钧、张凤，福建林业职业技术学院郑瑞根（第五

章)；另外山东农业大学郝建民，山东农业管理干部学院闫宝英也参加了部分章节的编写。全书最后由谢厚桂统筹、定稿。

本书在编写过程中参考了同行专家的有关著作和研究成果，并得到各参编单位领导和有关专家的大力支持，特别是山东农业大学信息科学与工程学院信息与计算科学系的领导和老师们的大力支持，更得益于中国林业出版社的精心策划及鼎立合作。在此一并表示衷心的感谢。

本书尽管经过多次补充、修改、完善，但由于水平所限，尚有不当之处，还有待进一步完善，敬请不吝赐教。

编　者

2010 年 1 月

目　　录

第一章　行列式

行列式是一种重要的数学工具，在微积分的学习中已经看到向量的叉积可以用二阶、三阶行列式来表示较简单，直线与平面的有关问题如果运用行列式是较简捷的。在线性代数中，行列式是解线性方程组不可缺少的工具，它在矩阵、特征值及二次型中也有重要作用。本章将通过实例引出二阶、三阶行列式的定义，以此为基础，引出 n 阶行列式的概念，进而介绍行列式的性质和展开，最后应用行列式解线性方程组——克莱姆法则。

第一节　行列式的概念

一、二阶、三阶行列式

在中学代数中，我们知道二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{1}$$

其中 x_1,x_2 为未知量，$a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$ 为未知量的系数，b_1,b_2 为常数项。用加减消元法可得到

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})x_1=a_{22}b_1-a_{12}b_2 \\ (a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})x_2=a_{11}b_2-a_{21}b_1 \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}\neq 0$ 时，此方程组有唯一解

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{a_{22}b_1-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}} \\ x_2=\dfrac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}} \end{cases} \tag{2}$$

为了进一步揭示求解公式的规律，也为了记忆方便，用符号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 来表示算式 $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$ 称为二阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$$

它有 2^2 个数组成两行两列，代表 $2!=2$ 项的代数和，每一项都是两个元素

的乘积，且来自不同的行、不同的列。其中 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 称为元素，第一个下标 i 表示这个元素在第 i 行，第二个下标 j 表示这个元素在第 j 列，a_{ij} 即为第 i 行第 j 列相交处的元素。

例如，由行列式定义，我们有

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 3\times 6 - 2\times(-1) = 20$$

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

在方程组(1)中，若令

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

称 D 为系数行列式，其中 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 是方程组中未知量 $x_i(i=1,2)$ 对应的系数；而 D_1 是将常数项 $b_i(i=1,2)$ 代替方程中的第一个未知量 x_1 对应的系数得到的行列式，D_2 是将常数项 $b_i(i=1,2)$ 代替方程中的第二个未知量 x_2 对应的系数得到的行列式。显然当 $D\neq 0$ 时方程组(1)有唯一解

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D} \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D} \end{cases} \tag{3}$$

式(3)相对于式(2)有式(3)易记忆且反映出一定的规律性的特点，由此窥一斑知行列式的重要性。

例 1 解方程组

$$\begin{cases} 3x+2y=5 \\ 2x+3y=0 \end{cases}$$

解 系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

知方程组有唯一解，又因

$$D_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 15\ ,\ D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -10$$

得方程组的解为：

$$\begin{cases} x=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{15}{5}=3 \\ y=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{-10}{5}=-2 \end{cases}$$

完全类似地，对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{4}$$

利用加减消元法可得到

$$(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32})x_1$$
$$=b_1a_{22}a_{33}+b_2a_{32}a_{13}+b_3a_{12}a_{23}-b_3a_{22}a_{13}-b_2a_{12}a_{33}-b_1a_{32}a_{23}$$

这个结果很难记忆，为此引进三阶行列式的概念，称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

为三阶行列式，其值为：

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

其中 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 称为行列式的元素，a_{ij} 是行列式第 i 行与第 j 列相交处的元素。它由 3^2 个数组成三行三列，它是 $3!=6$ 项的代数和，每一项都是 3 个元素的乘积，这 3 个元素取自不同的行不同的列，其中前 3 项前面带正号，另 3 项前面带负号。

计算三阶行列式有几种方法，常见的是对角线法则，即将行列式中第一列与第二列重置于行列式的右侧，然后求对角线上元素乘积的代数和即得其值，方法如下：

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

其中位于三条实线上的三元素的积是正的，位于三条虚线上的三元素的积都是负的。

例如按定义，我们有

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}=2\times1\times(-2)+(-3)\times1\times3+1\times1\times1$$
$$-1\times1\times3-2\times1\times1-(-3)\times1\times(-2)=-23$$

在方程组(4)中若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

其中 D 为方程组的系数行列式，$D_i(i=1,2,3)$为常数项代替系数行列式中的第 $i(i=1,2,3)$列后得到的行列式。显然，在 $D\neq0$ 时，方程组(4)有唯一解为：

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D} \\ x_2=\dfrac{D_2}{D} \\ x_3=\dfrac{D_3}{D} \end{cases}$$

此式很易记忆，且反映出一定的规律性。

例 2 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=1 \\ x_1-2x_2-x_3=0 \\ 3x_1+x_2+2x_3=7 \end{cases}$$

解 计算系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=1\times(-2)\times2+(-1)\times(-1)\times3+1\times1\times1-1\times(-2)\times3$$
$$-1\times(-1)\times1-(-1)\times1\times2=9\neq0$$

知此方程组有唯一解，又因

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 7 & 1 & 2 \end{vmatrix}=18$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&0&-1\\3&7&2\end{vmatrix}=9$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&-1&1\\1&-2&0\\3&1&7\end{vmatrix}=0$$

所以此方程组的解为：

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{18}{9}=2\\ x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{9}{9}=1\\ x_3=\dfrac{D_3}{D}=\dfrac{0}{9}=0\end{cases}$$

通过上例可以看出，有了行列式这个工具，在解线性方程组时就显得公式好记忆，且有规律。

例 3　已知 $D=\begin{vmatrix}a&3&4\\-1&a&0\\0&a&1\end{vmatrix}=0$，求 a 的值。

解　计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}a&3&4\\-1&a&0\\0&a&1\end{vmatrix}=a^2+0+(-4a)-0-(-3)-0=a^2-4a+3$$

由于 $D=0$，故 $a=1$ 或 $a=3$。

二、n 阶行列式

为了讨论 n 阶行列式，下面给出全排列及逆序数的概念。

全排列　由前 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 按任意顺序排成一个有序数组(数字不重复)，称为一个 n 级(全)排列，简称排列，记为 $j_1j_2\cdots j_n$。

n 级排列的种数为 $n!$，其中排列 $12\cdots n$ 为由小到大的排列，称为自然排列。如由 1,2,3 这三个数组成的 3 级排列共有：123，132，213，231，312，321，其中 123 为 3 级自然排列。

逆序数　n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中，若有较大的数排在较小的数的前面，则称它们构成一个逆序。

n 级排列中，除自然排列外，每个排列中都有大数字排在小数字前面，当某两个数字的先后顺序与标准顺序(由小到大排列)不同时，就构成一个逆序。

设 $j_1j_2\cdots j_n$ 为一个 n 级排列，数 j_i 前面比 j_i 大的数字的数目叫数字 j_i 的逆序数，记为 $N(j_i)$。例如 5 级排列 32514，则 $N(2)=1,N(1)=3,N(3)=0$。

一个 n 级排列中所有逆序数之和，也即所有数字的逆序数之和，称为该排列的逆序数，记为 $N(j_1j_2\cdots j_n)$，即

$$N(j_1j_2\cdots j_n)=N(j_1)+N(j_2)+\cdots+N(j_n)$$

例如
$$\begin{aligned}N(32514)&=N(3)+N(2)+N(5)+N(1)+N(4)\\&=0+1+0+3+1=5\end{aligned}$$

易知由 1,2 这两个数字组成的排列的逆序数为：

$$N(12)=N(1)+N(2)=0$$
$$N(21)=N(2)+N(1)=1$$

由 1,2,3 组成的排列的逆序数为：

$$N(123)=N(1)+N(2)+N(3)=0,\quad N(132)=N(1)+N(3)+N(2)=1$$
$$N(213)=N(2)+N(1)+N(3)=1,\quad N(231)=N(2)+N(3)+N(1)=2$$
$$N(312)=N(3)+N(1)+N(2)=2,\quad N(321)=N(3)+N(2)+N(1)=3$$

考察二阶行列式，它是 $2!=2$ 项的代数和，每项来自不同行、不同列的 2 个元素的乘积，前面取正号与取负号的项各占一半，即各为一项。另外可以适当交换每项中元素的次序，使得它们的行标按自然顺序排列，这时，若相应列标逆序数为零，则这项前面取正号；若相应列标排列逆序数为奇数，则这项前面取负号。

再考察三阶行列式，它是 $3!=6$ 项的代数和，每项为来自不同行、不同列的 3 个元素乘积，前面取正号与取负号的项各占一半，即各为 3 项。适当交换每项中元素的次序，使得它们的行标按自然顺序排列，这时，若相应列标排列逆序数为零或偶数，则这项前面取正号；若相应列标排列逆序数为奇数，则这项前面取负号。

根据以上考察得到的规律，给出 n 阶行列式的概念。

定义 1 符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式，它是 $n!$ 项的代数和，每项为来自不同行、不同列的 n 个元素的乘积。可以适当交换每项中元素的次序，使得它们的行标按自然顺序排列，这时，若相应列标排列逆序数为零或偶数，则这项前面取正号，若相应列标排列逆序数为奇数，则这项前面取负号。

n 阶行列式共有 n^2 个元素，它们排成 n 行 n 列，从左上角到右下角的对角

线称为主对角线，从右上角到左下角的对角线称为次对角线。容易知道：同一行的元素不可能乘在一起，同一列的元素也不可能乘再一起。可以证明：n 阶行列式中，取正号与取负号的项各占一半，即各为$\frac{1}{2}n!$ 项。

行列式通常用大写英文字母 D 来表示，或记作$|a_{ij}|$。特别地规定一阶行列式$|a_{11}|=a_{11}$，切记不要与绝对值混淆。

例 4 判断下列各项是否是 4 阶行列式的项，并指出其符号。

(1)$a_{41}a_{23}a_{12}a_{34}$ (2)$a_{12}a_{23}a_{34}a_{42}$

解 (1)$a_{41}a_{23}a_{12}a_{34}$是取自 4 阶行列式不同行、不同列的 4 个元素的乘积，由定义知它是 4 阶行列式的项。又适当交换所给项中元素的次序，使得行标按自然顺序排列，得到

$$a_{41}a_{23}a_{12}a_{34}=a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$$

这时，相应列排列逆序数

$$N(2341)=3$$

是奇数，所以此项的符号为负。

(2)$a_{12}a_{23}a_{34}a_{42}$中有两个元素 a_{12}，a_{42}都取自第二列，因此，此项不是 4 阶行列式的项。

例 5 确定元素下标 l,m 的值，使得乘积 $a_{31}a_{22}a_{5m}a_{1l}a_{43}$为 5 阶行列式 D 中前面取正号的项。

解 在乘积 $a_{31}a_{22}a_{5m}a_{1l}a_{43}$中，元素的行标各不相同，列标分别为 $1,2,m,l,3$，欲使它们来自不同的列，必须 $m=5,l=4$ 或 $m=4,l=5$，这时，乘积 $a_{31}a_{22}a_{5m}a_{1l}a_{43}$才是 5 阶行列式 D 中的项。

当 $m=5,l=4$ 时，得到

$$a_{31}a_{22}a_{5m}a_{1l}a_{43}=a_{31}a_{22}a_{55}a_{14}a_{43}=a_{14}a_{22}a_{31}a_{43}a_{55}$$

这时，相应列标排列逆序数

$$N(42135)=4$$

是偶数，所以 $a_{31}a_{22}a_{55}a_{14}a_{43}$前面应取正号；而当 $m=4,l=5$ 时得到的项

$$a_{31}a_{22}a_{5m}a_{1l}a_{43}=a_{31}a_{22}a_{54}a_{15}a_{43}=a_{15}a_{22}a_{31}a_{43}a_{54}$$

这时，列标排列逆序数为 5，是奇数，所以该项前面取负号，不符合题意。

所以当 $m=5,l=4$ 时，乘积 $a_{31}a_{22}a_{5m}a_{1l}a_{43}$为 5 阶行列式 D 中前面取正号的项。

例 6 计算 n 行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解 此行列式主对角线以上的元素全为零,因而含有零因子的项一定为零,按定义只需求出 D 的 $n!$ 项中非零项的代数和即可,且每一项来自不同行、不同列的 n 个元素的乘积。在这样的项中,必然有一因子来自第一行,只能是 a_{11};必然有一个因子来自第二行,有元素 a_{21},a_{22} 可供选择,但元素 a_{21} 与元素 a_{11} 同在第一列,从而只能取元素 a_{22};类似地第三行只能取 a_{33},…,第 n 行只能取 a_{nn},这样此行列式可能不为零的项只有一项 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$,于是

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

例 6 中的行列式称为下三角形行列式(主对角线以上的元素全为零,即 $i<j$ 时,$a_{ij}=0$);同样有上三角形行列式(主对角线以上的元素全为零,即 $i>j$ 时,$a_{ij}=0$)。

显然有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

总之,三角形行列式(上、下三角形行列式)的值等于主对角线上元素的乘积。

若行列式主对角线以外的元素全为零,则称其为对角形行列式,它是三角形行列式的特殊情况,它的值显然也等于主对角线上元素的乘积,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

定义 2 已知行列式