



信息科学与工程系列专著

分布式信源信号处理

Distributed Source Signal Processing

汪晋宽 韩英华 著



电子工业出版社

PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

<http://www.phei.com.cn>

电子信息科技专著出版专项资金资助出版

信息科学与工程系列专著

分布式信源信号处理

Distributed Source Signal Processing

汪晋宽 韩英华 著

电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京 • BEIJING

内 容 简 介

本书系统、深入地阐述了分布式信源信号处理的理论和方法,重点以分布式信源模型为基础,详细介绍了分布式信源参数估计算法,并给出了大量的定性和定量分析。全书共8章,内容包括分布式信源信号处理基础、点信源信号参数估计的典型算法、分布式信源模型分析、适用于不同情况的分布式信源参数估计算法以及分布式信源信号处理的发展趋势。

本书取材新颖,内容丰富,体系完整,涵盖了作者多年来在该领域所取得的科研成果,以及国内外自适应信号处理的最新成果和最新进展。

本书读者对象:从事通信和信号处理研究工作的专业技术人员、科研工作者,以及从事相关领域研究的高校教师、研究生。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。
版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

分布式信源信号处理 / 汪晋宽, 韩英华著. —北京: 电子工业出版社, 2010.6
(信息科学与工程系列专著)

ISBN 978-7-121-11041-2

I. ①分… II. ①汪… ②韩… III. ①信源编码—信号处理 IV. ①TN911.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 104162 号

责任编辑: 张来盛 (zhangls@phei.com.cn) 特约编辑: 邢淑琴

印 刷: 北京智力达印刷有限公司

装 订: 北京中新伟业印刷有限公司

出版发行: 电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

开 本: 787×1 092 1/16 印张: 16 字数: 408 千字

印 次: 2010 年 6 月第 1 次印刷

印 数: 3 000 册 定价: 45.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题, 请向购买书店调换。若书店售缺, 请与本社发行部联系, 联系及邮购电话: (010) 88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线: (010) 88258888。

前 言

随着阵列信号处理在军事、航天和通信等领域的广泛应用，移动终端定位技术获得了长足的发展。移动目标和移动终端移动速度的加快，无论是目标跟踪，雷达系统和移动通信，都会受到由于散射而导致信号空间角度扩散的困扰。研究分布式信源的建模和分析方法，对于高精度雷达跟踪系统和无线移动通信系统具有重要意义。

最近几年，在教育部科学研究重点项目和博士点基金的支持下，我们对自适应信号处理，包括分布式信源的特征建模分析方法和参数估计方法进行了系统深入的研究并取得了一定的成果。作为研究工作的阶段总结，我们将这些成果汇总成册，构成本书的主要内容，期望为从事通信和信号处理研究工作的同仁从理论分析方法上提供一些有益的帮助。

本书从分布式信源的产生背景出发，讨论了分布式信源的特征，分析了分布式信源信号处理的发展趋势，以分布式信源模型为基础，尤其详细地介绍了分布式信源参数估计算法，并给出了大量的定性和定量分析。全书主要内容包括分布式信源信号处理的基本原理和相关概念；分布式信源信号处理的发展与现状；基于特征子空间的分布式信源参数估计算法；基于波束形成的分布式信源参数估计算法；分布式信源波达方向估计算法；分布式信源二维波达方向估计算法；分布式信源信号处理的发展趋势。

作者在本书的选材取舍、体系结构设计和写作手法设计上，力求站在读者的角度，从以下几个方面突出别具匠心的功夫：

(1) 选材保证知识的整体性，结构保证知识的系统性。本书紧紧围绕分布式信源信号处理进行描述，在内容取舍上，尽量做到系统、全面，在保证内容完整性的同时，重点介绍有实用价值的建模分析和参数估计算法；在体系结构上，采用从点信源信号处理方法切入，引出分布式信源信号处理方法，注意分布式信源分析方法与点信源分析方法的内在联系，从而构成一个有机的整体。

(2) 重视知识的连续性，突出新颖性，保证创新性。本书提供的分布式信源参数估计算法是作者在深入研究国内外优秀之作，对自适应信号处理（包括分布式信源的特征建模分析方法和参数估计方法）进行了系统深入的研究基础上完成的，很大一部分都是近年来发表的新成果，并给出了算法实现的详细步骤和计算机仿真结果。

(3) 内容深入浅出，增强可读性。对于许多读者来说，分布式信源信号处理涉及的内容难学、枯燥。本书将算法与仿真实例相结合，使读者能够更加直观和深刻地理解分布式信源信号处理的基本原理和应用。

本书由汪晋宽教授组织编写，韩英华执笔，刘福来、刘志刚、宋昕、高静和赵强参与了本书部分内容的编写，博士生王彬和许鹏在文稿整理方面做了大量工作。在本书的撰写过程中，参阅和引用了大量国内外文献资料，得到了东北大学工程优化与智能天线研究所的大力支持和帮助。在此，向有关作者和单位一并表示衷心的感谢！感谢曾经与作者一同参与课题研究的同行专家、学者，长期的研究交流使作者受益匪浅。

由于信号处理发展极为迅速，实际应用领域甚广，加上作者水平有限，对于分布式信源信号处理的研究尚有大量工作要做。因此，书中难免存在不妥与不足之处，恳请读者批评指正。

目 录

第 1 章 分布式信源信号处理基础	(1)
1.1 阵列信号处理基础	(1)
1.1.1 阵列的基本原理	(1)
1.1.2 均匀线阵与均匀圆阵	(2)
1.2 参数估计理论	(5)
1.2.1 误差的定义和分类	(5)
1.2.2 估计子的性能	(6)
1.2.3 最大似然估计	(10)
1.2.4 线性均方估计	(11)
1.2.5 最小二乘法	(12)
1.2.6 递推估计	(15)
1.3 信号源数估计	(15)
1.3.1 信息论方法	(16)
1.3.2 平滑序列法	(16)
1.3.3 盖氏圆方法	(18)
1.3.4 不相干分布式信源的数目估计	(20)
1.4 分布式信源信号处理的发展现状	(22)
1.4.1 点信源模型及其波达方向估计	(22)
1.4.2 分布式信源模型及其参数估计	(24)
1.4.3 分布式信源参数估计的关键问题	(28)
本章小结	(28)
参考文献	(28)
第 2 章 点信源信号参数估计的典型算法	(33)
2.1 波达方向估计的基本原理	(33)
2.2 波束形成算法	(34)
2.2.1 延迟-相加算法	(34)
2.2.2 Capon 波束形成算法	(35)
2.3 线性预测算法	(36)
2.3.1 前向预测算法	(37)
2.3.2 后向预测算法	(37)
2.3.3 双向预测算法	(38)
2.4 特征结构算法	(39)
2.4.1 MUSIC 算法	(39)
2.4.2 ESPRIT 算法	(41)
2.4.3 空间平滑技术	(46)

2.5	最大似然算法和子空间拟合类算法	(53)
2.5.1	最大似然算法	(53)
2.5.2	子空间拟合类算法	(55)
2.6	基于小波变换的波达方向估计算法	(56)
2.6.1	阵列信号的子带分解	(57)
2.6.2	子带分解的优点	(60)
2.6.3	基于子带分解的 MUSIC 波达方向估计算法	(65)
2.6.4	基于子带分解的 ESPRIT 波达方向估计算法	(67)
2.7	实值信号的波达方向估计算法	(70)
2.7.1	虚拟空间平滑算法	(70)
2.7.2	共轭酉 ESPRIT 算法	(71)
2.8	点信源的二维波达方向估计算法	(75)
2.8.1	阵列结构及信号模型	(75)
2.8.2	ESPRIT 二维波达方向估计原理	(76)
	本章小结	(78)
	参考文献	(79)
第 3 章	分布式信源模型分析	(81)
3.1	信号环境	(81)
3.1.1	反射、绕射和散射	(81)
3.1.2	慢衰落和快衰落	(83)
3.1.3	选择性衰落	(85)
3.2	点信源信号模型	(88)
3.2.1	点信源典型信号模型	(88)
3.2.2	相干信源信号模型	(89)
3.2.3	宽带信源信号模型	(90)
3.3	分布式信源信号模型	(90)
3.3.1	分布式信源的产生及其信号模型的意义	(90)
3.3.2	分布式信源的近似模型	(93)
3.3.3	分布式信源的一般模型	(97)
3.4	分布式信源模型的二阶统计特性	(99)
3.5	分布式信源参数估计典型算法	(101)
3.5.1	最大似然算法	(101)
3.5.2	拟合类算法	(104)
	本章小结	(111)
	参考文献	(111)
第 4 章	基于特征子空间的分布式信源参数估计算法	(113)
4.1	多重信号分类算法	(113)
4.1.1	矢量化 MUSIC (VEC-MUSIC) 算法	(113)
4.1.2	DSPE 算法	(116)
4.1.3	DISPARE 算法	(119)
4.1.4	低复杂度的 Root-MUSIC 算法	(121)

4.2	基于子空间的低复杂度算法	(125)
4.3	传播因子算法	(131)
4.3.1	不相干分布式信源参数估计	(132)
4.3.2	相干分布式信源参数联合估计	(135)
4.4	波束域传播因子算法	(138)
4.4.1	信号模型	(139)
4.4.2	基于 Schur-Hadamard 积波束域传播因子的分布式信源参数估计	(139)
4.4.3	实验结果	(142)
	本章小结	(144)
	参考文献	(144)
第 5 章	基于波束形成的分布式信源参数估计算法	(146)
5.1	延迟-相加法	(146)
5.2	广义 Capon 波束形成法	(148)
5.3	基于空间谱的分布式信源参数估计算法	(150)
5.4	鲁棒 Capon 波束形成法	(153)
5.5	基于 Cholesky 分解的波束形成法	(155)
5.6	大角度扩散环境下的波束形成算法	(158)
5.6.1	信号模型	(159)
5.6.2	基于 Schur-Hadamard 积波束形成的相干分布式信源参数估计	(159)
5.6.3	实验结果	(161)
5.7	低复杂度的相干分布式信源参数估计算法	(163)
5.7.1	信号模型	(164)
5.7.2	低复杂度的相干分布式信源参数估计	(164)
5.7.3	实验结果	(165)
5.8	相干分布式信源参数分离估计算法	(167)
5.8.1	中心波达方向的预估计	(167)
5.8.2	中心波达方向和角度扩散的估计	(168)
5.8.3	实验结果	(169)
	本章小结	(173)
	参考文献	(173)
第 6 章	分布式信源中心波达方向估计算法	(175)
6.1	分布式信源的 ESPRIT 中心波达方向估计算法	(175)
6.2	空间谱非对称的分布式信源中心波达方向估计算法	(180)
6.3	广义 ESPRIT 中心波达方向估计算法	(183)
6.3.1	信号模型	(183)
6.3.2	广义 ESPRIT 中心波达方向估计	(184)
6.3.3	实验结果	(187)
6.4	基于酉 ESPRIT 的相干分布式信源参数估计算法	(191)
6.4.1	信号模型	(191)
6.4.2	基于酉 ESPRIT 的相干分布式信源参数估计算法	(193)
6.4.3	实验结果	(195)

6.5	相干分布式信源 P-ESPRIT 中心波达方向估计算法	(197)
6.5.1	信号模型	(197)
6.5.2	P-ESPRIT 中心波达方向估计算法	(198)
6.5.3	实验结果	(199)
6.6	基于二阶统计量的分布式信源中心波达方向估计算法	(201)
6.6.1	信号模型	(201)
6.6.2	基于二阶统计量的分布式信源中心波达方向估计算法	(202)
6.6.3	实验结果	(205)
	本章小结	(207)
	参考文献	(208)
第 7 章	分布式信源二维波达方向估计算法	(209)
7.1	二维波达方向估计常用的阵列模型	(209)
7.1.1	均匀圆阵模型	(209)
7.1.2	双平行阵模型	(210)
7.1.3	均匀平面阵模型	(211)
7.1.4	十字形阵模型	(212)
7.1.5	L 形阵模型	(212)
7.2	相干分布式信源的二维波达方向及角度扩散估计算法	(213)
7.3	基于双圆阵的 SOS 二维波达方向估计算法	(217)
7.4	基于 L 形阵的相干分布式信源二维波达方向估计算法	(221)
7.4.1	信号模型	(221)
7.4.2	基于 Schur-Hadamard 积的相干分布式信源方向向量	(223)
7.4.3	基于 L 形阵的相干分布式信源二维波达方向估计	(224)
7.4.4	基于二阶统计量的二维波达方向估计	(226)
7.4.5	实验结果	(226)
7.5	相干分布式信源二维波达方向估计算法	(230)
7.5.1	信号模型	(230)
7.5.2	相干分布式信源二维波达方向估计	(231)
7.5.3	实验结果	(235)
	本章小结	(237)
	参考文献	(237)
第 8 章	分布式信源信号处理的发展趋势	(239)
8.1	非理想环境下分布式信源的建模分析	(239)
8.1.1	有限带宽分布式信源信号模型	(239)
8.1.2	未知噪声	(240)
8.2	基于粒子滤波的分布式信源参数估计新方法	(241)
8.2.1	序贯重要性采样粒子滤波器	(241)
8.2.2	序贯重要性再采样粒子滤波器	(243)
8.2.3	基于粒子滤波的分布式信源参数估计算法	(244)
	本章小结	(244)
	参考文献	(245)

第 1 章 分布式信源信号处理基础

在雷达、声呐和移动通信系统中，环境变化、需求差异、业务增长等因素对信号处理技术提出了更高的要求。传统的阵列信号处理中一般基于点信源模型的假设，即目标信源和观测阵列之间只存在视距传播。然而，当信源多径数目过多或者难以从空间域有效分离各条路径时，传统的点信源模型就不能准确描述阵列所接收的数据，导致信源参数估计性能恶化，甚至不能得到正确的估计结果。因此，对于信道的复杂多径散射情况，必须研究一种新的信号处理方法，分布式信源信号处理正是解决此类问题的有效方法之一。

如图 1.1 所示，分布式信源信号处理系统一般由空间信号入射、空间阵列接收和参数估计三部分组成，与之相对应的有三个空间，分别是目标空间、观测空间及估计空间。

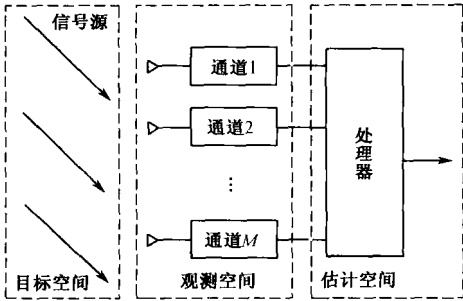


图 1.1 分布式信源信号处理系统结构图

目标空间包含信源参数和复杂环境参数，可根据实际应用建立相应的信号模型来描述。
观测空间是利用以一定方式排列的阵元来接收目标空间发出的辐射信号。由于环境的复杂性，接收数据中既包含信号特征，又包含空间环境特征。
估计空间是利用各种分布式信源参数估计方法，从复杂的观测数据中提取信号的特征参数。估计空间相当于目标空间的一个重构过程，该过程的理论基础就是基于参数估计理论的各种分布式信源参数估计算法。

1.1 阵列信号处理基础

1.1.1 阵列的基本原理

时域滤波器根据频率响应特性加强信号中某些频率分量而抑制另外一些频率分量。由于阵列具有空间检测的能力，即让某个特定方向的信号通过而滤掉其他方向的信号，因而阵列可认为是空域滤波器。如图 1.2 所示，传感器阵列接收来自不同方向的信源发射出来的信号，通过调整每个传感器上的权值 w_i 可使来自某个方向的信号在阵列的输出中得到加强，而某些特定方向的信号被抑制，即传感器阵列具有方向性。

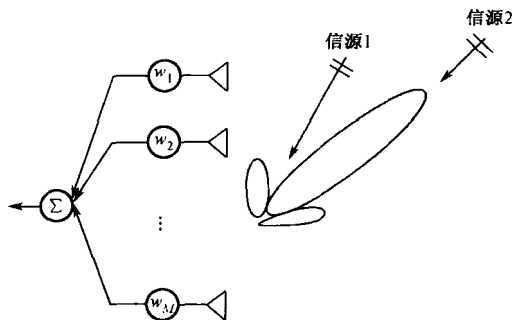


图 1.2 阵列的空间检测特性

传感器阵列克服了单一传感器系统的一些缺点。例如，连续孔径的抛物面碟形天线雷达，信号经过抛物面天线反射而聚集到传感器上，只有那些来自抛物面所指方向的信号才能被加强。在同一时间里，它只能提取和跟踪一个方向的信号，而无法同时跟踪几个方向的信号。另外，传感器阵列的空间检测能力比单一传感器系统灵活得多，仅仅控制阵列上的加权向量就可以在同一时间跟踪多个信源，抑制多个干扰源。阵列输出的加权操作简单，易于硬件实现。

1.1.2 均匀线阵与均匀圆阵

1. 均匀线阵

如图 1.3 所示，均匀线阵由 M 个等间距直线排列的阵元构成，阵元间距为 d 。假定一信源（移动台）位于远场，其信号到达各阵元的波前为平面波。

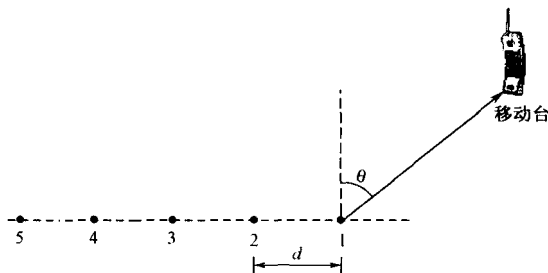


图 1.3 均匀线阵的几何结构

到达波的空间角应在三维空间内表示，为使表述更为直观，这里用二维平面来讨论，即到达波的向量限制在图 1.3 所示的平面里，并将到达波向量与阵列法线夹角 θ 定义为波达方向。

均匀线阵的方向向量可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{\text{ULA}}(\theta) &= [1, \exp(-j|k|d \sin \theta), \dots, \exp(-j|k|(M-1)d \sin \theta)]^T \\ &= \left[1, \exp\left(-j\frac{2\pi}{\lambda}d \sin \theta\right), \dots, \exp\left(-j\frac{2\pi}{\lambda}(M-1)d \sin \theta\right) \right]^T \end{aligned} \quad (1.1)$$

其中， $|k| = 2\pi/\lambda$ 为波数； λ 为波长，空间信号的波长定义为

$$\lambda = \frac{c}{f_c} \quad (1.2)$$

若有 q 个信源，其波达方向分别为 $\theta_i (i=1, \dots, q)$ ，则方向矩阵为

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1), \dots, \mathbf{a}(\theta_q)] \quad (1.3)$$

阵元间距 d 是不能任意选择的，有时甚至需要非常精确地校准。假设 d 很大，根据式 (1.1)，相邻阵元的相位延迟会超过 2π ，此时，阵列方向向量无法在数值上分辨出具体的相位延迟，导致相位模糊。为了避免引起栅瓣效应和空间模糊，需满足 $\frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta \in (-\pi, \pi)$ ，阵元间距通常大于或等于最高频率信号波长的一半，以避免低频信号在不同阵元间的互耦。

通常在进行分布式信源信号处理时，还要假设信源位于空间远场，即信源到天线阵列的距离很远，以致球面波可以合理地近似为平面波，这样，波阵面穿过阵列的曲率可以忽略，如图 1.4 所示。

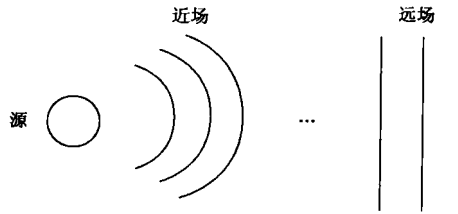


图 1.4 空间远场球面波近似为平面波

2. 均匀圆阵

均匀圆周阵列简称均匀圆阵 (UCA, Uniform Circular Array)，如图 1.5 所示，其 M 个相同的全向阵元均匀分布在 x - y 平面内一个半径为 R 的圆周上。采用球面坐标系表示入射平面波的波达方向。坐标系的原点位于阵列的中心即圆心。信源仰角 $\theta \in [0, \pi/2]$ 是原点 to 信源的连线与 z 轴之间的夹角，方位角 $\phi \in [0, 2\pi]$ 则是原点到信源的连线在 x - y 平面上的投影与 x 轴之间的夹角（逆时针）。

如图 1.5 所示，阵列的第 m 个阵元与 x 轴的角度用 $\gamma_m = 2\pi m / M$ 表示。该处的位置向量为 $\mathbf{p}_m = (R \cos \gamma_m, R \sin \gamma_m, 0)$ 。考虑一波数为 $|k_0| = 2\pi / \lambda$ 的窄带平面波在方向 $-\mathbf{r}$ （其仰角和方向角分别为 θ 和 ϕ ）上的传播， $\mathbf{r} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ ，某一时刻，在原点和在第 m 个阵元接收到信号的复包络之间的相位差为

$$\phi_m = e^{j|k_0| \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}_m} = e^{j|k_0| R \sin \theta \cos(\phi - \gamma_m)} = e^{j\xi \cos(\phi - \gamma_m)}$$

其中， $\xi = |k_0| R \sin \theta$ 。当信号波达方向为 θ 时，均匀圆阵的方向向量可表示为

$$\mathbf{a}_{\text{UCA}}(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} \exp(j\xi \cos(\phi - \gamma_0)) \\ \exp(j\xi \cos(\phi - \gamma_1)) \\ \vdots \\ \exp(j\xi \cos(\phi - \gamma_{M-1})) \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

为了保证相邻阵元接收信号不重叠，均匀圆阵的阵元数 M 必须满足

$$M \leq 2 \left(\frac{2\pi R}{\lambda} \right) + 1 \quad (1.5)$$

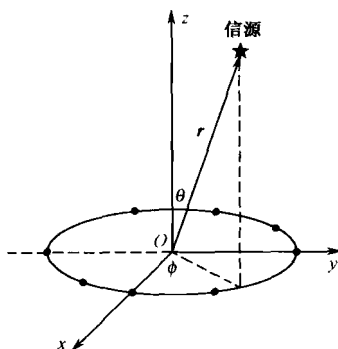


图 1.5 均匀圆阵的几何结构

3. 分辨力

阵列在某方向上对信源的分辨力与阵列方向向量在该方向附近的变化率直接相关，定义表征分辨力的量 $D(\theta)$ 为

$$D(\theta) = \left\| \frac{d\mathbf{a}(\theta)}{d\theta} \right\| \propto \left\| \frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\theta} \right\| \quad (1.6)$$

其中， τ 为两阵元之间的波程差。 $D(\theta)$ 越大表明在该方向上的分辨力越高。

对于某一确定的 M 元均匀线阵，假设阵元间距为 d ，将最左侧的阵元作为参考点，信号的入射方向为 θ ，则两阵元间的波程差 τ 为

$$\tau_l = \frac{1}{c}(x_k \sin \theta) = \frac{1}{c}(l-1)d \sin \theta, l=1, 2, \dots, M \quad (1.7)$$

则有

$$D(\theta) \propto \cos \theta \quad (1.8)$$

由式 (1.8) 可知，信号在 0° 方向分辨力最高，而在 60° 方向分辨力下降了 $1/2$ ，因此一般线阵的测向范围为 $-60^\circ \sim 60^\circ$ 。

对于有 M 个阵元的均匀圆阵，以圆心为参考点，设阵元的位置为 $(x_k, y_k), k=1, 2, \dots, M$ ，则两阵元间的波程差为

$$\begin{aligned} \tau_k &= \frac{1}{c}(x_k \cos \theta + y_k \sin \theta) \\ &= \frac{R}{c} \cos \left(\frac{2\pi(k-1)}{M} - \theta \right) \end{aligned} \quad (1.9)$$

其中， R 为圆的半径。则

$$D(\theta) \propto \left| \frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\theta} \right|_F = \left(\frac{R}{c} \right) \sqrt{\frac{M}{2}} \quad (1.10)$$

式 (1.10) 表明水平放置的均匀圆阵的分辨力是一个与阵列孔径及阵元数有关的常数。

在阵元间距固定的情况下，阵列的分辨力随着阵元数的增加而增加，即与阵列孔径成正比；一般情况下线阵的分辨力要优于圆阵。

很多分布式信源参数估计算法会涉及谱峰搜索，在估计入射信号的波达方向时，必须搜索阵列的整个视角（观察区间），从而得到角度功率谱 $\hat{P}$ ， $\hat{P}$ 的几个极值点对应的角度就是信号的波达方向。谱峰搜索算法中分辨力的界限可表示为

$$E(\hat{P}) = E\left[\frac{\hat{P}_1 + \hat{P}_2}{2}\right] \quad (1.11)$$

即两个入射信号的谱峰的均值等于入射信号角度均值的谱峰。当 $E(\hat{P}) < E\left[\frac{\hat{P}_1 + \hat{P}_2}{2}\right]$ 时，两个角度可分辨；而 $E(\hat{P}) > E\left[\frac{\hat{P}_1 + \hat{P}_2}{2}\right]$ 时，则说明两个相近的角度不可分辨。

1.2 参数估计理论

分布式信源信号处理的参数估计算法就是利用样本数据来估计某些待定的参数的，常用的参数估计方法为点估计和区间估计。在点估计中，通常是寻求一估计子，给出待定参数的单个估计值，这一估计值叫点估值。在区间估计中，确定的是待定参数可能位于的某个区间，即置信区间估值。分布式信源信号处理的参数估计多采用点估计。

1.2.1 误差的定义和分类

设 $x(t)$ 是一个与未知参数 θ 有关的随机信号， $x_1, \dots, x_N$ 是可以利用的随机采样。假设样本的某函数 $g(x_1, \dots, x_N)$ 可以用来确定 θ 的可能取值，则称 $g(x_1, \dots, x_N)$ 是 θ 的一个估计子，记为 $\hat{\theta} = g(x_1, \dots, x_N)$ 。

参数估计的精度可由均方误差来描述，即

$$\text{均方误差} = E\left[(\hat{\theta} - \theta)^2\right] \quad (1.12)$$

其中， $\hat{\theta}$ 是 θ 的估计量，将式 (1.12) 展开，得

$$\begin{aligned} E\left[(\hat{\theta} - \theta)^2\right] &= E\left\{\left[\hat{\theta} - E(\hat{\theta}) + E(\hat{\theta}) - \theta\right]^2\right\} \\ &= E\left[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2\right] + 2E\left[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))(E(\hat{\theta}) - \theta)\right] + E\left[(E(\hat{\theta}) - \theta)^2\right] \end{aligned} \quad (1.13)$$

由于

$$E[\hat{\theta} - E(\hat{\theta})] = E[\hat{\theta}] - E[\hat{\theta}] = 0 \quad (1.14)$$

因此，均方误差可以简化为

$$\text{均方误差} = E\left[(\hat{\theta} - E[\hat{\theta}])^2\right] + E\left[(E[\hat{\theta}] - \theta)^2\right] \quad (1.15)$$

其中，式 (1.15) 第一部分是描述误差中随机部分的方差项，即

$$\text{Var}[\hat{\theta}] = E\left[(\hat{\theta} - E[\hat{\theta}])^2\right] = E[\hat{\theta}^2] - E^2[\hat{\theta}] \quad (1.16)$$

式 (1.15) 第二部分是描述误差中系统部分的偏差（又称系统误差）项的平方，即

$$b^2[\hat{\theta}] = E\left[\left(E[\hat{\theta}] - \theta\right)^2\right] \quad (1.17)$$

因此, 均方误差是估计的方差与偏差的平方两项之和, 即

$$E\left[(\hat{\theta} - \theta)^2\right] = \text{Var}[\hat{\theta}] + b^2(\hat{\theta}) \quad (1.18)$$

一般来说, 估计的误差与被估计参量使用相同的工程单位比较方便。因此, 可对式 (1.16)、式 (1.17) 和式 (1.18) 求正平方根, 式 (1.16) 的正平方根是估计的标准差, 称为标准误差 (或称随机误差), 其表达式为

$$\text{标准误差} = \sigma[\hat{\theta}] = \sqrt{E[\hat{\theta}^2] - E^2[\hat{\theta}]} \quad (1.19)$$

式 (1.17) 的平方根直接确定了偏差 (系统误差), 即

$$\text{偏差} = b(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta \quad (1.20)$$

式 (1.18) 的平方误差之和的平方根, 称为均方根误差, 即

$$\text{均方根误差} = \sqrt{E[(\hat{\theta} - \theta)^2]} = \sqrt{\sigma^2[\hat{\theta}] + b^2(\hat{\theta})} \quad (1.21)$$

为了方便起见, 常将估计误差归一化, 即用被估量除以误差, 可得

$$\begin{aligned} \text{归一化标准误差 } \varepsilon_r &= \frac{\sigma[\hat{\theta}]}{\theta} = \frac{\sqrt{E[\hat{\theta}^2] - E^2[\hat{\theta}]}}{\theta} \\ \text{归一化偏差 } \varepsilon_b &= \frac{b(\hat{\theta})}{\theta} = \frac{E[\hat{\theta}]}{\theta} - 1 \end{aligned} \quad (1.22)$$

$$\text{归一化均方根误差 } \varepsilon = \frac{\sqrt{\sigma^2[\hat{\theta}] + b^2[\hat{\theta}]}}{\theta} = \frac{\sqrt{E[(\hat{\theta} - \theta)^2]}}{\theta}$$

1.2.2 估计子的性能

1. 无偏性

定义 1.1 $\hat{\theta}$ 是 θ 的一个无偏估计子, 若 θ 在所有可能样本范围内的平均值等于 θ 的真实值, 即对所有 θ 恒有

$$E(\hat{\theta}) = \theta \quad (1.23)$$

如果式 (1.23) 不成立, 则 $\hat{\theta}$ 就是 θ 的一个有偏估计子。

无偏性是一个所期望的性能, 在实际应用中, 一个有偏的、具有渐进性能的估计子有着广泛的应用。

定义 1.2 对所有 θ , 当样本数 $N \rightarrow \infty$ 时, 偏差 $b(\hat{\theta}) \rightarrow 0$, 则 $\hat{\theta}$ 是 θ 的一个渐进无偏估计子。

例如, 考虑一个线性平稳过程的自相关函数的两种估计子:

$$\hat{R}_1(l) = \frac{1}{N-l} \sum_{t=1}^{N-l} x(t)x(t+l) \quad (1.24)$$

$$\hat{R}_2(l) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-l} x(t)x(t+l) \quad (1.25)$$

假定数据 $x(t)$ 是独立观测的, 由于

$$\begin{aligned} E[\hat{R}_1(l)] &= \frac{1}{N-l} \sum_{t=1}^{N-l} E[x(t)x(t+l)] \\ &= R(l) \end{aligned} \quad (1.26)$$

及

$$\begin{aligned} E[\hat{R}_2(l)] &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-l} E[x(t)x(t+l)] \\ &= \left(1 - \frac{l}{N}\right) R(l) \end{aligned} \quad (1.27)$$

因此, $\hat{R}_1(l)$ 是 $R(l) = E\{x(t)x(t+l)\}$ 的一个无偏估计子, 而 $\hat{R}_2(l)$ 是 $R(l)$ 的有偏估计子。

虽然 $\hat{R}_2(l)$ 是有偏的, 但它是渐进无偏的, 即

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E[\hat{R}_2(l)] = R(l) \quad (1.28)$$

有偏估计子 $\hat{R}_2(l)$ 是半正定的, 而 $\hat{R}_1(l)$ 却不一定是半正定的。因此, 有偏 (但渐进无偏) 估计子 $\hat{R}_2(l)$ 比无偏估计子 $\hat{R}_1(l)$ 有着更广泛的应用。

2. Cramer-Rao 不等式

一个估计子最基本的特征体现在偏差与方差上。方差往往很难精确表示, 只能得到方差可能达到的一个下界, 任一无偏估计子方差的下界常叫做 Cramer-Rao 下界。

定理 1.1 令 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ 为一样本向量, $f(\mathbf{x}|\theta)$ 是 $\mathbf{x}$ 的条件密度。若 $\hat{\theta}$ 是 θ 的一个无偏估计子, 且 $\partial f(\mathbf{x}|\theta)/\partial \theta$ 存在, 则

$$\text{Var}(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)^2 \geq \frac{1}{E\left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(\mathbf{x}|\theta)\right]^2} \quad (1.29)$$

其中,

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(\mathbf{x}|\theta) = K(\theta)(\hat{\theta} - \theta) \quad (1.30)$$

$K(\theta)$ 为 θ 的某个不包含 $\mathbf{x}$ 的正函数。

证明 由假设条件可知, $E(\hat{\theta}) = \theta$ 或 $E(\hat{\theta} - \theta) = 0$, 因此有

$$E(\hat{\theta} - \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{\theta} - \theta) f(\mathbf{x}|\theta) d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_N = 0 \quad (1.31)$$

对 θ 求偏微分, 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} E(\hat{\theta} - \theta) &= \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{\theta} - \theta) f(\mathbf{x}|\theta) d\mathbf{x} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \theta} [(\hat{\theta} - \theta) f(\mathbf{x}|\theta)] d\mathbf{x} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.32)$$

式 (1.32) 给出

$$-\int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}|\theta) d\mathbf{x} + \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{\theta} - \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} f(\mathbf{x}|\theta) d\mathbf{x} = 0 \quad (1.33)$$

另外, 由复合函数的求导法可得

$$\frac{\partial}{\partial \theta} f(\mathbf{x}|\theta) = \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(\mathbf{x}|\theta) \right] f(\mathbf{x}|\theta) \quad (1.34)$$

由于 $f(\mathbf{x}|\theta)$ 是条件密度, 故

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}|\theta) d\mathbf{x} = 1 \quad (1.35)$$

将式 (1.34) 和式 (1.35) 代入式 (1.33) 可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(\mathbf{x}|\theta) \right] f(\mathbf{x}|\theta) (\hat{\theta} - \theta) d\mathbf{x} = 1 \quad (1.36)$$

根据 $f(\mathbf{x}|\theta) = \sqrt{f(\mathbf{x}|\theta)} \cdot \sqrt{f(\mathbf{x}|\theta)}$, 式 (1.36) 可重写为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(\mathbf{x}|\theta) \sqrt{f(\mathbf{x}|\theta)} \right] \left[(\hat{\theta} - \theta) \sqrt{f(\mathbf{x}|\theta)} \right] d\mathbf{x} = 1 \quad (1.37)$$

Schwarz 不等式给出

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(\mathbf{x}|\theta) \right]^2 f(\mathbf{x}|\theta) d\mathbf{x} \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{\theta} - \theta)^2 f(\mathbf{x}|\theta) d\mathbf{x} \geq 1 \quad (1.38)$$

或等价于

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\hat{\theta} - \theta)^2 f(\mathbf{x}|\theta) d\mathbf{x} \geq \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(\mathbf{x}|\theta) \right]^2 f(\mathbf{x}|\theta) d\mathbf{x}} \quad (1.39)$$

当且仅当式 (1.30) 成立时, 式 (1.39) 取等号。注意到 $E(\hat{\theta}) = \theta$, 于是有

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{\theta}) &= E(\hat{\theta} - \theta)^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{\theta} - \theta)^2 f(\mathbf{x}|\theta) d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (1.40)$$

和

$$E \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(\mathbf{x}|\theta) \right]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(\mathbf{x}|\theta) \right]^2 f(\mathbf{x}|\theta) d\mathbf{x} \quad (1.41)$$

综合式 (1.39)、式 (1.40) 及式 (1.41) 直接可得式 (1.29)。(证毕)。

为使式 (1.29) 成立而要求 $f(\mathbf{x}|\theta)$ 具备的主要条件是, 可以互换微分 (相对于 θ) 和积分 (相对于 $\mathbf{x}$) 的运算, 如同上述证明中所做的那样。这意味着, x_i 的取值必须与 θ 独立。

一般地, 将式 (1.29) 右边的分母记为 $I(\theta)$, 即

$$I(\theta) = E \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(\mathbf{x}|\theta) \right]^2 \quad (1.42)$$

并称 $I(\theta)$ 为 Fisher 信息量。

3. 有效性

假定有同一待估系统 θ 的两个不同估计子 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$, 有效性则是选择 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 的一个测度。

如果 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 都是无偏估计子, 则倾向于选择其抽样分布具有较小方差的那个估计子。例如, 假设 $\hat{\theta}_1$ 具有较小方差, 则 $\hat{\theta}_1$ 的值就比 $\hat{\theta}_2$ 的值更紧密聚集在真值 θ 的附近。换句话说, $\hat{\theta}_1$ 位于某个区间 $(\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon)$ 的概率比 $\hat{\theta}_2$ 位于同一区间的概率要高。这种情况下, 我们说 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 更有效, 并称

$$RE = \left[\frac{\text{Var}(\hat{\theta}_1)}{\text{Var}(\hat{\theta}_2)} \times 100 \right] \% \quad (1.43)$$

为 $\hat{\theta}_2$ 相对于 $\hat{\theta}_1$ 的“相对有效性”。

定义 1.3 任何一个满足式 (1.29) Cramer-Rao 不等式中等号的无偏估计子称为优效估计子。

优效估计是所能构造的最有效的估计，通常称其为最小方差无偏估计。假定， $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 二者都是渐近无偏的，或者一个是无偏的，而另一个是渐近无偏的。在这样的情况下，方差就不再是有效性的唯一合适测度，一种合理的方法是同时考虑偏差和方差。

令 $\hat{\theta}$ 是 θ 的某个估计。定义 $\hat{\theta}$ 的均方误差 $M^2(\hat{\theta})$ 为

$$M^2(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)^2 \quad (1.44)$$

由式 (1.44) 可得

$$\begin{aligned} M^2(\hat{\theta}) &= E[\hat{\theta} - E(\hat{\theta}) + E(\hat{\theta}) - \theta]^2 \\ &= E[\hat{\theta} - E(\hat{\theta})]^2 + E[E(\hat{\theta}) - \theta]^2 \\ &\quad + 2E\left\{[\hat{\theta} - E(\hat{\theta})] \cdot [E(\hat{\theta}) - \theta]\right\} \\ &= \text{Var}(\hat{\theta}) + b^2(\hat{\theta}) + 2E[\hat{\theta} - E(\hat{\theta})] \cdot E[E(\hat{\theta}) - \theta] \end{aligned} \quad (1.45)$$

由于 $E[\hat{\theta} - E(\hat{\theta})] = E(\hat{\theta}) - E(\hat{\theta}) = 0$ ，式 (1.45) 可简化为

$$M^2(\hat{\theta}) = \text{Var}(\hat{\theta}) + b^2(\hat{\theta}) \quad (1.46)$$

根据均方误差 $M^2(\hat{\theta})$ ，可在 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 之间选择使 $M^2(\hat{\theta}_i)$ 较小的 $\hat{\theta}_i$ 作为所希望的估计，该准则称为均方误差准则。当一个估计 $\hat{\theta}$ 为无偏时，均方误差 $M^2(\hat{\theta})$ 可简化为方差 $\text{Var}(\hat{\theta})$ 。

4. 一致性

定义 1.4 如果 $\hat{\theta}$ 是 θ 的一致性估计，当样本量 N 趋于无穷大时， $\hat{\theta}$ 以概率收敛于真值 θ ，即

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P[|\hat{\theta} - \theta| < \varepsilon] = 1 \quad (\text{对所有 } \varepsilon > 0) \quad (1.47)$$

或等价于

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P[|\hat{\theta} - \theta| \geq \varepsilon] = 0 \quad (\text{对所有 } \varepsilon > 0) \quad (1.48)$$

定理 1.2 将给出一致性估计的一个充分条件。

定理 1.2 令 $\hat{\theta}$ 是基于 N 个观测样本获得的 θ 的估计。假定

- (1) $\lim_{N \rightarrow \infty} E(\hat{\theta}) = \theta$
- (2) $\lim_{N \rightarrow \infty} E[\hat{\theta} - E(\hat{\theta})]^2 = 0$

则 $\hat{\theta}$ 是 θ 的一致估计。

证明 利用 Chebyshev 不等式得到