

斯改尼三氏

新解析幾何學

羅凱全譯

商務印書館發行

$$Ax + By + C = 0 \quad 2 \text{ 次}$$

$$Ax + By = 0$$

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \text{不過要圖}$$

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy = 0$$

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy = 0$$

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + Ex + F = 0 \quad \text{框}$$

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy = 0 \quad \text{原序}$$

本校訂板中，許多教師向所讚美各點，著者已着意爲之保留；且依經驗上之見地完善之。書中大旨，殊少更易，所添論題，足增學者之興趣。至於重排上之變化，其目的純爲預備一種更確當之程序且將較新穎較繁難之論題於適當之時期輸入之。本版取第一版之新材料爲標準，此事當爲讀者所鑒諒。解析幾何學科程現今當然包括超越曲線，參數方程式，圖形，及經驗方程式諸章。許多教師願將立體解析幾何學部分略爲縮短，現版已應彼等所請；但欲實施一種充滿的科程，以供進窺微積分之基礎者，則必需之材料，亦已搜集其中矣。全部問題，悉經校訂，有數組冠以“特別研究”目標者，依慣常言之，此種問題施之普通練習，太難，而爲例外學者所設耳。

目次

第一章 參考公式及表	1
1. 幾何學,代數學,及三角術之公式	1
2. 特別角之三角函數真數值	6
3. 三角函數之符號規則	7
4. 三角函數真數值	7
5. 希臘字母表	8
第二章 卡氏坐標	9
6. 解析幾何學	9
7. 卡氏正坐標 斜坐標	9
8. 方向直線	13
9. 長	15
10. 分點	16
11. 對於幾何學定理之應用	19
12. 斜度及線坡	22
13. 平行線或垂直線之檢驗	24
14. 角之公式	26
15. 面積	28
第三章 曲線及方程式	35
16. 曲線(點之軌跡)之方程式	35

17. 方程式之軌跡	39
18. 方程式之討論	43
19. 結論	49
20. 水平及垂直幾近線	54
21. 交點	59
 第四章 直線	 63
22. 直線方程式之次	63
23. 任意一次方程式之軌跡	64
24. 描直線法 定理 析因子描圖法	65
25. 點坡式	69
26. 兩點式	69
27. 截距式	70
28. 三直線交於一點之條件	71
29. 直線之法線方程式	75
30. 法線式之化法	76
31. 直線至一點之垂直距離	79
32. 直線族	85
33. 通過已知兩直線交點之直線族	88
 第五章 圓	 94
34. 圓之方程式	94
35. 圓之檢驗法	95
36. 三條件可決定一圓	96
37. 根軸	104
38. 切線之長	105

39. 圓族	107
--------	-----

第六章 拋物線橢圓及雙曲線 112

40. 拋物線	112
41. 拋物線作圖法	114
42. 拋物拱	115
43. 描拋物線法	116
44. 橢圓	119
45. 橢圓作圖法	122
46. 描橢圓法	123
47. 特款	124
48. 雙曲線	126
49. 雙曲線作圖法	130
50. 描雙曲線法	130
51. 共軛雙曲線及幾近線	133
52. 等邊雙曲線或方形雙曲線	136
53. 結論	136
54. 圓錐曲線	137
55. 圓錐曲線族	137

第七章 坐標之變換 141

56. 引言	141
57. 移動	141
58. 移動坐標軸以簡化方程式	144
59. 定理	149
60. 圓錐曲線之模範方程式	150



61. 轉動.....	153
62. 轉動坐標軸以簡化方程式.....	154
63. 二次方程式之軌跡.....	157
64. 任意二次方程式之軌跡描圖法.....	160
65. 特款 等邊雙曲線(或方形雙曲線) 等邊雙曲線作圖法.....	167
66. 圓錐曲線之另一定義.....	169
67. 普通坐標軸之移轉.....	170
68. 軌跡之分類.....	170

第八章 切線.....173

69. 切線之方程式.....	173
70. 普通定理.....	176
71. 法線之方程式.....	179
72. 次切線及次法線.....	179
73. 已知線坡求切線法.....	181
74. 從曲線外一點求切線法.....	182
75. 已知線坡之切線公式.....	185
76. 圓錐曲線之切線及法線之性質.....	189

第九章 極坐標.....194

77. 極坐標.....	194
78. 極方程式作圖法.....	196
79. 極方程式迅速作圖法.....	201
80. 正坐標與極坐標之關係.....	204
81. 應用 直線與圓.....	206



82. 圓錐曲線之極坐標方程式.....	207
83. 交點.....	209
84. 用極坐標求軌跡法.....	211
第十章 超越曲線	216
85. 自然對數 指數及對數曲線	216
86. 正弦曲線	222
87. 週期性	225
88. 正弦曲線作圖法	225
89. 其他三角曲線	228
90. 縱坐標加法.....	232
91. 界限曲線	235
第十一章 參數方程式及軌跡	239
92. 參數方程式作圖法.....	239
93. 從參數方程式求正坐標方程式法.....	241
94. 同曲線之各種參數方程式	243
95. 用參數方程式解軌跡問題.....	247
96. 用對應線交點確定軌跡法.....	255
97. 圓錐曲線之直徑	260
第十二章 函數 圖形及經驗方程式	265
98. 函數 函數之記法	265
99. 函數之圖形 簡易函數之例題.....	266
100. 函數之立式及作圖.....	270
101. 函數之經驗確定法.....	275
102. 直線律	276

103. 平均法	277
104. 上例評註	279
105. 二常數律	282
106. 冪律	283
107. 指數律及雙曲線律	386
108. 拋物線律	291
109. 平均法對於普通拋物線律之應用	294
110. 代數方程式之圖解	296
111. 超越方程式之圖解	300
第十三章 卡氏空間坐標	304
112. 卡氏坐標	304
113. 重要關係	306
114. 直線之方向餘弦	309
115. 直線之方向數	310
116. 長	312
117. 二方向直線間之角	313
118. 平行線及垂直線之檢驗法	314
119. 分點	315
120. 空間之軌跡	320
121. 面之方程式	321
122. 曲線之方程式	321
123. 方程式之軌跡 二個聯立方程式之軌跡	322
第十四章 空間之平面及直線	326
124. 平面之法線方程式	326

125. 任意一次方程式之軌跡 法線式化法	327
126. 特別平面	329
127. 平面之截距及蹤線 平面作圖法	330
128. 兩平面間之角	334
129. 三條件決定一平面	335
130. 平面之截距式	338
131. 自平面至一點之垂距	341
132. 平面族	345
133. 直線之普通方程式	348
134. 直線方程式之種種	353
135. 直線之投影面 投影式	354
136. 直線與平面相關之位置	361
第十五章 特別曲面	366
137. 球面	366
138. 圓柱面	370
139. 圓錐面	372
140. 曲面方程式之討論	375
141. 二次曲面	380
142. 橢圓曲面	381
143. 一支雙曲線曲面	382
144. 兩支雙曲線曲面	384
145. 橢圓拋物線曲面	387
146. 雙曲線拋物線曲面	389
第十六章 空間解析幾何學補編	393

147. 旋轉曲面	393
148. 法面	397
149. 法二次曲面 直母線	399
150. 傾斜圓柱面	401
151. 曲線之投影圓柱面	403
152. 空間曲線之參數方程式	407
第十七章 坐標之變換 各種坐標制	412
153. 坐標軸之移動	412
154. 坐標軸之轉動	413
155. 含 x, y, z 之二次方程式之軌跡	416
156. 普通三元二次方程式之簡化法	418
157. 極坐標	420
158. 球面坐標	421
159. 圓柱面坐標	422
附頁	425

斯改尼三氏

新解析幾何學

第一章

參考公式及表



1. 下列諸公式及定理爲幾何學，代數學，三角術中所經證明者，以後諸章中有時應用之。

幾何學

A. 以下諸公式中， r 表半徑， a 爲高， B 爲底之面積， S 爲斜高。

圓 (Circle). 圓周 $= 2\pi r$. 面積 $= \pi r^2$.

角柱體 (Prism). 體積 $= Ba$.

角錐體 (Pyramid). 體積 $= \frac{1}{3}Ba$.

正直圓柱體 (Right circular cylinder). 體積 $= \pi r^2 a$.

側面積 $= 2\pi ra$. 總面積 $= 2\pi r(r+a)$.

正直圓錐體 (Right circular cone). 體積 $= \frac{1}{3}\pi r^2 a$.

側面積 $= \pi rs$. 總面積 $= \pi r(r+s)$.

球 (Sphere). 體積 $= \frac{4}{3}\pi r^3$. 面積 $= 4\pi r^2$.

代 數 學

B. 二次方程式 $Ax^2+Bx+C=0$ 之解法.

1. 析因數法: 將 Ax^2+Bx+C 析因數, 命各因子等於零且依 x 解之.

2. 完成平方法: 將 C 遷於右端, 以 x^2 之係數遍除全式, 兩端加以 x 之半係數之平方, 再求出平方根.

3. 用公式法:
$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

根之性質. 公式中根號內之 B^2-4AC 式為判別式 (discriminant). 依判別式為正, 為零, 或為負, 則二根為不相等之實數, 為相等之實數, 或為虛數.

C. 對數 (Logarithms).

$$\log ab = \log a + \log b. \quad \log a^n = n \log a. \quad \log 1 = 0.$$

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b. \quad \log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log a. \quad \log_a a = 1$$

三角術

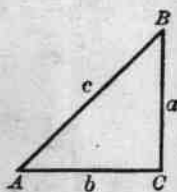
D. 直角三角形. 銳角 A 之三角函數, 其定義如下:

$$\sin A = \frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}, \quad \cos A = \frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}, \quad \tan A = \frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}},$$

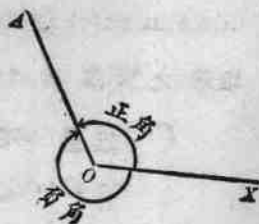
$$\csc A = \frac{\text{斜邊}}{\text{對邊}}, \quad \sec A = \frac{\text{斜邊}}{\text{鄰邊}}, \quad \cot A = \frac{\text{鄰邊}}{\text{對邊}}.$$

定理 直角三角形之一邊等於斜邊及此邊所對之角之正弦相乘之積, 或等於斜邊及此邊相鄰之角之餘弦相乘之積.

E. 普通角. 如言 XOA 角, 係由一直線自 OX 之位置旋轉至 OA 之位置所成. 直線反時計之方向旋轉時, 所得之角爲正; 如直線順時計之方向旋轉時, 所得之角爲負. 名固定之直線 OX 曰始線 (Initial line). 名 OA 曰終線 (Terminal line). (參看下圖).



F. 角之度量. 量角之大小普通有二法; 即有兩種角之單位是也.



度制 (Degree measure). 此單位角即以 OA 旋轉一周之 $\frac{1}{360}$ 為一度。

弧度制 (Circular measure). 此單位角即以與半徑等長之弧所張之圓心角為單位，名此單位曰彊 (radian)。

此兩種單位角之關係，以方程式表之

$$180 \text{ 度} = \pi \text{ 彊} (\pi = 3.14159 \dots);$$

$$\text{解之, } 1 \text{ 度} = \frac{\pi}{180} = 0.0174 \dots \text{彊}; \quad 1 \text{ 彊} = \frac{180}{\pi} = 57.29 \dots \text{度}.$$

由上述定義，可得一角所含彊之數 = $\frac{\text{所張之弧}}{\text{半徑}}$ 。

由一種單位制變成他種單位制時，引用上列方程式已能致之矣。

G. 三角函數之關係.

$$\cot x = \frac{1}{\tan x};$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x};$$

$$\csc x = \frac{1}{\sin x};$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x};$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1; \quad 1 + \tan^2 x = \sec^2 x; \quad 1 + \cot^2 x = \csc^2 x.$$

H. 化簡角度公式.

角 度	正 弦	餘 弦	正 切	餘 切	正 割	餘 割
$-x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\tan x$	$-\cot x$	$\sec x$	$-\csc x$
$90^\circ - x$	$\cos x$	$\sin x$	$\cot x$	$\tan x$	$\csc x$	$\sec x$
$90^\circ + x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cot x$	$-\tan x$	$-\csc x$	$\sec x$
$180^\circ - x$	$\sin x$	$-\cos x$	$-\tan x$	$-\cot x$	$-\sec x$	$\csc x$
$180^\circ + x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\tan x$	$\cot x$	$-\sec x$	$-\csc x$
$270^\circ - x$	$-\cos x$	$-\sin x$	$\cot x$	$\tan x$	$-\csc x$	$-\sec x$
$270^\circ + x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\cot x$	$-\tan x$	$\csc x$	$-\sec x$
$360^\circ - x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\tan x$	$-\cot x$	$\sec x$	$-\csc x$

I. $(x+y)$ 及 $(x-y)$ 之三角函數.

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y.$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}.$$

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}.$$

J. $2x$ 及 $\frac{1}{2}x$ 之函數.

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x; \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x;$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}; \quad \sin \frac{1}{2}x = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}};$$

$$\cos \frac{1}{2}x = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}; \quad \tan 2x = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x; \quad \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x.$$

K. 任意三角形之關係. 餘弦定律 (Law of cosines). 於任意三角形中, 其一邊之平方等於其他兩邊平方之和, 減去此二邊與其夾角餘弦乘積之二倍; 即

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

三角形之面積. 任意三角形之面積等於兩邊之積之半乘以該兩邊所夾之角之正弦; 即

$$\text{面積} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B.$$

2. 特別角之三角函數真數值.

徑 數	度 數	sin	cos	tan	cot	sec	csc
0	0°	0	1	0	∞	1	∞
$\frac{1}{2}\pi$	90°	1	0	∞	0	∞	1
π	180°	0	-1	0	∞	-1	∞
$\frac{3}{2}\pi$	270°	-1	0	∞	0	∞	-1
2π	360°	0	1	0	∞	1	∞

徑 數	度 數	sin	cos	tan	cot	sec	csc
0	0°	0	1	0	∞	1	∞
$\frac{1}{6}\pi$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
$\frac{1}{4}\pi$	45°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$\frac{1}{3}\pi$	60°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
$\frac{1}{2}\pi$	90°	1	0	∞	0	∞	1

3. 三角函數之符號規則.

限 象	sin	cos	tan	cot	sec	csc
第一 . . .	+	+	+	+	+	+
第二 . . .	+	-	-	-	-	+
第三 . . .	-	-	+	+	-	-
第四 . . .	-	+	-	-	+	-

4. 三角函數真數值.

彈 數	度 數	sin	cos	tan	cot		
.000	0°	.000	1.000	.000	∞	90	1.571
.017	1°	.017	.999	.017	57.29	89°	1.553
.035	2°	.035	.999	.035	28.64	88°	1.536
.052	3°	.052	.999	.052	19.08	87°	1.518
.070	4°	.070	.998	.070	14.30	86°	1.501
.087	5°	.087	.996	.088	11.43	85°	1.484
.174	10°	.174	.985	.176	5.67	80°	1.396
.262	15°	.259	.966	.268	3.73	75°	1.309
.349	20°	.342	.940	.364	2.75	70°	1.222
.436	25°	.423	.906	.466	2.14	65°	1.134
.524	30°	.500	.866	.577	1.73	60°	1.047
.611	35°	.574	.819	.700	1.43	55°	.960
.698	40°	.643	.766	.839	1.19	50°	.873
.785	45°	.707	.707	1.000	1.00	45°	.785
		cos	sin	cot	tan	度 數	彈 數