大學教本

微積分學

ELEMENTS OF CALCULUS

by

WILLIAM ANTHONY GRANVILLE, PH. D., LL. D.

Formerly President of Gettysburg College

PERCEY F. SMITH, PH. D.

and

WILLIAM RAYMOND LONGLEY, PH. D.

Professors of Mathematics, Yale University

(1946 版)

周夢麐譯

龍門聯合書局發行

微積分學

Elements of Calculus
Granville, Smith, Longley
Ginn and Company 1946

譯者　周夢麐

出版者　嚴幼芝
上海茂名北路三〇〇弄三號
電話　三〇二七七

發行者　龍門聯合書局
上海河南中路二一〇號
電話　一七六七四
靜安寺支店
上海愚園路二三一號
電話　三二六八六

分售處　龍門聯合書局各地分局

北京分局	東安門大街82號
北京南城支店	琉璃廠103號
北京西城支店	西單福壽商場6號
重慶分局	中山一路368號
漢口分局	江漢一路3號
瀋陽分局	太原街40號
天津分局	羅斯福路308號
西安分局	東大街281號
南京總售處	太平路267號
廣州總售處	永漢北路204號
杭州分銷處	平海路102號
長沙分銷處	府正街36號

定價人民幣35,000元　外埠酌加郵運費

一九四八年十一月初版
一九五一年六月六版

12501–17500

原　　序

在此改訂本中，本書內容之重行排列僅爲一念所趨使，卽意欲竭其可能儘早獻呈微分學與積分學二者各類主要應用問題之基礎概念．因此乃僅於展示代數函數各種微分與積分公式之後，隨卽將此等應用問題立予提出．蓋如此庶可使學者於操縱之技術尚不繁雜時，卽易於聚精會神於其應用耳．惟相同之應用類型，另加若干他項問題，於其後研究三角函數，對數函數與指數函數時又復出現，良以此一重複實又有其特出之教育價值也．

此項重行排列之另一優點則呈現於學者之同時攻習物理與工程學程者之前，蓋於此等學程中，若早先熟諳積分學之中心概念，固大有裨益也．

本書之蒙廣泛採用已指明在其所含之內容中，可以無需作巨大之變更，故在正文及討論中，僅在少數處所之由經驗知其可能改進者有所更易．

若干問題均已更新，在每一處問題集中并曾致力改進其深淺程度．有一半以上之問題并已提供答案，而——特別在含有技巧訓練之情況中——此等答案通常每間一題卽提出一次．

由於對現時本書內容敍列之豐富經驗，用敢堅信，敎者必覺此改訂之本較以往各版大有進步也．

WILLIAM R. LONGLEY

弁　言

宇宙間的一切事物都在變動不居之中，而且"牽一髮而動全身"，沒有一件事情，一種東西是可以完全孤立，絲毫不受其他事物的影響，也影響於其他的事物的．因此，在研究牠們的時候，如欲獲得其全部的眞相，那就不能把牠們孤立起來作爲不變的靜的事物來處理了．十七世紀下期由牛頓，同時也由來布尼茲貢獻給世人的微積分學，在科學史上，所以能大放異彩，其故無他，也不過是因爲牠能把數學研究的對象——一切量 (quantity) 都看作是變動不居 (varying) 而又并非孤立的來處理；也就是說，牠能把原是變動不居，互有關聯的事物仍當作變動不居，互有關聯的來處理，從而也就能把一切事物的本身及其關聯更逼眞地表示出來罷了．牠自出世以來，在這二百多年中，日有進展，到現在已經成爲研究學問的一種不可缺少的工具．牠不獨在物理，化學和工程科學中已經立下了牢不可拔的基礎，就是在生理學，心理學，乃至於在經濟學，樂學中也都已建立了牠的橋頭堡．

微積分學之被介紹到中國來，用中國的文字與中國人相見，或自偉烈亞力與李善蘭合譯的"代微積拾級"始．那是在1859年出版的，距今已約九十年．其後到1874年又有傅蘭雅華蘅芳的微積溯源，1888年又有傅蘭雅的微積須知．入民國後，G. A. Osborne 的 Integral Calculus 以及他的 Introduction to Calculus; F. Kohlransch 的 Differential und Integralrachnung；長澤龜之助的微分積分學等也都被翻譯了過來．初期所出諸書，內容如何，現已不易得知，但在這科學日新月異的時代，我想要說牠們是落伍了，那是不應該有問題的．後來的幾本或失之於簡約，或太偏於應用．而且，在數量上，種類也極其微少．國人自編的更絕無僅有．我們雖可從他國文字所寫的書本得窺其眞相，但文字隔閡究爲一大障礙，因此，編著或者再翻譯幾本合適的微積分出版，實仍有其迫切的需要．筆者不敏，早在十數年前也就發下了這一宏願．因限於學力，不敢侈談編著，乃選取英文名教本，Gibson 的 An Elementary Treatise on the Calculus，利用當時工作的餘暇與蝴蝶山(廣西大學在梧州時代的校址)幽美的環境，從事迻譯；惟因時間有限，工作進行甚緩，其後又因從事廣西氣象事業的奠基工作，更無餘暇及此．再到抗戰爆發，由西南轉走西北，日唯衣食是謀，要想把原稿整理一下成其全功，竟不可能，至今仍認爲一大憾事！去秋來龍門，在 Murray 的 Introductory Course in Differential Equations 譯稿寫成後，承嚴幼芝先生之命，用淺顯的文言來翻譯本書，可說正中下懷．Gibson 的一本旣然無法問世，能有這本來代替不也一樣地可以爲我了願嗎？我於是就帶着興奮的心情於去年8月11日動手，到10月18日把牠譯完．心頭輕鬆之感，眞是無可言宣！

這本書的原著，本出自曾任 Gettysburg 學院院長的 William Anthony Granville 一人之手，嗣經 Yale 大學數學教授 Percey F. Smith 與 William Raymond Longley 爲之增訂，至今日乃以三氏合著聞名．原書自1904年(?)出版以來，銷行極廣；二十年來，中國各大學採用的也數不勝數．這成功并不是毫無理由的．據 Smith 與 Longley 在有一次增訂版的序

言中說，使牠能大獲成功的原因，那是由於原作有幾個特色：行文簡潔，例題多而又富於能使人獲得練習技巧與引人入勝的問題．筆者於細讀本書之後，除具有同感外，更覺牠不斷的增訂乃至於改編，使牠能不固步自封，追隨時代，這又何嘗不是牠始終暢銷的理由！據原書版權頁所載，自 1904 年 Smith 參與改訂以後，1911 年復有所更新．嗣後，在 1929，1934，1941 諸年又歷有增删，而參與其事者，除 Smith 外，又有了 Longley．現在筆者所根據的原本，就已經是牠的第六次改訂了的版本 (1946 年版) 哩．

這一次的改訂，完全出自 Longley 之手．和以前各版比較起來，可以說面目全新．以往各次改訂，不過內容稍有增删 (如 1941 版較 1934 年者删去了 Integraph 與 Polar Planimeter 的一章，而新加了 "Hyperbolic Function" 一章，同時又加了些關於經濟學的應用問題，以及新引用柱面坐標以推廣二重積分的應用)；這一版則大改編排，把微分學與積分學兩部分混合編制，除將 1941 版的第 12 章 (積分法．標準基本型之積分規則) 分爲兩章，就是現在的第 8 章和第 16 章；把本來的第 18 章(形心，流體壓力及其他應用問題)删去，而把這些材料歸併在 "積分法爲求和法" 一章中外，各章的次序也大有出入；現在爲便於持有 1941 版原本的讀者起見，特列一最近兩版對照表如下，以資參考：

1941 版	1-6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19-27 章
1946 版	1-6	12	13	7	14	15	8,16	9	10	11	17	18	—	19-27 章

經過了這樣大的變更，所以連書名也都弄得由 "Elements of the Differential and Integral Calculus" 變而爲 "Elements of Calculus" 了．

在進行翻譯的時候，心中曾經訂立了幾個原則：

(1)不删節　嘗見有些譯者把不容易譯，自已譯不出來的地方，尤其是綜子句與短語，往往捨而不譯，這有時還無傷大雅，但有些地方，卽或是一字一語的省略，也可以使意義大有出入．所以筆者歷來的主張是有字必譯，寧可譯錯．因爲卽使譯錯了，明眼人也還看得出來，指得出來，終有改正的一日；不譯，則弄得連明眼人甚至於也能遭受蒙蔽，忽略過去，使未看原文者永遠見不到眞相．但也有例外之處：如數學書中所常有的 "we find……" 這種句子，爲免嚕囌起見，這其中的 "we" 字，往往略而不譯；再如有些章節的標題，爲簡明起見，也往往有所删節．

(2)句句對譯　這樣可使原作者的筆調大致尚得保存，同時對於願意對照原文閱讀的讀者也不無小補，所以除非照原文次序譯出，太西化了，不易讀懂，那才把整段的字句重新加以組織．

(3)語法力求中國化　翻譯的目的原在便於中國讀者的閱讀，若語法不盡中國化，則必使讀者感覺困難．因此盡可能地求譯文語法的中國化．如微積分中常用的 "differentiate……with respect to……") 一語，嘗見有人譯作 "關於……微分……"，讀來總覺不甚適合，我則譯之爲 "以……爲準微分……"．但 "……is a differential with respect to……" 一語，則仍譯爲 "……爲關於……之微分"

(4)盡力保持原文說法　數學物理學中除專門名詞外，往往有些事情也有其特殊的說法．遇

到這種情形，譯者未嘗不可照牠的意思譯出來（所謂意譯），但這究與原文格調不合，所以我仍竭力地保持其原狀，在不違反語法力求中國化的原則下，直譯出來，而在不易明白的地方，再另加註釋，以助讀者了解．第 415 頁所說 "uniquely determined" 就是一例．這種特殊說法的直譯，我認爲是有其必要的，正和中國原來沒有的，有些專門名詞之必須介紹到"中文"的領域中來一樣．日子一久，牠也就自然而然地爲人們所了解，不再感覺格格不入了．

(5) 專門名詞盡量以部頒各種名詞爲準　這十幾年來教育部很頒佈過些經過了專家審查的名詞，如"數學名詞"，"物理學名詞"都已有了定本．這些"名詞"中的名詞是否完全譯得恰當，那是另一問題，但在未有改訂的版本以前，爲便於教者學者起見，我認爲仍以不另起爐灶爲是．所以一向譯書都以牠們爲根據，只有在用來太不合適的地方，才偶一改動；在其中漏略了的地方（見書末所附英漢名詞對照表），才就常見者取用，或自行杜撰．

這幾點說穿了，其實也不過"信""達"兩字．究竟有沒有達到？牠們本身有無問題？那只有請高明的讀者來批判罷．

Granville, Smith 與 Longley 三氏的這本書，據譯者所知，前曾有王壽南，李士奇先後翻譯過，後來在抗戰期中，據聞成都某書店又曾出過一種譯本．王氏所譯和成都所刊的兩種，筆者都沒見過，想來都是根據 1934 前的版本譯的，與根據 1946 版翻譯的本書，大致不會衝突．李氏譯本出版於 1936 年，自然也是據根 1934 前的原版譯的；譯筆如何，筆者因爲沒有對照原文，仔細讀過，不敢妄下批評，但在我翻譯新版遇有疑難，想去向牠求教的時候，牠不是逃避了過去，就是給我以不滿意的，甚至於錯誤的答案．牠唯一給我的啓示，就是一個譯者的如何可以避重就輕，但這又是違反我的原則，不願領教的．

還有要聲明一下的，就是原書的索引，我沒有照有些時賢的妙法，仍依英文字母的次序排列．這忠實是忠實了，但不便於譯本的讀者何！譯本的索引當然應該依漢文的次序排，否則反不如沒有爲妙（有些譯本是略而不備的）．我的辦法是主要的名詞依筆劃多寡排列，筆劃相同的則依部首的次序排列．主要名詞下的細節則先排此主要名詞領前者，繼排其居中者，最後排其殿後者．這樣重排一過吃力是吃力的，但我們不能因爲要自己省力，而叫更多的讀者去吃力啊．

譯者學力有限，荒疏已久，加以時間倉卒，偶有疑難，亦不容效前人作竟夕之推敲；稿成後雖蒙范會國教授爲我校閱一通，排好後於校對時雖又數度修改，但不妥之處，仍然在所難免；原書排印之誤，經我看出改正的雖已不少，但未經發現的，或者還有，這些都希望教者學者於教學之時能對正原本爲我一一指明，進而教之，使再版時能以訂正，幸甚感甚！嚴正的批評，我想任何譯者都是會樂於接受的，最怕的是遭受漠視．但在目前的情況下，一種科學教材的譯本要不遭受漠視，那才是例外．因此我願藉此機會對於漠視譯本一點，再說幾句，以就正於高明！

今日大學中頗有一種不太好的現象，那就是無論那一科總喜歡採用西文原著，對譯本則大多漠視．這我認爲是極不合理的．這實在是落後國家所特有的現象．中國除非不想長進，永遠甘於作次殖民地則已，否則這現狀總有一天打破的．一個獨立自主的國家能說自已沒有一套用

本國的文字寫出來，或者翻譯出來的大中學教科用書嗎? 這我敢說是誰也不會給以否定的答覆的. 那末今日之下，爲什麼會有譯本而不用，仍採用西文原著呢? 我想來想去總想不出一個像樣子的答案來! 我曾經聽人說，漢文的譯本往往反不如西文原本容易懂，所以不如直捷了當，仍讀原文. 這據我看是不合事實的，譯文卽使譯得深奧艱澀，我不相信揣摩起來會比揣摩外國語文還難. 原本如果竟眞地如此較譯本更易爲學者所領悟，那翻譯就不會被人認爲是難事，吃力而難討好的事，一個從事翻譯的人也就用不着大傷腦筋，甚至於爲一字一句"踟躕竟夕"了. 一個極有學養的專家，翻譯出來的東西有時還難免不出毛病，要說一位初學者讀起原文來竟較讀譯本容易理解，那眞只有天曉得了. 不過，這樣一說呢，又未免予人以可乘之隙. 有人說，譯本難免有誤，不如還讀原本，似乎就是由此出發的. 但這一理由我認爲仍然立脚不住. 第一，說這話的人，心中未免存了一個"原本至上"的心理，認爲原本絕對無誤. 這又何嘗合乎事實. 據聞朱公謹先生在譯 Courant 的名著 Differential-und Integral-Rechnung 的時候，就曾代牠訂正了不少的錯誤，而且獲得了原作者的嘉許. 我這庸俗的譯匠，在翻譯本書與 Murray 的 Differential Equations，以及前此翻譯 D. Brunt 的 Meteorology 的時候，也都爲牠們訂正了好些或大或小的錯誤. 原本的這些錯誤，明智的讀者以往或已發現，但一經發現與指明，仍然照舊可以用來教學，并未因牠們的偶一有誤而竟棄之不顧. 這同樣的態度，難道就不能拿來對待卽或偶有錯誤的譯本嗎? 其次說這話的人也未免沒有估計到這樣的一個問題，就是:——學者從錯誤的譯本上所受到的不良結果并不一定會比他因文字隔閡，誤解原文而惹致的惡果來得多呀. 事實上，據筆者校閱他人譯作的經驗，譯本上譯錯的地方也往往就是原本上難解的地方. 以初學去讀那些難解的地方也同樣地會誤解了原意的. 何况譯本在這些地方因爲譯者多少對這一部門用過點功夫，并不一定把牠們譯錯. 第三，再說吧，一個譯本卽使錯誤很多，教者與學者也儘可以盡量地指出牠錯誤的所在，讓譯者有機會在下一版出書的時候訂正. 只要教者學者肯用，我相信一本流行的教本的再版，三版……，說得具體些，每學期或每學年一版，絕不是難遇的事；這一年用的雖是有錯誤的譯本，到第二年，第三年以後不就有了錯誤日少，甚或沒有錯誤，比原本更沒有錯誤的譯本了嗎? 而且，如果有更高明者，對這譯本實在看不過去，也儘可另起爐灶，取而代之，務使每一流行教本有一種公認的譯本而後已. 這樣不出三年五載，大學中普通課程常採原本不用譯本的這一不合理的現象不也就可以打破了嗎? 筆者不敏，謹馨香禱之!

這本書總算由譯而排而校而印，以短短略近一年的功夫，不日可以和讀者見面了. 譯者由此了卻一樁心願，這不能不說是足以快慰的事. 但在這戰雲彌漫，大學生連飯都吃不飽，出版業也正遭逢着惡運的時候，這嫩弱的幼芽能否獲得牠足夠的營養，那就難說了. 然而，本文開頭時不是說過嗎，一切的事物都在變動不居之中! 目前也正是舊的已在蛻變，新的正在孳生；晨鷄三唱，黎明不遠，到了大家不愁飯吃，人人都有書讀，一切人都能爲建設新中國而努力，出版業重臨牠的春天的時候，我這嫩弱的幼嬰還怕牠不突然地健壯起來嗎? 我因此又無限地興奮了.

周 麥 慶　　1948年8月10日

SIR ISAAC NEWTON

牛　頓

目　次

第一章　公式彙集

第二章　變數函數與極限

第三章　微分法

第四章　代數式微分規則

第五章　導數之各種應用

第六章 逐次微分法及其應用

第七章 微分

第八章 簡式積分法

第九章 積分常數

第十章 定積分

第十一章 積分法為求和法

第十二章 超越函數微分法及其應用

第十三章　參數方程式極標方程式與根

第十四章　曲率．曲率半徑與曲率圓

第十五章　均值定理及其應用

第十六章　標準基本型之積分法及其應用

第十七章 各種形式積分法

第十八章 簡化公式．積分表之應用

第十九章 級數

第二十章 函數之展開

第二十一章 常微分方程式

第二十二章 雙曲線函數

第二十三章 偏微分法

第二十四章　偏導數之應用

第二十五章　多重積分

微積分學

第一章　公式彙集

1. **初等代數學及幾何學中之公式．** 爲便利學者起見，吾人特於第 1-4 節中提出以下數種公式一覽表．現先由代數學中者開始．

(1) 二次方程式．　　$Ax^2+Bx+C=0$.

〔解法〕 1．因子分解法：分解 Ax^2+Bx+C 爲二因子，使二因子各等於零，再就 x 解之．

2．配方法：將 C 移項，以 x^2 之係數除全式，再於兩端各加 x 係數之一半的平方，并求其平方根．

3．用公式：

$$x=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}.$$

〔根之性質〕 公式中根號下 B^2-4AC 一式稱爲判別式．兩根之爲實數而不相等，或爲實數而相等，或爲虛數，依此判別式之爲正，爲零，或爲負而定．

(2) 對數．

$$\log ab=\log a+\log b. \qquad \log a^n=n\log a. \qquad \log 1=0.$$

$$\log\frac{a}{b}=\log a-\log b. \qquad \log\sqrt[n]{a}=\frac{1}{n}\log a. \qquad \log_a a=1.$$

(3) 二項定理（n 爲正整數）．

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}a^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}}a^{n-3}b^3+\cdots$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)}{\underline{|r-1}}a^{n-r+1}b^{r-1}+\cdots.$$

(4) 階乘數．　　$n!=\underline{|n}=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots(n-1)n.$

在下列初等幾何學公式中，r 或 R 指半徑，a 指高度，B 指底面積，而 s 指斜高．

(5) 圓．圓周 $=2\pi r$．面積 $=\pi r^2$．

(6) 扇形．面積 $=\frac{1}{2}r^2\alpha$，此處之 $\alpha=$ 扇形之圓心角，以弳 (radian) 計之．

(7) 稜柱．體積 $=Ba$．

(8) 稜錐．體積 $=\frac{1}{3}Ba$．

(9) 直立圓柱．體積 $=\pi r^2 a$．側面積 $=2\pi ra$．全面積 $=2\pi r(r+a)$．

(10) 直立圓錐．體積 $=\frac{1}{3}\pi r^2 a$．側面積 $=\pi rs$．全面積 $=\pi r(r+s)$．

(11) 球．體積 $=\frac{4}{3}\pi r^3$．球面 $=4\pi r^2$．

(12) 直立圓錐墩．體積 $=\frac{1}{3}\pi a(R^2+r^2+Rr)$．側面積 $=\pi s(R+r)$．

2．**平面三角學中之公式．** 下列諸公式中，大部分均頗有用．

(1) 角之度量．角之大小，其量度有二種通用之法；亦即，有兩種單位角之謂也．

〔度量法〕其單位角為一全周之 $\frac{1}{360}$，稱為一度．

〔弳量法〕其單位角乃一所對弧與該弧半徑相等之角，稱為一弳．

此二單位角間之關係可得之於方程式

$$180\ 度=\pi\ 弳\ (\pi=3.14159\cdots),$$

解之，得

$$1\ 度=\frac{\pi}{180}=0.0174\cdots 弳；$$

$$1\ 弳=\frac{180}{\pi}=57.29\cdots 度．$$

由上述定義，復得

$$一角之弳數=\frac{所對弧}{半徑}.$$

此數方程式使吾人能由某一度量換為另一度量．

(2) 關係式．

$$\operatorname{ctn} x=\frac{1}{\tan x};\ \sec x=\frac{1}{\cos x};\ \csc x=\frac{1}{\sin x}.$$

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x};\ \operatorname{ctn} x=\frac{\cos x}{\sin x}.$$

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1;\ 1+\tan^2 x=\sec^2 x;\ 1+\operatorname{ctn}^2 x=\csc^2 x.$$

(3) 化角公式.

角	正弦	餘弦	正切	餘切	正割	餘割
$-x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\tan x$	$-\operatorname{ctn} x$	$\sec x$	$-\csc x$
$90^\circ-x$	$\cos x$	$\sin x$	$\operatorname{ctn} x$	$\tan x$	$\csc x$	$\sec x$
$90^\circ+x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\operatorname{ctn} x$	$-\tan x$	$-\csc x$	$\sec x$
$180^\circ-x$	$\sin x$	$-\cos x$	$-\tan x$	$-\operatorname{ctn} x$	$-\sec x$	$\csc x$
$180^\circ+x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\tan x$	$\operatorname{ctn} x$	$-\sec x$	$-\csc x$
$270^\circ-x$	$-\cos x$	$-\sin x$	$\operatorname{ctn} x$	$\tan x$	$-\csc x$	$-\sec x$
$270^\circ+x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\operatorname{ctn} x$	$-\tan x$	$\csc x$	$-\sec x$
$360^\circ-x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\tan x$	$-\operatorname{ctn} x$	$\sec x$	$-\csc x$

(4) $(x+y)$ 及 $(x-y)$ 之函數.

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y.$$
$$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y.$$
$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y.$$
$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y.$$
$$\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}.\quad \tan(x-y)=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}.$$

(5) $2x$ 及 $\frac{1}{2}x$ 之函數.

$$\sin 2x=2\sin x\cos x;\ \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x;\ \tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}.$$
$$\sin\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}};\ \cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}};\ \tan\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}.$$
$$\sin^2 x=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cos 2x;\ \cos^2 x=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\cos 2x.$$

(6) 加法定理.

$$\sin x+\sin y=2\sin\tfrac{1}{2}(x+y)\cos\tfrac{1}{2}(x-y).$$
$$\sin x-\sin y=2\cos\tfrac{1}{2}(x+y)\sin\tfrac{1}{2}(x-y).$$
$$\cos x+\cos y=2\cos\tfrac{1}{2}(x+y)\cos\tfrac{1}{2}(x-y).$$
$$\cos x-\cos y=-2\sin\tfrac{1}{2}(x+y)\sin\tfrac{1}{2}(x-y).$$

(7) 任意三角形之關係.

〔正弦定律〕 $$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

〔餘弦定律〕 $$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

〔面積公式〕 $$K=\tfrac{1}{2}bc\sin A.$$

$$K=\frac{\frac{1}{2}a^2\sin B\sin C}{\sin(B+C)}.$$

$$K=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},\quad \text{此處 } s=\tfrac{1}{2}(a+b+c).$$

3. 平面解析幾何學中之公式. 以下列出者乃較爲重要之公式.

(1) 二點 $P_1(x_1, y_1)$ 及 $P_2(x_2, y_2)$ 間之距離.

$$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

〔P_1P_2 之斜率〕 $$m=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}.$$

〔中點〕 $$x=\tfrac{1}{2}(x_1+x_2),\quad y=\tfrac{1}{2}(y_1+y_2).$$

(2) 二直線間之角.

$$\tan\theta=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}.$$

(如二線平行,則 $m_1=m_2$; 如二線垂直,則 $m_1m_2=-1$.)

(3) 直線之方程式.

〔點斜式〕 $$y-y_1=m(x-x_1).$$

〔斜截式〕 $$y=mx+b.$$

〔兩點式〕 $$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

〔截距式〕 $$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

(4) 由直線 $Ax+By+C=0$ 至 $P_1(x_1, y_1)$ 之垂直距離.

$$d=\frac{Ax_1+By_1+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

(5) 直角坐標與極坐標間之關係.

$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta,\quad \rho=\sqrt{x^2+y^2},\quad \theta=\operatorname{arc\,tan}\frac{y}{x}.$$

(6) 圓之方程式.

〔圓心 (h, k)〕 $$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2.$$

(7) 拋物線之方程式.

〔頂點在原點〕 $$y^2=2\,px,\quad \text{焦點}\ (\tfrac{1}{2}\,p,\ 0).$$
$$x^2=2\,py,\quad \text{焦點}\ (0,\ \tfrac{1}{2}\,p).$$

〔頂點 (h, k)〕 $$(y-k)^2=2\,p(x-h),\ \text{軸爲}\ y=k.$$
$$(x-h)^2=2\,p(y-k),\ \text{軸爲}\ x=h.$$

〔軸爲 y-軸者〕 $$y=Ax^2+C.$$

(8) 其他曲線之方程式.

〔中心在原點而焦點在 x-軸上之橢圓. $(a>b)$〕

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$