

# GEOMETRY TREASURE

500 FAMOUS QUESTIONS AND  
1000 THEOREMS IN PLANE GEOMETRY

## 几何瑰宝

平面几何500名题暨1000条定理

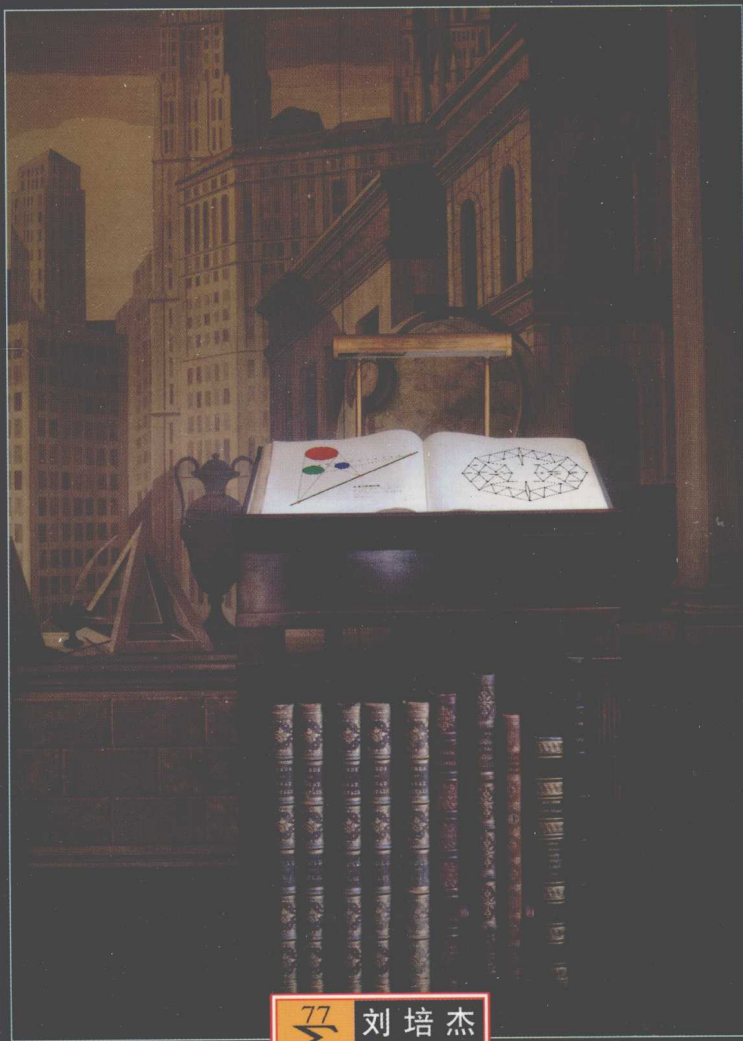
(下)

沈文选 杨清桃 编著



哈尔滨工业大学出版社  
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

# 几何大师 扛鼎之作



$\sum_{i=0}^{77}$  刘培杰  
数学工作室

图片来源：《早稻》

策划编辑 刘培杰  
责任编辑 唐 蕾  
封面设计 孙茵艾

哈尔滨工业大学出版社 刘培杰数学工作室  
联系地址：哈尔滨市南岗区复华四道街10号  
邮 编：150006  
联系电话：0451-86281378 13904613167  
E-mail: lpj1378@yahoo.com.cn

ISBN 978-7-5603-3012-9



9 787560 330129 >

定价 138.00元(上、下)

上架建议：平面几何/数学竞赛/数学科普

# GEOMETRY TREASURE

500 FAMOUS QUESTIONS AND 1000 THEOREMS IN PLANE GEOMETRY

# 几何瑰宝

平面几何500名题暨1000条定理(下)

沈文选 杨清桃 编著



哈尔滨工业大学出版社  
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

## 内 容 简 介

本书共有三角形、几何变换,三角形、圆,四边形、圆,多边形、圆,以及最值,作图,轨迹,完全四边形,平面闭折线,圆的推广十个专题,对平面几何中的 500 余颗璀璨夺目的珍珠进行了系统地、全方位地介绍,其中也包括了近年来我国广大初等几何研究者的丰硕成果.

本书中的 1 000 余条定理可以广阔地拓展读者的视野,极大地丰厚读者的几何知识,可以多途径地引领数学爱好者进行平面几何学的奇异旅游,欣赏平面几何中的精巧、深刻、迷人、有趣的历史名题及最新成果.

该书适合于广大数学爱好者及初、高中数学竞赛选手,初、高中数学教师和数学奥林匹克教练员使用,也可作为高等师范院校数学专业开设“竞赛数学”,“中学几何研究”等课程的教学参考书.

### 图书在版编目(CIP)数据

几何瑰宝:平面几何 500 名题暨 1000 条定理. 下/  
沈文选,杨清桃编著. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2010.7

ISBN 978 - 7 - 5603 - 3012 - 9

I . ①几… II . ①沈…②杨… III . ①平面几何 - 习题  
②平面几何 - 定理(数学) IV . ①O123.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 078575 号

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 唐 蕾

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451 - 86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司

开 本 787mm×960mm 1/16 印张 73.25 字数 1 315 千字

版 次 2010 年 7 月第 1 版 2010 年 7 月第 1 次印刷

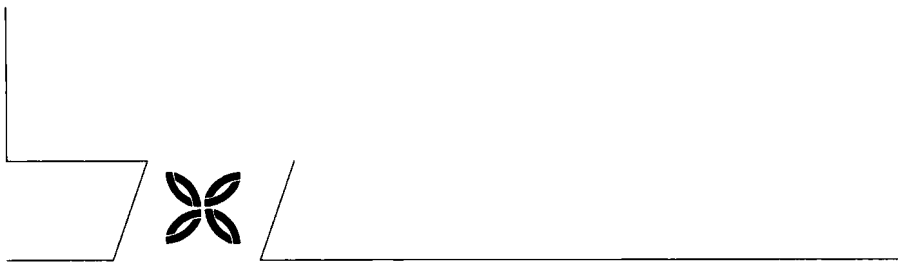
书 号 ISBN 978 - 7 - 5603 - 3012 - 9

印 数 1 ~ 3 000 册

定 价 138.00 元(上,下)

---

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)



## 目 录

### 三、四边形、圆 /1

- ★ 简单四边形面积的贝利契纳德公式 /1
- ★ 平面四边形的面积公式 /3
- ★ 凸四边形的面积公式 /6
- ★ 圆内接四边形的面积问题 /9
- ★ 凸四边形顶点处的有关点、线问题 /11
- ★ 凸四边形分割图形面积关系式 /12
- ★ 凸四边形的正弦、余弦、射影定理 /17
- ★ 非圆内接平面四边形的类正弦、余弦、射影定理 /18
- ★ 凸四边形的类Ⅰ型余弦、正弦定理 /20
- ★ 凸四边形的类Ⅱ型余弦定理 /21
- ★ 对角线垂直的凸四边形的八点圆定理 /23
- ★ 对角线垂直的平面四边形的八点圆定理 /24
- ★ 对角线垂直的凸四边形垂足等角共轭点定理 /24



## 2

- ★ 凸四边形中的等角共轭点问题 /25
- ★ 平面四边形对角线垂直的一个充要条件 /27
- ★ 四点勾股差的性质定理 /28
- ★ 平面四边形各边的中点问题 /28
- ★ 空间四边形余弦定理 /29
- ★ 简单四边形的余弦定理 /30
- ★ 平行四边形的余形定理 /32
- ★ 凸四边形为平行四边形的两个充要条件 /33
- ★ 平行四边形为矩形的一个充要条件 /34
- ★ 简单四边形重心性质定理 /35
- ★ 简单四边形重心坐标公式 /37
- ★ 平面四边形的欧拉定理 /39
- ★ 平面四边形的热尔岗定理 /40
- ★ 梯形的施坦纳定理 /41
- ★ 梯形的中线长公式 /42
- ★ 梯形的中位线定理 /42
- ★ 梯形中位线定理的推广 /43
- ★ 梯形的重心定理 /45
- ★ 筝形蝴蝶定理 /46
- ★ 四边形蝴蝶定理 /47
- ★ 四边形蝴蝶定理的推广 /48
- ★ 四边形蝴蝶定理的演变 /50
- ★ 四边形坎迪定理 /50
- ★ 四边形坎迪定理的推广 /53
- ★ 凸四边形四顶点组成的三角形问题 /56
- ★ 简单四边形四顶点组成的三角形重心四边形定理 /57
- ★ 凸四边形四顶点组成的三角形的内(旁)心四边形定理 /59
- ★ 西姆森定理 /61



- ※ 西姆森线的性质定理 /62
- ※ 共线点的萨蒙定理 /72
- ※ 西姆森定理的推广 /72
- ※ 清宫定理 /75
- ※ 卡诺定理 /76
- ※ 奥倍尔定理 /77
- ※ 奥倍尔定理的一个推广 /77
- ※ 托勒密定理 /79
- ※ 托勒密不等式与托勒密定理的逆定理 /82
- ※ 托勒密定理的推广 /83
- ※ 凯西定理(一) /87
- ※ 勾股定理的拓广 /88
- ※ 凸四边形为圆内接四边形的几个充要条件 /90
- ※ 萨蒙圆问题 /91
- ※ 圆内接四边形的边与对角线关系定理 /92
- ※ 蝴蝶定理 /96
- ※ 直线对上的蝴蝶定理 /102
- ※ 坎迪定理 /103
- ※ 蝴蝶定理、坎迪定理的推广 /103
- ※ 圆内接四边形的余弦定理 /110
- ※ 圆内接四边形的垂心定理 /111
- ※ 婆罗摩笈多定理 /113
- ※ 婆罗摩笈多定理的推广 /115
- ※ 对角线互相垂直的圆内接四边形问题 /118
- ※ 调和四边形问题 /124
- ※ 圆内接四边形的相关四边形定理 /131
- ※ 圆内接四边形的富尔曼定理 /137
- ※ 卡塔朗定理 /138



- ★ 形心圆 /139
- ★ 四边形内接于圆与其三角形切圆半径相关的定理 /140
- ★ 圆内接四边形的特殊点与圆上一点的定值问题 /143
- ★ 折四边形问题 /148
- ★ 圆外切简单四边形问题 /149
- ★ 与外切于圆的凸四边形的边平行的直线问题 /152
- ★ 牛顿定理 /153
- ★ 富斯定理 /158
- ★ 双圆四边形问题 /162
- ★ 盐窖形定理 /172
- ★ 阿波罗尼斯圆定理 /173
- ★ 阿氏圆的性质定理 /173
- ★ 鞋匠皮刀形问题 /175
- ★ 两圆的麦比乌斯定理 /177
- ★ 雅可比定理 /177
- ★ 约翰逊定理 /178
- ★ 帕斯卡定理 /178
- ★ 布利安香定理 /181
- ★ 三角形的密克尔点定理 /183
- ★ 五点圆问题 /184
- ★ 六点圆问题 /185
- ★ 七点圆问题 /191
- ★ 八点圆问题 /193
- ★ 三角形的杜洛斯-凡利圆 /195
- ★ 杜洛斯-凡利圆的推广 /198
- ★ 三角形的第一莱莫恩圆 /199
- ★ 三角形的第二莱莫恩圆 /200
- ★ 三角形的图克圆 /200





- ★ 图克圆系问题 /201
- ★ 三角形的余弦圆问题 /202
- ★ 三角形的三乘比圆问题 /203
- ★ 三角形的重圆 /205
- ★ 哈格六点圆定理 /205
- ★ 哈格七点圆定理 /206
- ★ 三角形的泰勒圆 /207
- ★ 三角形的富尔曼圆 /209
- ★ 三角形的曼海姆定理 /210
- ★ 三角形的极圆问题 /211
- ★ 逆相似圆问题 /212
- ★ 布罗卡尔几何的推广问题 /213
- ★ 正三角形问题 /214
- ★ 爱可尔斯定理 /216
- ★ 爱可尔斯定理的推广 /217
- ★ 三圆的相似轴问题 /220
- ★ 圆心共线的三圆问题 /220
- ★ 三圆相切中的平行线问题 /221
- ★ 圆内的切圆问题 /224
- ★ 相切八圆问题 /225
- ★ 施坦纳链问题 /226
- ★ 凯西定理(二) /228
- ★ 圆链问题 /230
- ★ 克利福德链定理 /231
- ★ 相离两圆中的矩形问题 /243
- ★ 日本神庙塔壁上的铭刻圆问题 /244
- ★ 古钱币定理 /245
- ★ 四点形中的九点圆共点定理 /246



6

\* 多圆共点问题 /247

**四、多边形、圆 /253**

\* 平行六边形定理 /253

\* 中心对称凸六边形定理 /256

\* 菱六边形问题 /257

\* 戴维斯定理 /261

\* 空间  $n$  边形余弦定理 /261\* 凸  $n$  边形的重心定理 /263\*  $n$  边形中的莱布尼兹定理 /265\* 凸  $n$  边形中  $(n-1)$  边形的重心  $n$  边形定理 /266

\* 凸多边形中的布罗卡尔点(角)问题 /267

\* 凸  $n$  边形特殊线段共点定理 /268\* 等角双斜线  $n$  边形定理 /276\* 两全等的等角  $2n$  边形定理 /279\* 圆内接凸  $n$  边形中的定值问题 /282\* 正  $n$  边形中的定值问题 /283\* 圆内接凸  $n$  边形中的定点问题 /284\* 凸  $n$  边形与其切点  $n$  边形的面积问题 /286\* 圆的内接、外切凸  $n(n \geq 4)$  边形问题 /288**五、最值 /290**

\* 光反射定理 /290

\* 光反射定理的推广 /291

\* 阿尔哈森弹子问题 /293

\* 法格纳诺问题(一) /295

\* 圆内接四边形的周长最小的内接四边形 /297

\* 费马最小时间原理 /298

\* “胡不归”问题 /299

\* 三角形中的极值点问题 /300



- ※ 法格纳诺问题(二) /301
- ※ 华生问题 /303
- ※ 正多边形上距离和最大的点 /304
- ※ 圆内接四边形边上距离和最大的点 /306
- ※ 平面多边形边上的极限点 /308
- ※ 三角形内接正方形的边长最值问题 /311
- ※ 三角形的外接正三角形面积最大值问题 /313
- ※ 三角形外接正方形的边长最值问题 /315
- ※ 三角形的广义内接正方形问题 /317
- ※ 定角内的三角形面积最小问题 /318
- ※ 锐角扇形内的面积最大的正方形问题 /319
- ※ 一类矩形面积的最大值问题 /322
- ※ 平面等周定理 /324
- 六、作图 /327**
- ※ 黄金分割 /327
- ※ 黄金分割的几何作法 /329
- ※ 黄金几何图形 /333
- ※ 三等分任意角是尺规作图不能问题 /340
- ※ 可以用尺规三等分的角的问题 /341
- ※ 有刻度直尺法三等分角 /342
- ※ 圆积曲线法三等分角 /342
- ※ 阿基米德螺线法三等分角 /343
- ※ 蚌线法三等分角 /344
- ※ 双曲线法三等分角 /344
- ※ 蚶线法三等分角 /345
- ※ 三等分曲线法三等分角 /346
- ※ “战斧”法三等分角 /346
- ※ 无限等分逼近三等分角 /347



- ※ 化圆为方是尺规作图不能问题 /347
- ※ 圆积曲线法化圆为方 /347
- ※ 阿基米德螺线法化圆为方 /348
- ※ 圆柱侧面法化圆为方 /348
- ※ 三角形法化圆为方 /349
- ※ 印度耆那教人化方为圆 /349
- ※ 立方倍积是尺规作图不能问题 /350
- ※ 双比例中项法立方倍积 /350
- ※ 滑动长方形板法立方倍积 /351
- ※ 蚌线法立方倍积 /351
- ※ 蔓叶线法立方倍积 /353
- ※ 圆和双曲线法立方倍积 /354
- ※ 圆和抛物线法立方倍积 /354
- ※ 等分三角形面积的直线 /355
- ※ 等分平面四边形面积的直线 /356
- ※ 同时平分四边形的周长和面积的直线 /357
- ※ 作过圆外一点平分圆周的直线 /359
- ※ 三角形内二等圆问题 /359
- ※ 阿波罗尼斯比例截线问题 /361
- ※ 简单四边形重心的几何作法 /362
- ※ 梯形重心的几何作法 /363
- ※ 三角形共轭重心的格雷贝作图法 /365
- ※ 四型费马点的作法 /366
- ※ 卡芬克尔作图问题 /370
- ※ 等分圆周问题 /371
- ※ 五等分圆的画法 /372
- ※ 已知一边作正五边形问题 /373
- ※ 十等分圆的画法 /374



- ★ 七等分圆周是尺规作图不能问题 /375
- ★ 阿基米德和他的《正七边形作法》 /376
- ★ 圆内接正七边形的作图 /377
- ★ 正十七边形作图问题 /377
- ★ 正  $n$  边形近似作图法 /381
- ★ 任意三角形的内接正三角形的作图 /382
- ★ 直角三角形的外接正三角形的作图 /384
- ★ 三角形外接正方形的作图 /385
- ★ 三角形内接正方形的作法 /386
- ★ 凸四边形的外接正方形的作法 /387
- ★ 三角形正则点的尺规作图 /387
- ★ 帕普斯问题 /389
- ★ 作三内角等于已知角的三角形 /390
- ★ 费马作图问题 /390
- ★ 作三边均过一已知点的圆内接三角形 /392
- ★ 已知三条高作三角形 /393
- ★ 已知两边中点及垂心作三角形 /394
- ★ 已知一边的高、中线及其余两边的差作三角形 /394
- ★ 已知底边及底角平分线作等腰三角形 /395
- ★ 已知四边长作圆内接凸四边形 /396
- ★ 过各边中点作五边形 /396
- ★ 作与已知三圆相切的圆 /397
- ★ 作三角形内与两边相切且两两外切的三圆 /399
- ★ 作与已知三圆均正交的圆 /401
- ★ 作三角形内与两边相切且交于一点的三圆 /401
- ★ 马歇罗尼圆规问题 /402
- ★ 只用直尺作图问题 /404
- ★ 分割三角形等周问题 /407



- ★ 分割三角形等积问题 /408
- ★ 分割三角形面积成比例问题 /409
- ★ 三角形的等腰三角形分割定理 /410
- ★ 三角形的锐角三角形剖分问题 /413
- ★ 正方形的锐角三角形剖分问题 /416
- ★ 正方形的勾股剖分问题 /417
- 七、轨迹 /421**
- ★ 到定点与定直线的距离比为定值的点的轨迹 /421
- ★ 到定点与定直线的距离差为定值的点的轨迹 /421
- ★ 阿波罗尼斯圆 /423
- ★ 定和幂圆 /424
- ★ 定差幂线 /424
- ★ 牛顿轨迹问题 /425
- ★ 根轴问题 /426
- ★ 共轴圆 /429
- ★ 凯西的幂的定理 /433
- ★ 三角形高线垂足的射影点共轴圆定理 /433
- ★ 塞列特轨迹问题 /435
- ★ 波塞里亚反演器原理 /435
- ★ 卡塔朗轨迹问题 /436
- ★ 外接于定三角形的正三角形重心的轨迹 /437
- ★ 三角形的纽堡圆 /437
- ★ 三角形的舒特圆共轴圆组问题 /439
- ★ 平面轨迹的面积条件呈现问题 /440
- 八、完全四边形 /445**
- ★ 完全四边形的牛顿线定理 /445
- ★ 完全四边形对角线调和分割定理 /450
- ★ 完全四边形对角线调和分割定理的推广 /452



- ✧ 完全四边形的密克尔点定理 /454
- ✧ 密克尔圆定理 /454
- ✧ 完全四边形的蝴蝶定理 /456
- ✧ 完全四边形的施坦纳圆与共轴线定理 /457
- ✧ 完全四边形的张角定理 /458
- ✧ 完全四边形相等边定理 /460
- ✧ 完全四边形凸四边形内接于圆定理 /462
- ✧ 完全四边形折四边形内接于圆定理 /466
- ✧ 完全四边形凸四边形内切圆定理 /467
- ✧ 完全四边形折四边形旁切圆定理 /470
- ✧ 完全四边形的其他性质定理 /470
- ✧ 完全四角形问题 /478
- ✧ 马克劳林定理 /482

## 九、平面闭折线 /483

- ✧ 平面闭折线的射影、正弦、余弦定理 /483
- ✧ 平面闭折线中的塞瓦定理 /486
- ✧ 平面闭折线的中线定理 /487
- ✧ 平面闭折线的拉格朗日公式 /490
- ✧ 平面闭折线的莱布尼兹公式 /491
- ✧ 平面闭折线中的布罗卡尔点问题 /492
- ✧ 圆外切闭折线的斯俾克圆定理 /493
- ✧ 平面闭折线中的  $k$  号心定理 /495
- ✧ 平面闭折线  $k$  号心与原点的距离公式 /504
- ✧ 平面闭折线  $k$  号心与顶点的距离公式 /507
- ✧ 平面闭折线与  $k$  号心相关的共点线定理 /510
- ✧ 平面闭折线与  $k$  号心相关的多点共圆定理 /514
- ✧ 平面闭折线与  $k$  号心相关的多线切圆定理 /518
- ✧ 圆内接闭折线的  $k$  级中线长公式 /521



- ★ 平面闭折线的九点圆定理 /525
- ★ 平面闭折线的杜洛斯-凡利圆定理 /527
- ★ 圆内接闭折线的垂心(1号心)定理 /530
- ★ 圆外切闭折线的 $k$ 号界心定理 /547
- ★ 圆外切闭折线的 $k$ 号界圆定理 /558
- 十、圆的推广 /562**
- ★ 圆锥曲线的蝴蝶定理 /562
- ★ 圆锥曲线幂定理 /567
- ★ 圆锥曲线调和分割割线段定理 /569
- ★ 圆锥曲线切线视角定理 /573
- ★ 圆锥曲线切线与中点的问题 /574
- ★ 圆锥曲线非直径弦的一些性质 /580
- ★ 圆锥曲线的费马分割问题 /583
- ★ 圆锥曲线中的卡诺定理 /585
- 编后语 /591**





### 三、四边形、圆

#### ❖ 简单四边形面积的贝利契纳德公式

将凸四边形和凹四边形统称为简单四边形.

**贝利契纳德公式** 若简单四边形的四边长为  $a, b, c, d$ , 两对角线长为  $e, f$ , 则该四边形的面积为

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{4e^2f^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2}$$

此公式由贝利契纳德(Bretschneide, 1808—1878) 于 1842 年提出, 它是秦九韶的三斜求积公式的推广. 若在上述公式中令  $d = 0, e = c, f = a$ , 则得到三角形面积公式

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \sqrt{c^2a^2 - \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2}\right)^2}$$

**证法 1** 如图 3.1, 简单四边形  $ABCD$  中, 记  $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, AC = e, BD = f$ . 作  $CF \perp BD$  于  $F, AE \perp BD$  于  $E$ , 作  $CP \parallel BD$  交  $AE$  或其延长线于  $P$ , 则

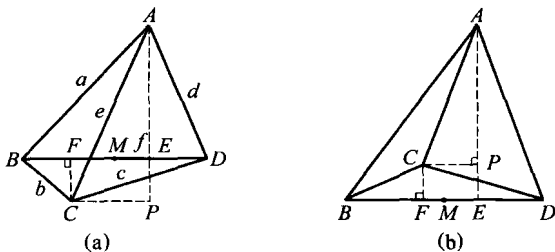


图 3.1

$$S_{ABCD} = S_{\Delta ABD} \pm S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2} BD(AE \pm CF) =$$

$$\frac{1}{2} BD \cdot AP = \frac{1}{2} fAP \quad \text{①}$$

设  $M$  是  $BD$  的中点, 则

$$\begin{aligned} a^2 - d^2 &= AB^2 - AD^2 = (AB^2 - AE^2) - (AD^2 - AE^2) = \overrightarrow{BE}^2 - \overrightarrow{DE}^2 = \\ &= (\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{ED})(\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{ED}) = \end{aligned}$$