数学高考新趋向

陈振宣　杨象富　主编

上海教育出版社

数学高考新趋向

陈振宣　杨象富　主编

上海教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学高考新趋向/陈振宣，杨象富主编．—上海：上海教育出版社，2004.1
ISBN 7—5320—9196—1

Ⅰ.数... Ⅱ.①陈...②杨.. Ⅲ.数学课—高中—升学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第004079号

数学高考新趋向

陈振宣　杨象富　主编

上海世纪出版集团
上海教育出版社 出版发行

易文网:www.ewen.cc

（上海永福路123号　　邮编:200031）

各地新华书店经销　　启东印刷厂印刷

开本 890×1240　1/32　印张 7.25　插页 2　字数 185,000

2004年1月第1版　　2004年1月第1次印刷

印数 1－5,000 本

ISBN 7-5320-9196-1/O·0025　定价:15.00元

前　言

2003年全国高考(理科)数学试题,又难又新,震惊全国,估计平均成绩下滑30来分,这是1984年之后未曾出现过的.这份试卷有若干不足,但更值得注意的是它积极倡导"问题解决"(problem solving)的正确导向.

《牛津大词典》注释"问题"(problem)为:"这是指那种并非可以立即求解或较为困难的问题(question),那种需要探索、思考和讨论的问题,那种需要积极思维活动的问题."以"问题解决"作为学校数学教育的中心,是世界的大势、时代的潮流.

有感于"问题解决"的极端重要和高考形势的十分严峻,两位有五、六十年教龄的主编带领十余位仍在教学第一线的骨干教师,冒着数十年未有的酷暑,煞费苦心,集思广益,试图以典型的问题和清晰的表述,阐明解决难而新的试题的规则和方法(本书的例题已包含了2003年各份数学高考试卷中所有的新题、难题,以便读者把握高考命题动向),使读者较快成为"好的解题者",能在高考中获得满意的成绩.

我们认为,"好的解题者"应具备下列素质:

(一)结构良好的基本知识和熟练的基本技能;

(二)熟悉数学思想方法,有较丰富的解题经验;

(三)有较好的自我调节和问题转换能力;

(四)有较好的"解题胃口"和自信心;

(五)有较好的心理素质和一定的审美情趣.

参加编写的除主编和副主编外,还有柴盛楣、贝跃敏、胡庆彪、潘亚奎、陈承灿、项宁、胡明华、王春丽、金飞龙、应端国、张晓方、范妙红、方兆进、章志强、钟群、范人伊、陈永莉、张莉萍、张文娟、唐惠康.第一、六、八、十、十一讲由主编杨象富统稿,其余各讲由主编陈振宣统稿.

作者　2003年8月

目　录

第一讲 客 观 题

数学高考卷中的客观题是指选择题和填空题.客观题有独特的训练和考查的功能.从1981年起至今高考连年都有填空题,1983年起至今连年都有选择题.

选择题主要考查“三基”(知识、技能、方法),几十年来不乏“新、活、巧”的好题.解选择题的要求是“准、快、巧”.常用的方法有(1)求解对照法,(2)逻辑分析法,(3)逆推代入法,(4)量纲与对称性检验法,(5)猜测逼近法,(6)特例(包括极端、极限情况)法,(7)数形结合法.其中后三种特别值得重视.

填空题常用来考查基本概念、基本运算.填空题不设中间得分,比选择题更容易丢分,要注意“心到笔也到”.为了提高解填空题的速度,要注意计算(变形、推理)的技巧,能整体代入、设而不求、活用公式、重视定义.解填空题的常用方法有(1)直接求解(可以“跳步”、“心算”,防止“小题大做”),(2)猜测逼近法,(3)特例法,(4)数形结合法.

要提倡巧解客观题,培养快速选择和简解的能力,提高得分率并节约时间,以利后续题(解答题)的求解.

$\tan x = -\frac{3}{4}$

一、选择题

$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

例1 已知 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$, $\cos x=\frac{4}{5}$,则 $\tan 2x=$ (D).

A. $\frac{7}{24}$　　B. $-\frac{7}{24}$　　C. $\frac{24}{7}$　　D. $-\frac{24}{7}$

(2003年全国)

[分析] 如果由 $\cos x$ 求 $\sin x$,再求 $\tan x$ 和 $\tan 2x$,就比较费时、乏味,画个示意图可快速作出选择.

［**解**］ 如图 1-1,可知

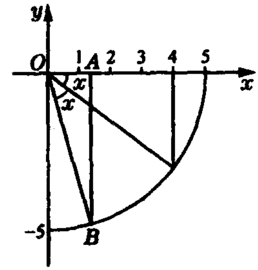

图 1-1

$$\tan 2x=\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{OA}}<-1,$$

故选 D.

［**剖析与展望**］ 由于给有选择支,"以图示数"常能免去一些运算,快速准确解题.这类情况,似乎在每年高考中都会碰到(请看例 2 与例 3).

例 2 把复数$1+\mathrm{i}$对应的向量按顺时针方向旋转$\frac{2\pi}{3}$所得的向量对应的复数是(　　).

A. $\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$　　B. $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}+\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

C. $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$　　D. $\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

(1990 年全国)

［**分析**］ 如果直接计算$(1+\mathrm{i})\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$,并把结果化为代数形式,颇费时间,不如从"形"的角度思考.

［**解**］ 把复数 $1+\mathrm{i}$ 对应的向量(在第一象限的平分线上),按顺时针方向旋转$\frac{2\pi}{3}$所得的向量应在第四象限,且位于第二、四象限平分线的下方,故选 B.

例 3 复数 $-\mathrm{i}$ 的一个立方根是 i,它的另外两个立方根是(　　).

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{1}{2}\mathrm{i}$　　B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{1}{2}\mathrm{i}$

C. $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$　　D. $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$

(1998 年全国)

[**分析**] 如果套用复数求根公式，需要几分钟时间，不如考察本题的几何意义.

[**解**] 方程 $x^3=-\mathrm{i}$ 的根的几何意义，是均匀分布在以原点为圆心的单位圆上的三个点. 已知其中一根 i 位于虚轴的上半轴，则另两根必在第三、四象限内，故选 D.

[**说明**] 下题出现在 1996 年全国高考卷中，你能从分析复数的辐角入手，快速作出选择吗？

复数 $\dfrac{(2+2\mathrm{i})^4}{(1-\sqrt{3}\mathrm{i})^5}$ 等于(　　).

A. $1+\sqrt{3}\mathrm{i}$　　B. $-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$　　C. $1-\sqrt{3}\mathrm{i}$　　D. $-1-\sqrt{3}\mathrm{i}$

以下介绍特例(包括极端、极限情况)选择法，可以说这是很常用、有“特效”的方法，值得重视.

例 4 过抛物线 $y=ax^2(a>0)$ 的焦点 F 作一条直线 l 交抛物线于 P、Q 两点，线段 PF、QF 的长分别为 p,q，则 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}$ 等于(　　).

A. $2a$　　B. $\dfrac{1}{2a}$　　C. $4a$　　D. $\dfrac{4}{a}$

(2000 年全国)

[**分析**] 抛物线 $x^2=\dfrac{1}{a}y$ 的焦点坐标为 $F\left(0,\dfrac{1}{4a}\right)$. 如图 1-2，为计算方便，直线 l 的位置处在 l_1 不如 l_2(此时 $p=q$ 且容易计算)，但最好还是使 l 处于更特殊、有利的位置 l_3(与 y 轴重合).

[**解**] 当直线 l 与 y 轴重合时，容易知道 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=4a+0=4a$，故选 C.

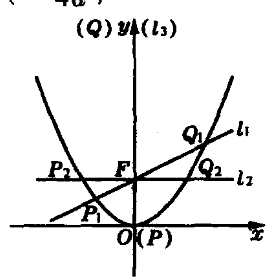

图 1-2

[**说明**] 一般包括了特殊，一般情况下的结论应适用于特殊情况. 根据选择题的特点(已给出选择支)，用“特例法”往往是简便的. 下面用各色例子说明“特例法”的用法和好处.

例 5 等差数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$的前 n 项的和分别为 S_n 与 T_n，若$\frac{S_n}{T_n}=\frac{2n}{3n+1}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$等于（　　）.

A. 1　　　　B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$　　　　C. $\frac{2}{3}$　　　　D. $\frac{4}{9}$

（1995 年全国）

［**分析**］ 由 $2a_n=a_1+a_{2n-1}$，可将$\frac{a_n}{b_n}$转化为$\frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}$，也可以把题设条件特殊化.

［**解一**］

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n}{2b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_{2n-1}}{b_1+b_{2n-1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)(a_1+a_{2n-1})}{(2n-1)(b_1+b_{2n-1})}=\lim_{n\to\infty}\frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2(2n-1)}{3(2n-1)+1}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

所以，选 C.

［**解二**］ 取 $a_n=2n-1$，$a_1=1$；$b_n=3n-1$，$b_1=2$. 此时满足$\{a_n\}$，$\{b_n\}$都是等差数列，且$\frac{S_n}{T_n}=\frac{2n}{3n+1}$，于是有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n-1}=\frac{2}{3},$$

故选 C.

［**说明**］ 注意到 a_1，b_1 为常数，还有如下解法：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+a_1}{b_n+b_1}=\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{T_n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{3n+1}=\frac{2}{3}.$$

这里的解法，比解一、解二更简捷，得益于对极限概念的较深理解和计算的熟练.

例 6 F_1、F_2 为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的两个焦点，$M$ 是

椭圆上与 F_1、F_2 不共线的任意一点，I 是$\triangle MF_1F_2$ 的内心，延长 MI 交 F_1F_2 于 N 点，则比值 $|MI|:|IN|$ 为(　　).

A. $\dfrac{a}{c}$　　B. $\dfrac{a}{b}$　　C. $\dfrac{b}{c}$　　D. $\dfrac{a+b}{b+c}$

［分析］ 如果保持点 M 的任意性，就会“小题”不“小”，计算相当费力. 让点 M 处于特殊位置(在 y 轴上)，并取特殊值 $a=5,b=3$，于是 $c=4$. 此时由 $F_1(-4,0)$，$F_2(4,0)$和 $M(0,3)$，可求出等腰$\triangle MF_1F_2$ 的内心 I 的坐标，从而得到 $|MI|:|IN|$ 的值. 为了使计算更简便，可进一步特殊化，使$\triangle MF_1F_2$ 为等边三角形，于是易得 $|MI|:|IN|=2:1=2$.

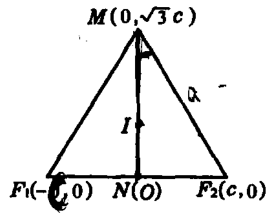

图 1-3

［解］ 如图 1-3，当$\triangle MF_1F_2$ 为等边三角形时，有 $|MI|:|IN|=2$. 此时，$b=\sqrt{3}c$，$a=2c$，$\dfrac{a}{c}=\dfrac{2c}{c}=2$，故选 A.

例 7　设复数 $z_1=2\sin\theta+\mathrm{i}\cos\theta\left(\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$在复平面上对应向量$\overrightarrow{OZ_1}$，将$\overrightarrow{OZ_1}$按顺时针方向旋转$\dfrac{3\pi}{4}$后得到向量$\overrightarrow{OZ_2}$，$\overrightarrow{OZ_2}$对应的复数为 $z_2=r(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$，则 $\tan\varphi$ 等于(　　).

A. $\dfrac{2\tan\theta+1}{2\tan\theta-1}$　　B. $\dfrac{2\tan\theta-1}{2\tan\theta+1}$

C. $\dfrac{1}{2\tan\theta+1}$　　D. $\dfrac{1}{2\tan\theta-1}$

［分析］ 如果埋头计算 $z_2=(2\sin\theta+\mathrm{i}\cos\theta)\left[\cos\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)\right]$并化为 $r(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$的形式，再求 $\tan\varphi$，就有些“小题大做”，宜把 $\theta\left(\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$特殊化，再考察$\overrightarrow{OZ_1}$旋转后的情况.

［解］ 取 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$，就有 $z_1=\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$，显然 $\arg z_1\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$. 当$\overrightarrow{OZ_1}$

按顺时针方向旋转$\frac{3\pi}{4}$后得到$\overrightarrow{OZ_2}$,可知 $\arg z_2\in\left(\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right)$,因此$\tan\varphi>1$.

当 $\theta\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$时,由选择支所给出的各分式,容易知道 A 式的值大于 1,而 B、C、D 式的值均小于 1,故选 A.

例 8 定义在$(-\infty,+\infty)$上的任意函数 $f(x)$都可以表示成一个奇函数 $g(x)$与一个偶函数 $h(x)$之和.如果

$$f(x)=\lg(10^x+1),\quad x\in(-\infty,+\infty),$$

那么(　　).

A. $g(x)=x$, $h(x)=\lg(10^x+10^{-x}+2)$

B. $g(x)=\frac{1}{2}[\lg(10^x+1)+x]$, $h(x)=\frac{1}{2}[\lg(10^x+1)-x]$

C. $g(x)=\frac{x}{2}$, $h(x)=\lg(10^x+1)-\frac{x}{2}$

D. $g(x)=-\frac{x}{2}$, $h(x)=\lg(10^x+1)+\frac{x}{2}$

(1994 年全国)

[**分析**] 本题的不少表达式较复杂,直接用选择支检验并不容易,也难以用“特殊化”方法,知难而返,可转而主动探求符合条件的$g(x)$和 $h(x)$:

按题意,$f(x)=g(x)+h(x)$,其中 $g(x)$为奇函数,$h(x)$是偶函数,故

$$f(-x)=g(-x)+h(-x)=-g(x)+h(x).$$

由$\begin{cases}g(x)+h(x)=f(x),\\-g(x)+h(x)=f(-x),\end{cases}$可解得

$$\begin{cases}g(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)],\\h(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)].\end{cases}$$

[**解**] $g(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$

$$=\frac{1}{2}[\lg(10^x+1)-\lg(10^{-x}+1)]$$

$$=\frac{1}{2}\lg\frac{10^x+1}{10^{-x}+1}=\frac{1}{2}\lg\frac{10^x(10^x+1)}{10^x+1}=\frac{x}{2},$$

对照选择支选定 C.

［**剖析与展望**］ 许多选择题可用“特殊化”方法简捷解决，但本题却正好相反，宜先一般地求出

$$g(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)],\quad h(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)].$$

把问题先一般化和先特殊化的思考同样有用，因为抽象性和普遍性是数学科学的重要特性，一般情况往往能更明确更深刻地反映问题的实质，有时可以避开繁琐的表象的干扰，从而容易解决问题.

“特殊化”与“一般化”，分析与综合，直接证法与间接证法等等，总是相辅相成，宜择简为用. 下面是用“一般化”解题的另一例.

例 9 已知异面直线 a 和 b 所成的角为 $50°$，P 为空间一定点，则过点 P 且与 a、b 所成的角都是 $30°$的直线有且仅有（　　）.

A. 1 条　　B. 2 条　　C. 3 条　　D. 4 条

（1993 年全国）

［**分析**］ 不妨先讨论一般问题：已知异面直线 a 与 b 所成的角为 $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$，$P$ 为空间一定点，则过 P 点且与 a、b 所成的角都是 α 的直线有且仅有几条？

［**解**］ 过 P 作直线 $m/\!/a$，$n/\!/b$，则过 P 的直线 l 与 m、n 所成的角即为 l 与 a、b 所成的角.

问题可转化为：已知直线 m 与 n 相交于 P，m、n 所成的角为 $\theta\left(0<\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，则过点 P 且与 m、n 所成的角都是 α 的直线有且仅有几条？

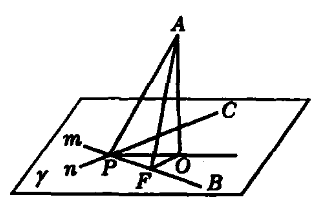

图 1-4

如图 1-4，设由直线 m、n 确定的平面为 γ，

$\angle BPC=\theta$，$\angle APB=\angle APC=\alpha$.

AP 在平面 γ 上的射影为 $\angle BPC$ 的角平分线 PO，$\angle OPB = \frac{\theta}{2}$.

若在平面 γ 内作 $OF \perp PB$ 于 F，则由三垂线定理得 $AF \perp PB$，故有

$$\cos\alpha = \frac{PF}{AP}, \quad \cos\frac{\theta}{2} = \frac{PF}{PO},$$

$$\cos\angle APO = \frac{PO}{AP}.$$

所以
$$\cos\angle APO = \frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\theta}{2}} \leqslant 1,$$

即
$$\cos\alpha \leqslant \cos\frac{\theta}{2}.$$

因为 α、$\frac{\theta}{2}$ 为锐角，所以 $\alpha \geqslant \frac{\theta}{2}$.

由此可知：当 $\alpha \geqslant \frac{\theta}{2}$ 时，原问题有解；当 $\alpha = \frac{\theta}{2}$ 时，AP 为 $\angle BPC$ 的角平分线；当 $\alpha < \frac{\theta}{2}$ 时，则不存在题设的直线.

因为两条直线相交成四个角，两个角为 θ，两个角为 $(\pi - \theta)$，故还须判断 α 与 $\frac{\pi - \theta}{2}$ 的大小.

可以得到如下结论：

(1) 当 $\alpha < \frac{\theta}{2}$ 时，可作 0 条直线；

(2) 当 $\alpha = \frac{\theta}{2}$ 时，可作 1 条直线；

(3) 当 $\frac{\theta}{2} < \alpha < \frac{\pi - \theta}{2}$ 时，可作 2 条直线；

(4) 当 $\alpha = \frac{\pi - \theta}{2}$ 时，可作 3 条直线；

(5) 当 $\frac{\pi - \theta}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 时，可作 4 条直线；

(6) 当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时，可作 1 条直线.

按本题条件，有

$$\frac{50^\circ}{2} < 30^\circ < \frac{180^\circ - 50^\circ}{2},$$

符合结论(3),故应选 B.

例 10 设集合 $M = \left\{x \middle| x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4}, k \in \mathbf{Z}\right\}, N = \left\{x \middle| x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$,则(　　).

$2(\frac{k}{4} + \frac{1}{4})$

A. $M = N$　　B. $M \subset N$　　C. $M \supset N$　　D. $M \cap N = \varnothing$

(2002 年全国)

[**分析**] 可以先列举特殊值,再说理;也可以直接作一般性证明.

[**解一**] 集合 M 即$\left\{\cdots, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1\frac{1}{4}, 1\frac{3}{4}, \cdots\right\}$,各元素成公差为$\frac{1}{2}$的等差数列;

集合 N 即$\left\{\cdots, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, 1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{2}, 1\frac{3}{4}, \cdots\right\}$,各元素成公差为$\frac{1}{4}$的等差数列.

易知 $M \subset N$,应选 B.

[**解二**] 对 M, $x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(2k+1)$, $2k+1$ 表示任意奇数;

对 N, $x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(k+2)$, $k+2$ 表示任意整数.

显然 $M \subset N$,应选 B.

[**剖析与展望**] (1) 本题与以下两道试题完全一样:

(1993 年六省市高考题)集合 $M = \left\{x \middle| x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}\right\}$, $P = \left\{x \middle| x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$,则(C).

A. $M = P$　　B. $M \supset P$　　C. $M \subset P$　　D. $M \cap P = \varnothing$

(1995 年希望杯试题)集合 $P = \left\{x \middle| x = \frac{2k+1}{4}, k \in \mathbf{Z}\right\}$, $Q = \left\{y \middle| y = \frac{k+2}{4}, k \in \mathbf{Z}\right\}$,则(　　).

A. $P=Q$　　B. $P \supsetneqq Q$　　C. $P \subsetneqq Q$　　D. $P \cap Q = \varnothing$

(2) 设全集 $U=\mathbf{Z}$,集合 $A=\{x \mid x=3k, k\in\mathbf{Z}\}$, $B=\{x \mid x=3k \pm 1, k\in\mathbf{Z}\}$. 注意任意整数 x 被 3 除时,只能出现 $x=3k, 3k-1$ 或 $3k+1$,因此 $A\cup B=U$,也可写成$\complement_U A=B$, $\complement_U B=A$.

这类问题还可能以不同面貌出现.

例 11 在等比数列$\{a_n\}$中,$a_1>1$,且前 n 项和 S_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\dfrac{1}{a_1}$,那么 a_1 的取值范围是(　　).

A. $(1,+\infty)$　B. $(1,4)$　　C. $(1,2)$　　D. $(1,\sqrt{2})$

(1998 年全国)

[**分析**] 对无穷等比数列$\{a_n\}$,当$|q|<1$时,则其和

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{a_1}{1-q}.$$

[**解**] 由题设,a_1 与 q 应满足

$$\begin{cases}\dfrac{a_1}{1-q}=\dfrac{1}{a_1},\\ |q|<1, a_1>1,\end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} q=1-a_1^2,\\ |q|<1, a_1>1.\end{cases}$$

解$|1-a_1^2|<1$,即$-1<1-a_1^2<1$,得 $a_1^2<2$.

由 $a_1>1$ 及 $a_1^2<2$,得 $1<a_1<\sqrt{2}$,选 D.

[**说明**] 关键是把握隐含条件$|q|<1$,这是由条件$\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\dfrac{1}{a_1}$提示的.

例 12 不等式组$\begin{cases} x>0,\\ \dfrac{3-x}{3+x}>\left|\dfrac{2-x}{2+x}\right|\end{cases}$的解集是(　　).

A. $\{x \mid 0<x<2\}$　　　　B. $\{x \mid 0<x<2.5\}$

C. $\{x \mid 0<x<\sqrt{6}\}$　　　　D. $\{x \mid 0<x<3\}$

(全国 1997 年)

[**分析**] 由题设可知 $x>0$ 且$\dfrac{3-x}{3+x}>0$,故 $0<x<3$. 在四个选

择支中出现的数的大小关系是 $2<\sqrt{6}<2.5<3$.

［**解一**］ 由 $x>0$ 且 $\dfrac{3-x}{3+x}>0$,可知 $x\in\{x|0<x<3\}$.

四个供选择的集合间的关系是 $A\subset C\subset B\subset D$,即都包含集合 $\{x|0<x<2\}$,因此只要解

$$\begin{cases}2\leqslant x<3,\\ \dfrac{3-x}{3+x}>\left|\dfrac{2-x}{2+x}\right|,\end{cases}\quad 即\quad \begin{cases}2\leqslant x<3,\\ \dfrac{3-x}{3+x}>\dfrac{x-2}{2+x},\end{cases}$$

亦即 $\begin{cases}2\leqslant x<3,\\ x^2<6,\end{cases}$ 可得 $2\leqslant x<\sqrt{6}$.

因为 $\{x|0<x<2\}\cup\{x|2\leqslant x<\sqrt{6}\}=\{x|0<x<\sqrt{6}\}$,应选 C.

［**解二**］ 注意到 $2<\sqrt{6}<2.5<3$,由小到大取特殊值进行检验:

取 $x=2$,有 $\dfrac{3-2}{3+2}>\left|\dfrac{2-2}{2+2}\right|$,即 $\dfrac{1}{5}>0$,能成立,舍去(A).

取 $x=\sqrt{6}$,有

$$\frac{3-\sqrt{6}}{3+\sqrt{6}}>\left|\frac{2-\sqrt{6}}{2+\sqrt{6}}\right|,\quad 即\quad \frac{3-\sqrt{6}}{3+\sqrt{6}}>\frac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{6}+2},$$

亦即

$$(3-\sqrt{6})(\sqrt{6}+2)>(3+\sqrt{6})(\sqrt{6}-2).$$

化简得 $\sqrt{6}>\sqrt{6}$,不能成立,故又可否定 B、D,应选 C.

［**说明**］ (1) 注重分析和综合,可使计算简化.

(2) 特殊值检验法对解某些选择题很有效.

例 13 设集合 $M=\left\{x\,\middle|\,x=\cos\dfrac{5m\pi}{12},m\in\mathbf{Z}\right\}$, $P=\left\{y\,\middle|\,y=\cos\dfrac{n\pi}{12},n\in\mathbf{Z}\right\}$,则集合 M 与 P 的关系是(CA)

A. $M=P$　　B. $M\supset P$　　C. $M\subset P$　　D. $M\neq P$

［**分析**］ 容易知道 $M\subseteq P$,关键在于是否又有 $P\subseteq M$.要注意余弦函数的如下性质:

$$\cos\alpha=\cos(2k\pi\pm\alpha),k\in\mathbf{Z}.$$

［**解**］ 因为 $\dfrac{5m\pi}{12}(m\in\mathbf{Z})$能取到的值,$\dfrac{n\pi}{12}(n\in\mathbf{Z})$都能取到(只