实变函数论

上海师范大学

23

实变函数论

杨有锠　王晓斐　编
应制夷　张一鸣　校

上海师大数学系

1984

前　言

实变函数论是高等师范院校数学系科的一门必修课程。近几年来，我们在教学实践的基础上写成了这本教材，经过多次使用、反复修改，教学效果较好。我们的编写宗旨是

1° 力求内容精简、紧凑、且自成体系；论证严谨、清楚；叙述深入浅出，处理问题简洁明快。

2° 既注意到观点和方法的近代化，为进一步学习现代数学知识打下基础，也注意到与数学分析的紧密联系以及师范性的特点。

3° 从各个方面尽量使这本教材易教易学，使学过数学分析的学生和读者都能较快地掌握实变函数论的基本理论和方法。

本教材共六章。第一章到第四章主要讲述集合论与测度论，它们是近代数学的基础，也是研究勒贝格积分的工具。从第五章开始介绍勒贝格积分的理论。

根椐师范院校的教学要求，我们加强了函数方面的知识，并单独设立一章。关于测度理论，为了解决教材现代化与学生可接受性之间的矛盾，我们仿照抽象测度的建立过程把勒贝格测度的叙述分为三段：区间上的测度，外测度，测度。在每段小结时，简单地提及了一般测度扩张理论的基本思想。关于勒贝格积分的定义，我们采用了和数学分析中黎曼积分

定义较接近的一种方式，便于相互比较、复习和掌握．至于通过简单函数积分来定义勒贝格积分的方式，虽然较抽象，但有其独特的优越性，所以在第五章最后作了简单介绍．在微分与积分这章中，我们由数学分析中重要结果引出新的论题，并应用维它利复盖引理来证明了勒贝格微分定理．

本教材的教学时数约 64 学时．若教学时数不多，可删去教材中用楷体排印的部分（约占全书篇幅的 1/5，包括带＊的小节、某些定理的证明、有关内容的介绍），这并不影响其它内容的学习．在教材末尾配有与教材内容相适应的习题．习题数量较多，多数是适宜学生独立完成的基本练习题，有的可供习题课选用，个别的要求稍高，打上了＊号．本教材对师院、师专、函授班等都很适宜，也可供学过数学分析的同志作自学用．

本教材在 1983 年曾印发全国许多兄弟院校，有不少学校要求试用并提出了宝贵意见．对大家的热情支持与帮助，我们在此表示衷心感谢．由于水平有限，经验不足，难免有许多缺点和错误，欢迎批评指正．

编者 1984．9

目　录

第一章　集与点集

§1　集与类

一、集合及其运算

集合或**集**是数学中的一个最原始、最基本的概念，对它可作如下描述：集是具有某种特殊性质的对象的全体。例如，自然数集、整数集、有理数集、实数集、[0,1]闭区间内的点构成的集合、单位球面上的点构成的集合、整系数多项式全体构成的集合、定义在[0,1]上全体连续函数构成的集合等等。集合中每一个对象称为这个集的**元素**。

我们常用大写字母 A、B、C、X、Y、…表示集，而用小写字母 a、b、c、x、y、…表示元素。若 x 是集 A 的元素，我们说 x **属于** A，记作 $x\in A$。若 x 不是集 A 的元素，我们说 x **不属于** A，记作 $x\in A$。若集中所有元素能明确地写出，可用列举在大括号内的表示法，如 $\{a, b, c\}$、$\{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$ 等等。若集是具有某种性质 $p(x)$ 的元素的全体时，也常采用 $\{x; p(x)\}$ 的记号。例如 $\{x; x^2-5x+6=0\}$ 表示方程 $x^2-5x+6=0$ 的根的全体所成之集。设 $f(x)$ 是定义在集 E 上的实函数，则 $\{x; f(x)\geqslant c, x\in E\}$ 表示集 E 中使 $f(x)$ 的值不小于 c 的点 x 的全体所成之集。又可简记为 $E\{x; f(x)\geqslant c\}$ 或 $E(f\geqslant c)$。

集之间的关系最基本的是包含关系．设 A、B 是两个集．若A的元素都属于B，则称A是B的**子集**，记作$A\subset B$或$B\supset A$，读作A **包含于**B或B **包含** A．不含任何元素的集合称为**空集**，记作$\varnothing$．例如 $\{x;\ x$ 是实数且 $x^2+1=0\}=\varnothing$．规定空集是任何集的子集．设 A、B 是两个集，若 $A\supset B$ 及 $B\supset A$ 同时成立，则称A与B**相等**，记作 $A=B$，这时 A 与 B 含相同的元素．例如

$$\{x;\ x^2-5x+6=0\}=\{2,\ 3\}.$$

若 $A\subset B$且$A\neq B$，则称A是B的**真子集**．

若集中的元素只有有限个，则称之为**有限集**．一个非空集，如果不是有限集，则称之为**无限集**．

我们有时也会遇到以集为元素的集．例如X是实数集，每一个开区间就是一个集．也是X的一个子集．而集$\{(0,\ 1),\ (2,\ 3)\}$或一切开区间所成的集都是以集为元素的集．这种以某个基本集X的某些子集为元素的集合我们又称之为**类**（或集类）．

在引进集的运算之前，我们恒假设在运算中考虑的一切集都看作是某一基本集X的子集．例如，我们限制在实数轴上研究各种集的运算，则数轴就是基本集．关于这点，以下不再特别声明．

定义 设 A、B 是任意两个集

(i) $\{x;\ x\in A$ 或 $x\in B\}$ 称为 A 与 B 的**和集**，简称为**和**，记作 $A\cup B$．

(ii) $\{x;\ x\in A$ 且 $x\in B\}$ 称为 A 与 B 的 **交集**，简称为**交**，记作$A\cap B$．

(iii) $\{x;\ x\in A$ 且 $x\overline{\in} B\}$ 称为A与B的 **差集**，简称为**差**，

记作 $A-B$.

(iv) 当 $B\subset A$ 时，A 与 B 的差集 $A-B$ 又称为 B 关于 A 的**余集**，简称为**余**，记作 $\mathscr{C}_A B$. B 对基本集 X 的余集可简称为 B 的余集，记作 $\mathscr{C}B$ 或 B^c.

(v) $(A-B)\cup(B-A)$ 称为 A 与 B 的**对称差**，记作 $A\triangle B$.

下面的一些运算性质是显然的：

1° $A\cup A=A$, $A\cap A=A$.

2° $A\cup\varnothing=A$, $A\cap\varnothing=\varnothing$. $A\cup X=X$, $A\cap X=A$.

3° $A\cap B\subset A\subset A\cup B$, $A\cap B\subset B\subset A\cup B$.

4° $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$.

5° $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

6° $A=A\cup B\Longleftrightarrow B\subset A\Longleftrightarrow A\cap B=B$.

7° $\varnothing^c=X$, $X^c=\varnothing$, $A\cup A^c=X$, $A\cap A^c=\varnothing$, $(A^c)^c=A$.

8° $A\subset B\Longleftrightarrow B^c\subset A^c$.

两个集合的和与交的概念也可推广到一族集合上去.

定义 设 $\{A_i;\ i\in I\}$ 是一集类，这里 I 为**指标集**. $\{x;\ \exists i\in I,\ x\in A_i\}$ 称为集类 $\{A_i;i\in I\}$ 的**和集**，记作 $\bigcup\limits_{i\in I}A_i$. $\{x;\ \forall i\in I,\ x\in A_i\}$ 称为集类 $\{A_i;i\in I\}$ 的**交集**，记作 $\bigcap\limits_{i\in I}A_i$.

显然有性质：

9. $A_i\subset C$, $\forall i\in I$, 则 $\bigcup\limits_{i\in I}A_i\subset C$.

$A_i\supset C$, $\forall i\in I$, 则 $\bigcap\limits_{i\in I}A_i\supset C$.

定理 1.1 (分配律)

$$B\cap(\bigcup_{i\in I}A_i)=\bigcup_{i\in I}(B\cap A_i),$$
$$B\cup(\bigcap_{i\in I}A_i)=\bigcap_{i\in I}(B\cup A_i).$$

证 任取 $x\in B\cap(\bigcup_{i\in I}A_i)\Longrightarrow x\in B,\ x\in\bigcup_{i\in I}A_i.$

$\Longrightarrow x\in B,\ \exists i\in I,\ x\in A_i.$

$\Longrightarrow \exists i\in I,\ x\in B\cap A_i.$

$\Longrightarrow x\in\bigcup_{i\in I}(B\cap A_i).$

所以，$B\cap(\bigcup_{i\in I}A_i)\subset\bigcup_{i\in I}(B\cap A_i).$

反之，$x\in\bigcup_{i\in I}(B\cap A_i)\Longrightarrow\exists i\in I,\ x\in B\cap A_i.$

$\Longrightarrow x\in B,\ \exists i\in I,\ x\in A_i.$

$\Longrightarrow x\in B,\ x\in\bigcup_{i\in I}A_i.$

$\Longrightarrow x\in B\cap(\bigcup_{i\in I}A_i).$

所以，$\bigcup_{i\in I}(B\cap A_i)\subset B\cap(\bigcup_{i\in I}A_i).$

这就证明了 $B\cap(\bigcup_{i\in I}A_i)=\bigcup_{i\in I}(B\cap A_i).$

第二式同理可证。▌

注 1° 在证明关于集的等式时，往往是从定义出发，只要证明等式的左边的集与右边的集是相互包含的即可。

2° 鉴于每步推导过程的可逆性，我们可以把“$\Longrightarrow$”改为“$\Longleftrightarrow$”而简化证明，正如我们在下面的定理证明中所作的那样。

定理 1.2 笛摩根(De Morgan)对偶公式
$$(\bigcup_{i\in I}A_i)^c=\bigcap_{i\in I}A_i^c,\ (\bigcap_{i\in I}A_i)^c=\bigcup_{i\in I}A_i^c.$$

证 以第二式为例。

$$x\in(\bigcap_{i\in I}A_i)^c \Longleftrightarrow x\in X,\ x\overline{\in}\bigcap_{i\in I}A_i.$$

$$\Longleftrightarrow x\in X,\ \exists i\in I,\ x\overline{\in} A_i.$$

$$\Longleftrightarrow \exists i\in I,\ x\in A_i^c.$$

$$\Longleftrightarrow x\in\bigcup_{i\in I}A_i^c.$$

所以，$(\bigcap_{i\in I}A_i)^c=\bigcup_{i\in I}A_i^c$。 ▮

对偶公式的作用在于取余可以使和、交转化。

二、集列的上限集、下限集

定义 设 $E_1, E_2, \cdots, E_n, \cdots$ 是一个集合序列。它的**上限集** $\widetilde{E}$ 是这样一些元素构成的集合：有无限多个 E_n 含有这种元素。它的**下限集** $\underset{\sim}{E}$ 是这样的一些元素构成的集合：只有有限个E_n不含有这种元素。上限集$\widetilde{E}$ 又可记为 $\overline{\lim_n}\, E_n$ 或 $\limsup_n E_n$；下限集 $\underset{\sim}{E}$ 又可记为 $\underline{\lim_n}\, E_n$ 或 $\liminf_n E_n$。

显然，$\underset{\sim}{E}\subset\widetilde{E}$。但反过来不一定成立。

若 $\underset{\sim}{E}=\widetilde{E}$，则说集列$\{E_n\}$收敛，称 $E=\widetilde{E}=\underset{\sim}{E}$ 为集列$\{E_n\}$的极限，记为$E=\lim E_n$。

集列$\{E_n\}$的上限集 $\widetilde{E}$ 和下限集 $\underset{\sim}{E}$ 都可通过 $\{E_n\}$的和，交运算表示出来。它们的表达式是

$$\widetilde{E}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}E_k,\qquad \underset{\sim}{E}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}E_k.$$

即 $\widetilde{E}=(E_1\cup E_2\cup\cdots)\cap(E_2\cup E_3\cup\cdots)\cap\cdots$
$\cap(E_n\cup E_{n+1}\cup\cdots)\cap\cdots,$

$\underset{\sim}{E}=(E_1\cap E_2\cap\cdots)\cup(E_2\cap E_3\cap\cdots)\cup\cdots$
$\cup(E_n\cap E_{n+1}\cap\cdots)\cup\cdots.$

下面来证明：

$$x\in\overline{E}\Longleftrightarrow\forall n,\ \exists k\geqslant n,\ x\in E_k.$$

$$\Longleftrightarrow\forall n,\ \forall x\in\bigcup_{k=n}^{\infty}E_k.$$

$$\Longleftrightarrow x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}E_k.$$

所以，$\overline{E}=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}E_k$.

又 $\quad x\in\underline{E}\Longleftrightarrow\exists n,\ \forall k\geqslant n,\ x\in E_k.$

$$\Longleftrightarrow\exists n,\ x\in\bigcap_{k=n}^{\infty}E_k.$$

$$\Longleftrightarrow x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}E_k.$$

所以，$\underline{E}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}E_k$. ▌

例 设集列 $E_n=\begin{cases}A & n\text{ 为奇数}\\ B & n\text{ 为偶数}\end{cases}$，则 $\overline{E}=A\cup B$，$\underline{E}=A\cap B$.

这是因为 $\forall n,\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}E_k=A\cup B$. 所以 $\overline{E}=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}E_k=A\cup B$.

又因 $\forall n,\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}E_k=A\cap B$，所以 $\underline{E}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}E_k=A\cap B$.

如果集列 $\{E_n\}$ 满足 $E_n\subset E_{n+1}$ $(E_n\supset E_{n+1})$ $(n=1,2,\cdots)$，则称 $\{E_n\}$ 是**单调增加(减少)集列**。单调增加与单调减少的集列都称为**单调集列**。容易证明，单调集列是收敛的，且

若 $\{E_n\}$ 是单调增加的，则 $\lim\limits_{n}E_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$，

若 $\{E_n\}$ 是单调减少的，则 $\lim\limits_{n}E_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n$.

三、环和 σ 环

我们已经介绍了一个基本集 X 的某些子集所成的类的概念。这节将要介绍的环和 σ 环都是特殊的类。

定义 设X是基本集，$\mathscr{R}$是由X的某些子集所成的非空类，如果满足：

(i) $\forall A, B\in \mathscr{R}$即有 $A-B\in \mathscr{R}$;

(ii) $\forall A,B\in \mathscr{R}$即有$A\cup B\in \mathscr{R}$，

则称$\mathscr{R}$是一个**环**。

这就是说，环是对运算"差"及"和"封闭的非空类。特别地，如果环$\mathscr{R}$含有X本身，则称$\mathscr{R}$是一个**代数**。

注：1° 环总含空集，因$\mathscr{R}$非空，$\exists E\in \mathscr{R}$，$\varnothing=E-E\in \mathscr{R}$。

2° 环对"交"运算及"对称差"运算也封闭，因

$$A\cap B=A-(A-B),\quad A\triangle B=(A-B)\cup(B-A).$$

3° 若环是一个代数，则对"余"运算（对基本集X取余）也封闭。因 $E^c=X-E$。

如果(i)成立，而(ii)换为

(ii)′ $\forall A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots,\in \mathscr{R}$即有$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\in \mathscr{R}$，则称$\mathscr{R}$是一个**$\sigma$环**。

也就是说，σ 环就是对差的运算以及集合序列的和的运算封闭的非空类。特别地，如果σ 环$\mathscr{R}$含有X本身，则称$\mathscr{R}$是一个**σ代数**或**波莱尔**（Borel）**体**。

例 1 只含一个空集的单元素类$\{\varnothing\}$和由X的一切子集构成的类是σ 环的两个极端的例子。后者是一个σ 代数。

例 2 X的一切有限子集(包括空集)所成的类是一个环。当X本身是有限集时，这个类是一个σ 代数。

例 3 X是实数轴，$\mathscr{R}_0$是由X中的有限个左开右闭的有限区间的和集 $E=\bigcup_{i=1}^{n}(a_i, b_i]$(包括空集)全体所成的类，则$\mathscr{R}_0$是环。这里，$\mathscr{R}_0$对"和"运算的封闭性是显然的。至于$\mathscr{R}_0$中

任两个元素 E_1 与 E_2 的差，只要注意到如下事实——任意两个左开右闭的有限区间的差只可能是三种情况：或者是空集；或者是一个左开右闭的区间；或者是两个不相交的左开右闭的区间的和集——即可知，$\mathscr{R}_0$ 对"差"运算也是封闭的。因此 $\mathscr{R}_0$ 是个环。

注意，在例 3 中，如果把条件"左开右闭"改为"左闭右开"，那末仍然是个环。但是改为"开区间"就不行了。因为两个开区间的差集可以不再是一个开区间或开区间的和集。同样，改为"闭区间"也是不行的。

如果 $\mathscr{R}_1$，$\mathscr{R}_2$ 是两个环（它们的元素是同一个集 X 的子集），则 $\mathscr{R}=\mathscr{R}_1\cap\mathscr{R}_2$ 也是个环。因为 $\forall E_1,E_2\in\mathscr{R}$，即 $E_1,E_2\in\mathscr{R}_1$ 且 $E_1,E_2\in\mathscr{R}_2$，而 $\mathscr{R}_1$ 和 $\mathscr{R}_2$ 都是环，所以 $E_1\cup E_2$，$E_1-E_2\in\mathscr{R}_1$，又 $E_1\cup E_2,E_1-E_2\in\mathscr{R}_2$，因此 $E_1\cup E_2,E_1-E_2\in\mathscr{R}$，可得 $\mathscr{R}$ 是个环，更一般地，任意多个环的交集也是一个环。

定理 1.3 设 $\mathscr{E}$ 是集 X 的某些子集所成的类，则必存在唯一的一个环 $\mathscr{R}$，使得 $\mathscr{R}\supset\mathscr{E}$，并且对任意一个包含 $\mathscr{E}$ 的环 $\mathscr{R}_1$ 都有 $\mathscr{R}\subset\mathscr{R}_1$，即 $\mathscr{R}$ 是包含 $\mathscr{E}$ 的最小的环．称为**由 $\mathscr{E}$ 产生的环**。用 $\mathscr{R}(\mathscr{E})$ 表示。

证 因为由 X 的一切子集所成的类是一个环，这就说明了至少有一个包含 $\mathscr{E}$ 的环存在。此外，任意多个环的交仍是一个环。容易看出，包含 $\mathscr{E}$ 的一切环的交就是我们所求的环 $\mathscr{R}$。∎

类似地、可以定义由 $\mathscr{E}$ 产生的 σ 环。

§2 映　射

一、基本概念

本节介绍的"映射"和上节介绍的"集合"一样，都是近代数学的基本概念。

定义 设 A,B 是两个非空集。如果存在一个法则 f，通过它，对每个 $x\in A$，在 B 中有一个唯一确定的 y 与之对应，那么就说 f 是 A 到 B 的一个**映射**。记为

$$f: A\to B.$$

A 称为映射 f 的**定义域**。$f(A)=\{f(x);x\in A\}$ 称为映射 f 的**值域**。一般地有 $f(A)\subset B$。y 称为 x 在映射 f 下的一个**象**。记为 $y=f(x)$，并用符号

$$f: x\longmapsto y$$

表示。x 称为是 y 的一个**原象**。

当 A, B 都是实数集时，映射就是一元实变函数。所以映射概念可看成是数学分析中函数概念的推广。如果 A 是一般集、B 是数集，这种从一般集到数集的映射又称为**泛函**。例如，把积分区间 $[a,b]$ 固定，定积分就可看成是 $[a,b]$ 上的可积函数类到实数集的泛函。此外，微分运算可看成是可微函数全体组成的集到函数集中的映射的例子。当 $A=B$ 时，映射 $f: A\to A$ 又称为 A 中的**变换**。如几何上的旋转、平移、相似变换等等。

定义 设 f 是 A 到 B 的一个映射

(i) 如果 $\forall x_1, x_2\in A, x_1\neq x_2$，有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f 是 A 到 B 的**单映**（injection）或称**一一映射**（One-one mapping）。

(ii) 如果 $f(A)=B$，则称 f 是 A 到 B 的**满映**（surjection）或称 f 是 **A 到 B 上的映射**（onto mapping）。

(iii) 如果 f 既是 A 到 B 的单映，又是 A 到 B 的满映，则

称 f 为 A 到 B 的**双映**（bijection）或称 f 是 A 到 B 的**一一对应**。记为

$$f: A \longleftrightarrow B.$$

例如，$\mathscr{M}$代表基本集X的所有子集成的类。求余运算

$$f: A(\in \mathscr{M}) \longmapsto A^c \in \mathscr{M}$$

是$\mathscr{M}$到$\mathscr{M}$的双映。

设 $B_0 \subset B$，集$\{x; x\in A, f(x)\in B_0\}$ 称为 B_0 在 f 下的**逆象**，记为 $f^{-1}(B_0)$。

若 $A_0 \subset A$，$B_0 \subset B$，一般地有

$$f(f^{-1}(B_0)) = f(A) \cap B_0 \subset B_0,$$

$$f^{-1}(f(A_0)) \supset A_0.$$

可以证明，当 f 是 A 到 B 的满映时，$f(f^{-1}(B_0)) = B_0$；当 f 是 A 到 B 的单映时，$f^{-1}(f(A_0)) = A_0$，

设 f 是 A 到 B 的单映，由于对每个 $y \in f(A)$，有唯一的 $x \in A$，使 $f(x) = y$，这样就存在着从 $f(A)$ 到 A 的一个映射，记为

$$f^{-1}: f(A) \longrightarrow A.$$

f^{-1}称为映射 f 的**逆映射**。

显然，逆映射概念是数学分析中反函数概念的推广。

注 $f^{-1}(E)$指的是E在 f 下的逆象。现在，当 f 的逆映射 f^{-1} 存在且在E上有意义，$f^{-1}(E)$又可表示E在 f^{-1} 下的象，这时，它们指同一个集合。

类似于复合函数，我们也有复合映射的概念。设 $f: A \to B$，$g: B \to C$，则**复合映射** $g\circ f: A \to C$ 由下面关系式定义

$$\forall x \in A,\ (g\circ f)(x) = g(f(x)).$$

最后，我们提出下面的一些关于一族集合的和、交的象

和逆象的关系式.

设 $f: X \to Y$, $A_i \subset X$ $(i \in I)$, $B_i \subset Y$ $(i \in I)$, 这里 I 为指标集, 则

$$f(\bigcup_I A_i) = \bigcup_I f(A_i), \qquad f(\bigcap_I A_i) \subset \bigcap_I f(A_i),$$

$$f^{-1}(\bigcup_I B_i) = \bigcup_I f^{-1}(B_i), \qquad f^{-1}(\bigcap_I B_i) = \bigcap_I f^{-1}(B_i).$$

证 我们只证第一式, 而把其它的留作习题.

$$y \in f(\bigcup_I A_i) \Longleftrightarrow \exists x \in \bigcup_I A_i,\ f(x) = y.$$

$$\Longleftrightarrow \exists i \in I,\ \exists x \in A_i,\ f(x) = y.$$

$$\Longleftrightarrow \exists i \in I,\ y \in f(A_i).$$

$$\Longleftrightarrow y \in \bigcup_I f(A_i).$$

所以 $f(\bigcup_I A_i) = \bigcup_I f(A_i)$. ∎

二、直积集 映射的图象

定义 设 A, B 是任意两个集. 由 A 中的元素 a 与 B 中的元素 b 组成的有序对 $<a, b>$ 的全体所成的集称为 A 与 B 的**直积集**. 记为 $A \times B$.

$$A \times B = \{<a, b>; a \in A,\ b \in B\}.$$

例如: A 和 B 都是实数集 $\boldsymbol{R}$ 时, $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ 即坐标平面 R^2; 当 $A = \{x; a \leqslant x \leqslant b\}$, $B = \{y; c \leqslant y \leqslant d\}$ 时, $A \times B$ 是 R^2 中的一个长方形 $\{<x, y>; a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\}$.

定义 设映射 $f: A \to B$. 由 f 可确定 $A \times B$ 的一个子集

$$G = \{<x, f(x)>; x \in A\}.$$

G 称为映射 f 的**图象**.

当 $A \times B$ 为 $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ 时, 这个图象的概念和数学分析中一元函数的图象也是一致的.