控制理论与控制工程中的

矩阵分析基础

何希勤 张大庆 编著

科学出版社
www.sciencep.com

控制理论与控制工程中的矩阵分析基础

何希勤　张大庆　编著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书主要介绍了控制理论与控制工程中有应用价值的矩阵理论与方法. 以线性系统为背景, 应用矩阵理论方法, 分析了控制理论中的某些经典问题. 全书共分 9 章, 对 Banach 空间与 Hilbert 空间、矩阵范数、矩阵分解多项式矩阵、矩阵函数及其应用、特征值与奇异值的估计、广义逆矩阵和两种积矩阵、几种特殊的矩阵以及矩阵不等式及其应用等作了较为详细的讨论. 为方便读者学习, 在各章后结合内容配备了一定数量的习题.

本书内容丰富、阐述简明、推导严谨, 适合理工科高年级本科生和研究生阅读, 也可供相关专业的教师和工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

控制理论与控制工程中的矩阵分析基础/何希勤, 张大庆编著. —北京: 科学出版社, 2010.5

ISBN 978-7-03-027246-1

Ⅰ.控… Ⅱ.①何… ②张… Ⅲ.自动控制理论-矩阵分析 Ⅳ.TP13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010) 第 068898 号

责任编辑: 王丽平 房 阳 刘凤娟 / 责任校对: 陈玉凤

责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 王 浩

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

丽源印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010 年 5 月第 一 版 开本: B5(720×1000)

2010 年 5 月第一次印刷 印张: 13 3/4

印数: 1—2 500 字数:262 000

定价: 45.00 元

前　言

矩阵理论是数学的一个重要分支,在多种工程学科中都有极其重要的应用. 特别是对线性控制系统深入研究的需要推动了矩阵理论的发展,使矩阵理论的内容更加丰富多彩. 写作本书的目的是为工程技术人员、理工科高年级学生和研究生提供一本内容较全面、兼顾矩阵理论与线性控制系统的书籍,其中,矩阵理论部分力求完整,并且起点较高. 本书首先从 Banach 空间与 Hilbert 空间着手,讨论了距离空间、线性赋范空间以及内积空间的一些结论,为全书奠定了理论基础. 其次,对矩阵理论中的经典结论进行了较详细的讨论. 最后,以 Takagi-Sugeno(T-S) 模糊系统的稳定性、能控性以及耗散性为例,介绍了线性矩阵不等式和平方和的概念与方法. 书中内容阐述过程简明严谨,并且在给出证明前,往往对所讨论问题进行了提示性的分析,以求扩展读者思路,使读者对所讨论问题的认识更加清晰,增强了本书的可读性.

本书共分为 9 章. 第 1 章介绍了 Banach 空间与 Hilbert 空间的一些结论,为全书奠定了理论框架. 第 2 章详细地讨论了矩阵范数的相关问题. 第 3 章介绍了线性控制系统中常用的几种矩阵分解形式. 第 4 章给出了多项式矩阵的相关结论,包括多项式矩阵的 Smith 标准形、数字矩阵的 Jordan 标准形、有理分式矩阵的 McMillan 标准形等. 第 5 章研究了矩阵函数与矩阵分析的相关内容,并进一步讨论了线性时不变系统的能控性、能观测性与稳定性问题. 第 6 章给出了方阵特征值与矩阵奇异值的估计方法. 第 7 章介绍了矩阵的广义逆矩阵以及矩阵的 Kronecker 积与 Hadamard 积,并介绍了它们在求解 Lyapunov 方程与 Riccati 方程时的应用. 第 8 章介绍了几种特殊矩阵的性质及相关结论,包括非负矩阵、非奇异 M 矩阵、区间矩阵等,并给出了区间矩阵 (区间系统) 为 Hurwitz 稳定的充分必要条件. 第 9 章介绍了线性矩阵不等式和平方和的概念,以 T-S 模糊系统的相关问题为例说明了它们的使用方法.

本书在编写过程中得到了辽宁科技大学学术专著、译著出版基金的资助和丁桂艳、卢飞龙、孟丽新、陈刚、朱广庆、陈广华、王蒙、姚玉未等同志的帮助,特此致谢.

由于作者的学识水平所限,书中的欠缺及疏漏在所难免,诚请指正.

作　者

2009 年 9 月

符 号 说 明

$\mathbf{N}$	自然数集
$\mathbf{Z}$	整数集
$\mathbf{R}$	实数集、实数域
$\mathbf{C}$	复数集、复数域
$\mathbf{R}^n$	n 维实向量集合
$\mathbf{C}^n$	n 维复向量集合
$\mathbf{R}^{m\times n}$	$m\times n$ 阶实矩阵集合
$\mathbf{C}^{m\times n}$	$m\times n$ 阶复矩阵集合
I	单位矩阵
I_n	n 阶单位矩阵
$\dim V$	线性空间 V 的维数
$\mathrm{Rank}(A)$	矩阵 A 的秩
$\mathbf{F}_r^{m\times n}(\mathbf{R}_r^{m\times n}, \mathbf{C}_r^{m\times n})$	元素在数域 $\mathbf{F}$(实数域 $\mathbf{R}$、复数域 $\mathbf{C}$) 中秩为 r 的 $m\times n$ 阶矩阵集合
$\mathrm{Tr}A$	矩阵 A 的迹
$U^{n\times n}$	n 阶酉矩阵集合
$U_r^{m\times r}$	r 个列向量是标准正交向量组的 $m\times r$ 阶矩阵集合
$U_r^{r\times n}$	r 个行向量是标准正交向量组的 $r\times n$ 阶矩阵集合
$\lambda(A)$	矩阵 A 的谱，矩阵 A 的所有特征值的集合
$\rho(A)$	矩阵 A 的谱半径
$\det A$	矩阵 A 的行列式
A^-	矩阵 A 的广义逆
A^+	矩阵 A 的 M-P 广义逆
$\mathrm{adj}A, A^*$	矩阵 A 的伴随矩阵
A^{T}	矩阵 A 的转置
A^{H}	矩阵 A 的共轭转置
$V_1 + V_2$	子空间 V_1 与 V_2 的直和
$V_1 \oplus V_2$	子空间 V_1 与 V_2 的正交和
$S^{\perp}(A^{\perp})$	子空间 S(矩阵 A) 的正交补
$\mathrm{Re}\lambda$	复数 λ 的实部
$\mathrm{Im}\lambda$	复数 λ 的虚部

$\|\cdot\|$	范数
$\mathrm{cond}(A)$	矩阵 A 的条件数
$\deg(p(x)) = n$	多项式 $p(x)$ 的次数为 n
$A \otimes B$	矩阵 A 与 B 的 Kronecker 积 (K 积)
$A \circ B$	矩阵 A 与 B 的 Hadamard 积

目　　录

第 1 章　Banach 空间与 Hilbert 空间

数学分析的特点是用极限研究函数, 最先遇到的是实数序列的极限概念. 这个概念可以推广到复数序列. 这些收敛概念都有一个重要的共性, 即一个序列 x_n 收敛于 x 是指 x_n 无限地 "接近" 于 x, 即 x_n 与 x 之间的 "距离" 可以无限地减小. 因此, 随着对 "距离" 概念的理解不同, 就可以得到不同的极限定义. 于是可以认为一个合理的方法是在某些集合内给出元素间一个抽象的距离定义, 而将序列的收敛等各种极限概念包括在按 "距离" 收敛的概念之中.

为了以后证明方便, 本章首先介绍几个重要的不等式. 之后将给出距离空间的概念以及空间的可分性、完备性、列紧性与紧性. 然后从线性空间出发, 在线性空间中赋以 "范数", 在范数的基础上诱导出距离, 即得到线性赋范空间. 将线性赋范空间与完备性综合就有了 Banach 空间. 为了使线性赋范空间中包含更多的几何性质, 如欧氏空间的角度、正交等概念, 进而给出 "内积" 的定义. 线性空间中赋以内积后称之为内积空间. 由于由内积也可以诱导出范数, 因而内积空间是一种特殊而有用的线性赋范空间. 完备的内积空间就是通常所说的 Hilbert 空间. 可以看出, Hilbert 空间是一类更接近于欧氏空间的抽象空间, 它保留了欧氏空间中最常用的一些性质.

1.1　几个重要不等式

下面介绍的几个不等式在后面的有关结论证明中起着十分重要的作用. 因此, 以定理的形式给出.

引理 1.1　设 $x>0, x\in \mathbf{R}, 0<\alpha<1$, 则 $x^{\alpha}-\alpha x\leqslant 1-\alpha$.

证明　设 $f(x)=x^{\alpha}-\alpha x$, 则 $f'(x)=\alpha(x^{\alpha-1}-1)$. 显然, 当 $0<x<1$ 时, $f'(x)>0$; 当 $x>1$ 时, $f'(x)<0$. 因此, $f(x)$ 在 $x=1$ 处达到最大值, 所以上述不等式成立. □

引理 1.2　设 a,b 是正实数, α,β 是满足 $\alpha<1,\beta<1$ 以及 $\alpha+\beta=1$ 的正数, 则 $a^{\alpha}b^{\beta}\leqslant \alpha a+\beta b$.

证明　取 $x=\dfrac{a}{b}$, 并记 $1-\alpha$ 为 β, 由引理 1.1 即得. □

引理 1.3　设 $a>0,b>0,K>1,K'>1,\dfrac{1}{K}+\dfrac{1}{K'}=1$, 则 $ab\leqslant \dfrac{1}{K}a^{K}+\dfrac{1}{K'}b^{K'}$.

证明　在引理 1.2 中, 令 $K=\dfrac{1}{\alpha}, K'=\dfrac{1}{\beta}$, 并以 a^K 代替 a, 以 $b^{K'}$ 代替 b, 引理得证. □

定理 1.1 (Hölder 不等式)　设对 $i=1,2,\cdots,n$, $a_i>0$, $b_i>0$, 又 $K>1$, $K'>1$, $\dfrac{1}{K}+\dfrac{1}{K'}=1$, 则

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^K\right)^{\frac{1}{K}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^{K'}\right)^{\frac{1}{K'}}$$

其积分形式为

$$\int_a^b|fg|\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_a^b|f|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_a^b|g|^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}$$

其中, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1, p>0, q>0$. 特别地, 当 $K=K'=2$ 时, 有

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)^{\frac{1}{2}},\quad a,b\in\mathbf{R}$$

该不等式称为 Cauchy-Schwarz 不等式, 其积分形式为

$$\left(\int_a^b fg\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_a^b|f|^2\,\mathrm{d}x\cdot\int_a^b|g|^2\,\mathrm{d}x$$

证明　先设 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^K=\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^{K'}=1$, 此时, 所要证明的不等式成为 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i\leqslant 1$. 对 $i=1,2,\cdots,n$, 在引理 1.3 中依次设 $a=a_i, b=b_i$, 然后将得到的不等式组相加起来, 再利用假设即得. 一般地, 令 $a_i'=a_i\Big/\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^K\right)^{\frac{1}{K}}$. 显然, a_i' 与 b_i' 满足之前的假设, 由此, $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i'b_i'\leqslant 1$, 故定理得证. □

定理 1.2 (Minkowski 不等式)　设对 $i=1,2,\cdots,n$, $a_i>0, b_i>0$, $K>1$, 则

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^K\right)^{\frac{1}{K}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^K\right)^{\frac{1}{K}}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^K\right)^{\frac{1}{K}}$$

其积分形式为

$$\left(\int_a^b|f+g|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\int_a^b|f|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_a^b|g|^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}$$

证明 注意到 $\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^K=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i(a_i+b_i)^{K-1}+\sum\limits_{i=1}^{n}b_i(a_i+b_i)^{K-1}$, 对右端两个和式分别应用 Hölder 不等式得到 $\left(因为\ \dfrac{1}{K}+\dfrac{1}{K'}=1\right)$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^K &\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^K\right)^{\frac{1}{K}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^{(K-1)K'}\right)^{\frac{1}{K'}}\\ &\quad+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^K\right)^{\frac{1}{K}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^{(K-1)K'}\right)^{\frac{1}{K'}}\\ &=\left[\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^K\right)^{\frac{1}{K}}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^K\right)^{\frac{1}{K}}\right]\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^K\right)^{\frac{1}{K'}}\end{aligned}$$

于是

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^K}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^K\right)^{\frac{1}{K'}}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^K\right)^{\frac{1}{K}}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^K\right)^{\frac{1}{K}}$$

定理得证. □

1.2 距 离 空 间

1.2.1 基本概念

已经知道在直线 $\mathbf{R}$ 上任意两点 x 与 y 之间的距离为

$$\rho(x,y)=|x-y| \tag{1.1}$$

而平面 $\mathbf{R}^2$ 上任意两点 $x=(x_1,x_2)$ 与 $y=(y_1,y_2)$ 之间的距离为

$$\rho(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2} \tag{1.2}$$

无论是式 (1.1) 还是式 (1.2), 容易验证 $\rho(x,y)$ 满足以下三个基本性质:

(1) $\rho(x,y)\geqslant 0$, 并且 $\rho(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$;

(2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$;

(3) $\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)$.

如果对上述这些具体空间中的距离 ρ 加以抽象, 就得到距离空间 (也称度量空间) 的概念.

定义 1.1　设 X 是任一集合, 如果对于 X 中任意两个元素 x, y, 都存在一个实数 $\rho(x,y)$ 与之对应, 并且 $\rho(x,y)$ 满足以下条件:

(1) (非负性) $\rho(x,y) \geqslant 0$, 并且 $\rho(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$;

(2) (对称性) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$;

(3) (三角不等式) $\forall x,y,z \in X$ 有

$$\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z)+\rho(z,y)$$

则称 $\rho(x,y)$ 为集合 X 中 x, y 的一种距离, X 为以 $\rho(x,y)$ 为距离的距离空间, x, y, z 称为 X 中的点.

例 1.1 (n 维欧氏空间)　设 $\mathbf{R}^n$ 表示 n 维向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的全体构成的集合, 其中, x_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 均为实数. 若 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in \mathbf{R}^n$, 定义

$$\rho(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.3}$$

定义 1.1 条件 (1) 和条件 (2) 显然成立, 因此, 仅验证条件 (3) 成立即可. 由 Cauchy-Schwarz 不等式知

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2 &= \sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\sum_{i=1}^{n}a_ib_i+\sum_{i=1}^{n}b_i^2\\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}+\sum_{i=1}^{n}b_i^2\\ &= \left[\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2\end{aligned}$$

令 $a_i=x_i-z_i$, $b_i=z_i-y_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 于是有

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2 \leqslant \left\{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}+\left[\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^2$$

即得 $\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)$.

例 1.2 (连续函数空间)　$C[a,b] \triangleq \{x(t) \mid x(t)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数$\}$, 在 $C[a,b]$ 上定义

$$\rho(x,y)=\max_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)| \tag{1.4}$$

这样式 (1.4) 为 $C[a,b]$ 中的一种距离, 即 $C[a,b]$ 按式 (1.4) 为距离空间.

首先, 条件 (1) 和条件 (2) 显然成立, 因而只需验证条件 (3). 记 $x(t), y(t), z(t) \in C[a,b]$, 因为对于任意的 $t \in [a,b]$ 均有

$$\begin{aligned}|x(t)-y(t)| &\leqslant |x(t)-z(t)|+|z(t)-y(t)| \\ &\leqslant \max_{t\in[a,b]}|x(t)-z(t)|+\max_{t\in[a,b]}|z(t)-y(t)| \\ &=\rho(x,z)+\rho(z,y)\end{aligned}$$

因而由任意性知

$$\rho(x,y)=\max_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)$$

例 1.3(离散距离空间) 设 Z 为任一非空集合, $\forall x, y \in Z$, 定义

$$\rho(x,y)=\begin{cases}1, & x\neq y\\ 0, & x=y\end{cases} \tag{1.5}$$

可以验证式 (1.5) 满足距离的三个条件, 于是 Z 按式 (1.5) 成为距离空间.

注 1.1 (1) 由例 1.3 可知任何一个非空集上都可以定义距离使之成为距离空间;

(2) 同一集合中, 也可以根据需要定义不同的距离使之成为距离空间. 例如, 在例 1.1 中, $\forall x, y \in \mathbf{R}^n$, 定义

$$\rho_1(x,y)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i-y_i| \tag{1.6}$$

可以验证 $\rho_1(x,y)$ 也是 $\mathbf{R}^n$ 中的一种距离.

定义 1.2 设 X 是一个距离空间, $x_n, x \in X$ $(n=1,2,\cdots)$, 如果当 $n\to\infty$ 时, $\rho(x_n,x)\to 0$, 则称点列 $\{x_n\}$ 按距离 ρ 收敛于 x. x 称为点列 $\{x_n\}$ 的极限, 记作 $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = x$ 或 $x_n \to x$.

定义 1.3 设 X 是距离空间,

(1) 若 $x_0 \in X$, $r>0$, 则称集合

$$S(x_0,r)=\{x|x\in X,\rho(x,x_0)<r\}$$

是以 x_0 为中心, r 为半径的开球, 或称为 x_0 的一个邻域; 称集合 $\bar{S}(x_0,r)=\{x|x\in X,\rho(x,x_0)\leqslant r\}$ 是以 x_0 为中心, r 为半径的闭球;

(2) 设 $A\subset X$, 若存在一个开球 $S(x_0,r)$, 使得 $A\subset S(x_0,r)$ 成立, 则称 A 是 X 中的有界集.

距离空间中的点列收敛具有数列收敛的诸多基本性质.

定理 1.3　设 X 是距离空间, 则

(1) X 中任何收敛点列 $\{x_n\}$ 的极限是唯一的;

(2) 若点列 $x_n \to x\ (n \to \infty)$, 则 $\{x_n\}$ 的任何子列 $x_{n_k} \to x\ (k \to \infty)$;

(3) X 中任何收敛点列必是有界的.

证明　(1) 若 $x_n \to x$, $x_n \to y$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得当 $n > N$ 时有 $\rho(x_n, x) < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $\rho(x_n, y) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. 当 $n > N$ 时由三角不等式知

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x_n, x) + \rho(x_n, y) < \varepsilon$$

这样有 $\rho(x, y) = 0$, 从而 $x = y$.

(2) 若 $x_n \to x$, 则 $\rho(x_n, x) \to 0\ (n \to \infty)$. 因此, 当 $k \to \infty$ 时, $\rho(x_{n_k}, x) \to 0$, 即 $x_{n_k} \to x\ (k \to \infty)$.

(3) 若 $x_n \to x$, 则 $\rho(x_n, x) \to 0\ (n \to \infty)$, 从而收敛数列 $\{\rho(x_n, x)\}$ 一定是有界数列, 因此, 存在常数 M, 使得 $\rho(x_n, x) < M\ (n = 1, 2, \cdots, n)$, 即 $\{x_n\} \subset S(x, M)$, 因而 $\{x_n\}$ 是有界的. □

定义 1.4　设 X 是距离空间, $G \subset X$, $x_0 \in X$. 若存在 x_0 的邻域 $S(x_0, r) \subset G$, 则称 x_0 为 G 的内点. 若 G 的每个点均是内点, 则称 G 为开集.

例如, 任一开球 $S(x_0, r)$ 是开集. 如果 $x_0 \in X$, 有时也把包含 x_0 的任一开集称为 x_0 的邻域, 而称 $S(x_0, r)$ 为 x_0 的球形邻域.

定义 1.5　设 X 是距离空间, $A \subset X$, $x_0 \in X$,

(1) 如果 $\forall \varepsilon > 0$, $S(x_0, \varepsilon)$ 均含有 A 中不同于 x_0 的点, 则称 x_0 为 A 的聚点; A 的聚点的全体构成的集合称为 A 的导集, 记作 A', 称集合 $\bar{A} = A \cup A'$ 为 A 的闭包;

(2) 若 $x \in A$, 但 $x \notin A'$, 则称 x 为 A 的孤立点;

(3) 设而 $F' \subset F$, 则称 F 为闭集.

定理 1.4　设 X 是距离空间, $A \subset X$, 则

(1) $\bar{A}$ 是闭集;

(2) A 是闭集当且仅当 $A = \bar{A}$.

证明　(1) 仅需证 $(\bar{A}') \subset \bar{A}$. 设 $x_0 \in (\bar{A}')$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, $S\left(x_0, \dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ 都含有 $\bar{A}$ 中不同于 x_0 的点 x_1. 由于 $x_1 \in \bar{A} = A \cup A'$, 则 $x_1 \in A'$ 或 $x_1 \in A$. 若 $x_1 \in A'$, 则 $S\left(x_1, \dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ 含有 A 中不同于 x_1 的点 x_2, 而 $\rho(x_0, x_2) \leqslant \rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) < \varepsilon$, 所以 $x_2 \in A$, $x_2 \in S(x_0, \varepsilon)$. 又若 $x_1 \in A$, 则有 $x_1 \in S\left(x_0, \dfrac{\varepsilon}{2}\right) \subset S(x_0, \varepsilon)$. 总之, 在 $S(x_0, \varepsilon)$ 中含有 A 中不同于 x_0 的点, 故 $x_0 \in A' \subset \bar{A}$, 即 $(\bar{A}') \subset \bar{A}$, 从而 $\bar{A}$ 是闭集.

(2) 若 A 是闭集, 则 $A' \subset A$, 故 $\bar{A} = A \cup A' = A$; 反之, 若 $A = \bar{A}$, 由于 $\bar{A}$ 是闭集, 故 A 是闭集. □

1.2.2 可分性与完备性

实数系中有理数的稠密性与实数的完备性在数学分析中起着十分重要的作用，下面将这两个概念推广到距离空间中去.

定义 1.6 设 X 是距离空间, A 与 B 均为 X 的子集, 若 $\forall x \in A$, 存在 $\{x_n\} \subset B$, 使 $x_n \to x$, 则称 B 在 A 中稠密. 当 $A = X$ 时, 称 B 在 X 中处处稠密.

显然, B 在 A 中稠密与以下两个命题之一是等价的:

(1) $\forall x \in A$, x 的任何邻域中均含有 B 中的点;

(2) $A \subset \bar{B}$, 特别地, 当 $A = X$ 时, $\bar{B} = X$.

定义 1.7(可分性) 设 X 是距离空间, 若 X 中存在一个处处稠密的可数子集, 则称 X 是可分的距离空间.

例 1.4 实数集 $\mathbf{R}$ 按通常的距离是一个可分的距离空间, 因为有理数集是 $\mathbf{R}$ 中的一个处处稠密的可数子集.

定义 1.8(完备性) 设 X 是距离空间,

(1) 若点列 $\{x_n\} \subset X$, 满足 $\lim\limits_{m,n\to\infty} \rho(x_m, x_n) = 0$, 即 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in N^+$, 使得当 $m > N, n > N$ 时有 $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$, 则称 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 序列或基本列;

(2) 若 X 中的每个基本列均收敛, 则称 X 为完备的距离空间.

例 1.5 $C[a,b]$ 是完备的距离空间.

设 $\{x_n\} \subset C[a,b]$ 是基本列, 故 $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in N^+$, 当 $m > N, n > N$ 时有 $\rho(x_m, x_n) = \max\limits_{t\in[a,b]} |x_m(t) - x_n(t)| < \varepsilon$, 即当 $m > N, n > N$ 时, 对每个 $t \in [a,b]$ 有 $|x_m(t) - x_n(t)| < \varepsilon$, 故存在 $x(t)$, 使 $x_n(t)$ 一致收敛于 $x(t) \in C[a,b]$. 因此, $C[a,b]$ 是完备的距离空间.

思考题 若定义距离 $\rho_1(x,y) = \left(\displaystyle\int_a^b |x(t) - y(t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$, 则此时 $C[a,b]$ 按 $\rho_1(x,y)$ 不是完备的.

1.2.3 列紧性与紧性

数学分析中曾证明过实数完备性定理与波尔查诺-魏尔斯特拉斯列紧性定理以及海因-博雷尔有限覆盖定理的等价性. 在一般的距离空间中, 列紧性定理不一定成立. 例如, 考察 $C[0,1]$ 的点列 $\{x_n\}$: t^n $(n = 1, 2, \cdots)$. 显然, $\{x_n\}$ 是有界点列, 因为若令 $x_0(t) \equiv 0$, 则 $\rho(x_n, x_0) = \max\limits_{t\in[0,1]} |x_n(t)| = \max\limits_{t\in[0,1]} t^n = 1 < 2$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 但它不具有收敛的子列. 否则, 若 $\exists \{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$, 而 $x_{n_k} \to x$. 由于 $C[0,1]$ 上的收

敛就是函数序列的一致收敛, 而一致收敛必然处处收敛, 于是

$$x(t)=\lim_{k\to\infty}x_{n_k}(t)=\lim_{k\to\infty}t^{n_k}=\begin{cases}1, & t=1\\ 0, & 0\leqslant t<1\end{cases}$$

这与 $x(t)$ 在 $t=1$ 处连续相矛盾.

因此, 引入下述列紧集概念:

定义 1.9 设 X 是距离空间.

(1) $A\subset X$, 若对 A 中的任何点列 $\{x_n\}$, 均存在子列 $\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}$, 使 $x_{n_k}\to x\in X$, 则称 A 为列紧集;

(2) 列紧闭集称为自列紧集;

(3) 若 X 本身是列紧集, 则称 X 为列紧空间.

定义 1.10 设 X 是距离空间, $A\subset X$, $B\subset X$, 若 $\forall\varepsilon>0$, A 被以 B 中各点为球心, ε 为半径的开球的全体所覆盖, 即 $A\subset\bigcup\limits_{x\in B}(S(x,\varepsilon))$, 则称 B 是 A 的一个 ε 网. 若 $\forall\varepsilon>0$, 总存在着 A 的有限的 ε 网 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, 则称 A 为全有界集.

至于列紧集的一些相关结果, 由于篇幅的限制, 仅给出以下结论, 有兴趣的读者可以参看文献 (龚怀云, 1985).

定理 1.5 设 X 是距离空间.

(1) X 中任何有限点集是列紧集;

(2) X 中列紧集的子集是列紧集, 因为任意多个列紧集的交是列紧集;

(3) X 中有限个列紧集的并是列紧集;

(4) $A\subset X$ 是列紧集当且仅当 $\bar{A}$ 是自列紧的;

(5) 若 X 是列紧空间, 则它是完备的, 因为自列紧集 A 作为子空间是完备的.

定理 1.6 (1) 距离空间中的列紧集必是全有界集;

(2) 在完备的距离空间中, A 是列紧集当且仅当 A 为全有界集.

推论 1.1 列紧集是有界集.

推论 1.2 列紧空间是可分的.

证明 设 X 是列紧的, 取 $\varepsilon_n=\dfrac{1}{n}$ $(n=1,2,\cdots)$, 构造 A 的有限 $\dfrac{1}{n}$ 网 $A_n=\left\{x_1^{(n)},x_2^{(n)},\cdots,x_{k_n}^{(n)}\right\}$, 令 $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$, 显然, A 是可数集且在 X 内处处稠密, 因此, X 是可分的. □

最后, 将给出紧集的定义.

定义 1.11 设 X 是距离空间, $A\subset X$, 若开集族 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 覆盖 A, 即 $A\subset\bigcup\limits_{\alpha\in I}G_\alpha$, 则在 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 中必存在有限个开集$G_1,G_2,\cdots,G_n$ 覆盖 A, 即 $A\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}G_i$,