普通高等教育"十一五"规划教材
21世纪大学数学精品教材

大学数学
概率论与数理统计

李正耀　周德强　主编

科学出版社
www.sciencep.com

普通高等教育“十一五”规划教材

21世纪大学数学精品教材

大学数学·概率论与数理统计

李正耀　周德强　主编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书介绍了概率论与数理统计的基本概念、基本理论和方法，并结合MATLAB数学软件解决一些简单的概率统计问题. 内容包括概率论的基本概念、随机变量与随机向量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律及中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析、数学软件与应用实例等. 每章均配有习题，书后附有习题答案，供学生练习及参考之用.

本书可作为工科、理科(非数学)类各专业本科生的教材和相关课程教师的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

大学数学：概率论与数理统计/李正耀，周德强主编. —北京：科学出版社，2009

普通高等教育“十一五”规划教材. 21世纪大学数学精品教材

ISBN 978-7-03-026110-6

Ⅰ. 大… Ⅱ. ①李…②周… Ⅲ. ①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ. O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第216221号

责任编辑：王雨舸 曾 莉 / 责任校对：董艳辉

责任印制：彭 超 / 封面设计：苏 波

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉中远印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009年12月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2009年12月第一次印刷 印张：15 1/2

印数：1—7 000 字数：300 000

定价：26.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

概率论与数理统计是高等学校的一门重要基础课程，也是应用性极强的一门学科. 教材改革是教学改革的重要内容之一. 我们参照教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制订的《工科数学基础课程教学基本要求》，并按照"十一五"国家级规划教材及教育部面向21世纪课程教材规划的要求，集多年教学之经验，编写了这本教材.

本书在选材和叙述上尽量联系工科专业的实际，注重概率统计思想的介绍，力图将概念写得清晰易懂，便于教学. 例题和习题的配置注重贴近实际，尽量做到具有启发性和应用性.

考虑到大学理论课程学时不断压缩的实际，全书以概率统计的基本概念和基本思想方法为核心，略去了一些较难和叙述较烦琐的证明，突出重点，简明扼要.

本教材课内教学需50～60学时，教师可根据需要酌情选用标注"*"的章节.

本书可作为普通高等学校非数学类专业概率论与数理统计课程的教材，也可供成人教育的广大师生和各类需要提高数学素质与能力的人员使用.

本书共10章，分三个部分. 前5章为概率论部分，作为基础知识；第6～9章主要讲述了抽样分布、参数估计和假设检验，并对方差分析和回归分析作了简要介绍；第10章为数学软件部分，介绍了 MATLAB. 软件及其在概率统计中的应用，可用于计算机辅助教学，读者可根据需要选用.

本书由李正耀、周德强任主编，冯建中、杨先山任副主编. 第1、6、10章由周德强编写，第2、3章由杨先山编写，第4、5章由冯建中编写，第7、8、9章由李正耀编写. 高明成、何先平副教授认真地审阅了此书，陈忠教授、谢朝荣副教授参与了提纲和编写方案的讨论，李克娥、艾莉萍、李向军、熊凯俊、张丽芳、曹静、曹小玲等参与了习题、习题答案及资料收集整理工作，并提出了许多宝贵意见. 在此一并深表感谢.

由于水平有限，不妥之处难免，恳请广大教师和学生提出宝贵意见.

编　者

2009年11月

目录

第1章 概率论的基本概念 …… 1
1.1 引言 …… 1
1.2 样本空间、随机事件 …… 2
1.2.1 样本空间 …… 2
1.2.2 随机事件 …… 3
1.2.3 事件间的关系与事件的运算 …… 4
1.3 频率与概率 …… 6
1.3.1 频率的定义和性质 …… 6
1.3.2 概率的定义及性质 …… 7
1.4 等可能概型(古典概型) …… 9
1.5 条件概率 …… 15
1.5.1 条件概率 …… 15
1.5.2 乘法定理 …… 17
1.5.3 全概率公式和贝叶斯公式 …… 17
1.6 独立性 …… 20
1.6.1 事件独立性的定义 …… 20
1.6.2 事件独立性的性质 …… 20
1.6.3 多个事件的独立性首先研究三个事件的独立性 …… 22
习题1 …… 25
第2章 随机变量及其分布 …… 28
2.1 随机变量 …… 28
2.2 离散型随机变量及其分布律 …… 29
2.2.1 离散型随机变量及其分布律的概念 …… 29
2.2.2 几种常见的离散型随机变量 …… 30
2.2.3 泊松定理 …… 33
2.3 随机变量的分布函数 …… 34
2.3.1 分布函数的定义 …… 34
2.3.2 分布函数的基本性质 …… 35
2.4 连续型随机变量及其概率密度 …… 37
2.4.1 连续型随机变量的概念 …… 37

2.4.2 几种重要的连续型随机变量 …… 40
2.5 随机变量的函数的分布 …… 45
2.5.1 离散型随机变量函数的分布 …… 45
2.5.2 连续型随机变量函数的分布 …… 46
习题 2 …… 49
第 3 章 多维随机变量及其分布 …… 53
3.1 二维随机变量 …… 53
3.1.1 二维随机变量的分布函数 …… 53
3.1.2 二维离散型随机变量 …… 55
3.1.3 二维连续型随机变量 …… 56
3.1.4 两个常见的二维连续型随机变量 …… 58
3.1.5 n 维随机变量 …… 59
3.2 边缘分布 …… 59
3.2.1 二维随机变量的边缘分布函数 …… 59
3.2.2 二维离散型随机变量的边缘分布律 …… 59
3.3 条件分布 …… 62
3.3.1 离散型随机变量的条件分布 …… 63
3.3.2 连续型随机变量的条件分布 …… 65
3.4 相互独立的随机变量 …… 67
3.4.1 两随机变量的独立性 …… 67
3.4.2 n 维随机变量独立的概念 …… 70
3.5 两个随机变量的函数的分布 …… 70
3.5.1 离散型随机变量的情形 …… 70
3.5.2 连续型随机变量的情形 …… 71
习题 3 …… 76
第 4 章 随机变量的数字特征 …… 80
4.1 数学期望 …… 80
4.1.1 随机变量数学期望的概念 …… 80
4.1.2 随机变量函数的数学期望 …… 85
4.1.3 数学期望的性质 …… 88
4.2 方差 …… 90
4.2.1 方差的定义 …… 90
4.2.2 方差的性质 …… 92
4.2.3 几种重要分布的方差和切比雪夫不等式 …… 93
4.3 协方差及相关系数 …… 97

4.3.1　协方差及相关系数的定义与性质 …… 97
4.3.2　随机变量的相互独立与不相关的关系 …… 100
4.4　矩、协方差矩阵 …… 102
4.4.1　矩、协方差矩阵的定义 …… 102
4.4.2　协方差矩阵的应用——n 维正态分布的概率密度表示 …… 103
习题 4 …… 104
第 5 章　大数定律及中心极限定理 …… 108
5.1　大数定律 …… 108
5.2　中心极限定理 …… 110
习题 5 …… 115
第 6 章　样本及抽样分布 …… 117
6.1　随机样本和统计量 …… 118
6.1.1　随机样本 …… 118
6.1.2　统计量及其抽样分布 …… 120
6.2　正态总体相关的常用统计量 …… 123
习题 6 …… 131
第 7 章　参数估计 …… 133
7.1　点估计 …… 133
7.1.1　点估计量的概念 …… 133
7.1.2　矩估计法 …… 134
7.1.3　最(极)大似然估计法 …… 136
7.2　估计量的评价标准 …… 141
7.2.1　无偏性 …… 141
7.2.2　有效性 …… 143
7.2.3　一致性(相合性) …… 144
7.3　区间估计 …… 144
7.4　正态总体均值与方差的区间估计 …… 145
7.4.1　单个总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的情况 …… 145
7.4.2　两个总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的情况 …… 149
7.5　单侧置信区间 …… 151
习题 7 …… 153
第 8 章　假设检验 …… 158
8.1　假设检验的基本思想与概念 …… 158
8.1.1　假设检验问题 …… 158
8.1.2　假设检验的基本步骤 …… 159

8.1.3 参数假设检验的几种常见形式 …… 160
8.1.4 假设检验中的假设选取问题 …… 162
8.2 正态总体的参数检验 …… 163
8.2.1 单个正态总体均值 μ 的假设检验 …… 163
8.2.2 单个正态总体方差 σ^2 的假设检验 …… 165
8.2.3 两个正态总体均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的检验 …… 166
8.2.4 两个总体方差比 σ_1^2/σ_2^2 的假设检验 …… 169
*8.2.5 置信区间与假设检验之间的关系 …… 171
8.3 假设检验的 p 值检验法 …… 171
习题 8 …… 174
第 9 章 方差分析与回归分析 …… 176
9.1 单因素方差分析 …… 176
9.1.1 问题的提出 …… 176
9.1.2 单因素方差分析的统计模型 …… 177
9.1.3 平方和分解 …… 178
9.1.4 自由度的概念及自由度分解 …… 179
9.1.5 检验方法 …… 180
9.1.6 参数估计 …… 182
9.2 一元线性回归 …… 183
9.2.1 变量间的两类关系 …… 183
9.2.2 一元线性回归模型 …… 183
9.2.3 回归系数的最小二乘估计 …… 184
9.2.4 线性假设的显著性检验 …… 186
9.2.5 用回归模型作预测 …… 188
习题 9 …… 189
***第 10 章 数学软件与应用实例** …… 191
10.1 MATLAB 的基本操作 …… 191
10.1.1 MATLAB 简介 …… 191
10.1.2 变量和数据操作 …… 194
10.1.3 MATLAB 矩阵 …… 196
10.1.4 MATLAB 运算 …… 197
10.1.5 MATLAB 符号运算 …… 200
10.1.6 基本绘图函数 …… 202
10.2 概率统计问题的 MATLAB 求解 …… 206
10.2.1 常见概率分布的函数 …… 206

10.2.2　参数估计 …… 208
10.2.3　假设检验 …… 208
10.3　概率模型与MATLAB求解 …… 210
10.3.1　概率与频率 …… 210
10.3.2　中心极限定理的演示 …… 212
10.3.3　报童的利润概率模型及求解 …… 214
习题10 …… 216
参考文献 …… 218
附录　常用概率统计表 …… 219
附表1　标准正态分布表 …… 219
附表2　t分布表 …… 221
附表3　χ^2分布表 …… 223
附表4　F分布表 …… 225
习题答案 …… 233

第1章 概率论的基本概念

1.1 引 言

在自然界和人类社会生活当中，经常会接触到两类现象，先从实例来分析这两类现象.

例 1.1.1 水在标准大气压下加热到100℃会沸腾.

例 1.1.2 函数在间断点处不存在导数.

例 1.1.3 同性电荷必然互斥.

例 1.1.4 在一个标准大气压下20℃的水会结冰.

例1.1.1、例1.1.2、例1.1.3说明的是在一定条件下必然发生的现象，而例1.1.4表述的是一定条件下不可能发生的现象，这些现象都具有确定性.

我们把在一定条件下必然发生或必然不发生的现象，称为**确定性现象**或**必然现象**. 这类现象的特征是：条件完全决定结果.

与此同时，在自然界和人类社会生活当中，人们还发现发生不同结果的另一类现象.

例 1.1.5 在相同条件下掷一枚均匀的硬币，落地后可能正面(指币值面)朝上，也可能反面朝上.

例 1.1.6 用同一门炮向同一目标发射同一种炮弹多发，弹着点会各不相同.

例 1.1.7 过马路交叉口时，可能遇上各种颜色的交通指挥灯.

例 1.1.8 在合格率为99%的产品中任取一件产品，可能抽到正品，也可能抽到次品.

例1.1.5、例1.1.6、例1.1.7、例1.1.8描述的现象具有的共性是：发生的结果预先可以知道但事前又不能完全确定. 我们把在一定条件下可能发生也可能不发生的现象称为**随机现象**. 这类现象的特征是：条件不能完全决定结果. 人们经过长期实践并深入研究后发现，随机现象在个别试验中其结果呈现出不确定性，但在大量重复试验中其结果又呈现出固有的规律性，这就是我们以后所说的**统计规律性**.

概率论与数理统计是研究和揭示随机现象统计规律性的一门学科，是一个重要的数学分支. 概率论与数理统计在金融工程、经济规划和管理、产品质量控制、经营管理、医药卫生、交通工程、人文科学和社会科学等领域有着广泛应用. 概率论与

数理统计的思想和方法在科学和工程技术的众多领域中取得了令人瞩目的成就，对某些新学科的产生和发展起了重要的作用，现已出现了随机信号处理、生物统计、统计物理等边缘学科. 同时，概率论与数理统计也是信息论、人工智能、模式识别、控制论、可靠性理论、风险分析与决策等学科的基础.

我们是通过研究随机试验来研究随机现象的. 这里试验的含义十分广泛，它包括各种各样的科学实验，也包括对事物的某一特征的观察. 下面举一些试验的例子.

E_1：抛一枚硬币两次，观察正面 H 、反面 T 出现的情况.

E_2：掷一颗骰子，观察出现的点数.

E_3：观察某一时间段通过某一路口的车辆数.

E_4：观察某一电子元件(如灯泡)的寿命.

E_5：观察某城市居民(单位：户)烟、酒年支出.

上述试验具有以下特点：

(1) 可以在相同的条件下重复进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

(3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

我们把满足上述三个条件的试验称为**随机试验**，记为 E. 本书中以后提到的试验都是指随机试验.

1.2 样本空间、随机事件

1.2.1 样本空间

对于随机试验，尽管在进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现，但试验的所有可能结果组成的集合是已知的. 我们将随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的**样本空间**，记为 S. 样本空间的元素，即 E 的每个结果，称为**样本点**(也叫**基本事件**).

下面写出 1.1 节中试验 $E_k(k=1, 2, \cdots, 5)$ 的样本空间 S_k.

E_1：$S_1=\{HH, HT, TH, TT\}$.

E_2：$S_2=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

E_3：$S_3=\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$.

E_4：$S_4=\{t \mid t\geqslant 0\}$. (样本点是一非负数，由于不能确知寿命的上界，所以可以认为任一非负实数都是一个可能结果.)

E_5：$S_5=\{(x, y) \mid M_0\leqslant x,y\leqslant M_1\}$. (烟、酒的年支出，结果可以用 (x, y)

表示，x，y分别是烟、酒年支出的元数. 这时，样本空间由坐标平面第一象限内一定区域内一切点构成. 也可以按某种标准把支出分为高、中、低三档. 这时，样本点有(高，高)，(高，中)，…，(低，低)9 种，样本空间就由这 9 个样本点构成.)

试验 E_5 说明，样本空间的元素是由**试验的目的**所确定的，试验的目的不一样，其样本空间也不一样. 样本空间可分为两种类型：

(1) 有限样本空间　样本空间中的样本点数是有限的，如 S_1，S_2，S_5；

(2) 无限样本空间　样本空间中的样本点数是无限的，如 S_3，S_4.

1.2.2　随机事件

在实际进行的随机试验中，人们常常关心满足某种条件的那些样本点组成的集合. 例如，若规定某种灯泡的寿命(单位：h)小于 500 为次品，则 E_4 中我们关心灯泡的寿命是否有 $t \geqslant 500$. 满足这一条件的样本点组成 S_4 的一个子集：$A=\{t \mid t \geqslant 500\}$. 我们称 A 为试验 E_4 的一个随机事件. 显然，当且仅当子集 A 中的一个样本点出现时，有 $t \geqslant 500$，即随机事件 A 发生.

一般地，我们称试验 E 的样本空间 S 的**子集**为 E 的**随机事件**，简称**事件**，记为 $A,B,C,\cdots$. 由此可见，随机事件是由一个或多个样本点组成的. 在每次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，称这一事件发生.

随机事件可以分为以下几种类型：

(1) **基本事件**　只含一个样本点的随机事件称为基本事件. 例如，试验 E_2 中，"出现 1 点"，"出现 2 点"，…，"出现 6 点"都是基本事件.

(2) **复合事件**　由两个或两个以上的样本点组成的事件称为复合事件. 例如，试验 E_2 中，"点数小于 5"和"点数为偶数"都是复合事件.

(3) **必然事件**　样本空间 S 是由全体样本点组成的事件，它作为样本空间自身的子集，在每次试验中必然发生的，称为必然事件. 例如，试验 E_2 中"点数小于 7"就是必然事件.

(4) **不可能事件**　$\varnothing$不包含任何样本点，它作为样本空间的子集，在每次试验中是决不会发生的，称为不可能事件.

例 1.2.1　在掷骰子试验中，观察掷出的点数.

(1) "掷出点数小于 7"是必然事件；

(2) "掷出点数 8"则是不可能事件；

(3) 事件 $A_i=\{$掷出 i 点，$i=1,2,3,4,5,6\}$是基本事件；

(4) 事件 $B=\{$掷出奇数点$\}$；

(5) 事件 $C=\{2,4,6\}$表示"出现偶数点"，事件 $D=\{1,2,3,4\}$表示"出现

的点数不超过4”,均是复合事件.

上述事件显然都是样本空间的**子集**.我们可借助**集合**研究事件的关系.

1.2.3 事件间的关系与事件的运算

事件是一个集合,我们自然可以用集合论中有关集合的关系和运算来刻画事件间的关系和运算.

设试验 E 的样本空间为 S,而 $A, B, A_k (k=1, 2, \cdots)$ 是 S 的子集.

1. 事件的包含与相等

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称事件 B 包含事件 A 或称事件 A 包含于事件 B,记为 $B \supset A$ 或 $A \subset B$.

若 $A \subset B$ 且同时 $B \subset A$,则称事件 A 与事件 B 相等(等价),记为 $A = B$.

2. 事件的和(并)

事件 $A \cup B = \{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的和事件(或并事件).当且仅当事件 A 与事件 B 至少一个发生时,事件 $A \cup B$ 发生.

推广 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 称为事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和事件;更一般地,可列个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的和事件,记为 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

3. 事件的积(交)

事件 $A \cap B = AB = \{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的积事件(或交事件).当且仅当事件 A 与事件 B 同时发生时,事件 $A \cap B$ 发生.

推广 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ 称为事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积事件;更一般地,可列个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的积事件,记为 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.

思考题 1 考察下列事件间有何包含关系:$AB, A, B, A \cup B$.

4. 两事件的差事件

事件 $A - B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \notin B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的差事件.当且仅当事件 A 发生,事件 B 不发生时,事件 $A - B$ 发生.

思考题 2 $A - B = A - AB = A\bar{B}$ 成立吗?

5. 互不相容事件(或互斥事件)

若 $A \cap B = \varnothing$(即 A, B 两事件不可能同时发生),则称事件 A, B 为互不相容(或互斥)事件.

由互不相容的定义可知,基本事件是两两互不相容的.

6. 互逆事件(互相对立事件)

若 $A\cap B=\varnothing$ 且 $A\cup B=S$，则称事件 A 与 B 互为**逆事件**或互为**对立事件**. A 的对立事件记为 $\overline{A}=S-A$，称 $\overline{A}$ 为 A 的逆事件或 A 的对立事件，显然 A 又是 $\overline{A}$ 的对立事件，即

$$A \text{ 与 } \overline{A} \text{ 互为对立事件} \Leftrightarrow A\cap\overline{A}=\varnothing,\ A\cup\overline{A}=S$$

此外，$\overline{\overline{A}}=A$.

思考题 3　互不相容与互为对立事件有何区别?

事件间的关系与事件的运算可用图 1.1 表示，这种图叫维恩图. 其中长方形表示样本空间 S，圆 A 与圆 B 表示事件 A 与事件 B.

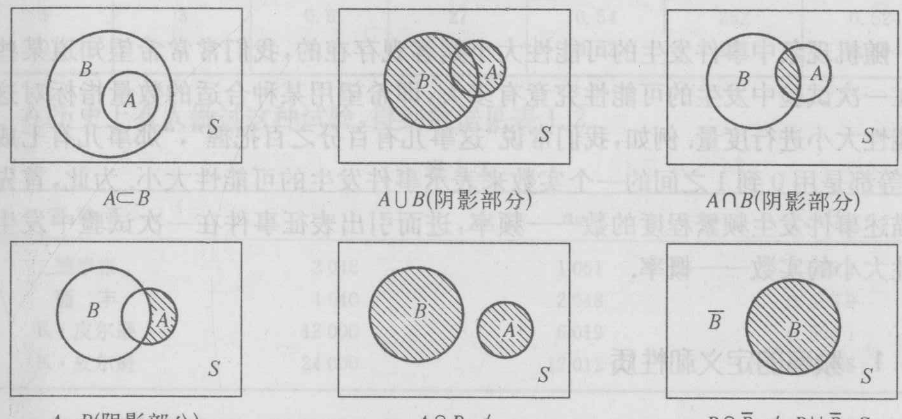

图 1.1

事件的运算满足下述规则:

(1) 交换律　$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$.

(2) 结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

(3) 分配律　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

(4) 德摩根律(对偶律)　$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A}_i$，$\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A}_i$.

对于一个具体事件，要学会用数学符号表示；反之，对于用数学符号表示的事件，要清楚其具体含义是什么，也就是说，要正确无误地“互译”出来，方法可以有多种.

例 1.2.2　从一批产品中任取两件，观察合格品的情况. 记 $A=\{$两件产品都是合格品$\}$，$B_i=\{$取出的第 i 件产品是合格品，$i=1,2\}$，则 $\overline{A}=\{$两件产品中至少有一件是不合格品$\}$，用 B_i，$i=1,2$ 表示 A 和 $\overline{A}$ 分别为 $A=B_1B_2$，$\overline{A}=$

$\overline{B_1B_2}=\bar{B}_1\cup\bar{B}_2$.

例 1.2.3 在 S_4 中记事件 $A=\{t\mid t<1000\}$ 表示"产品是次品"，事件 $B=\{t\mid t\geqslant 1000\}$ 表示"产品是合格品"，事件 $C=\{t\mid t\geqslant 1500\}$ 表示"产品是一级品"，则 A 与 B 互为对立事件，A 与 C 是互不相容事件，$B-C$ 表示"产品是合格品但不是一级品"，BC 表示"产品是一级品"，$B\cup C$ 表示"产品是合格品".

1.3 频率与概率

随机现象中事件发生的可能性大小是客观存在的，我们常常希望知道某些事件在一次试验中发生的可能性究竟有多大，即希望用某种合适的数量指标对这种可能性大小进行度量. 例如，我们常说"这事儿有百分之百把握"，"那事儿有七成把握"等都是用 0 到 1 之间的一个实数来表示事件发生的可能性大小. 为此，首先引入描述事件发生频繁程度的数——频率，进而引出表征事件在一次试验中发生可能性大小的实数——概率.

1.3.1 频率的定义和性质

定义 1.3.1 在相同的条件下，进行了 n 次试验，在这 n 次试验中，事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的**频数**，比值 n_A/n 称为事件 A 发生的**频率**，并记为 $f_n(A)$.

根据定义，可知频率具有下述基本性质：

(1) $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$;

(2) $f_n(S)=1$;

(3) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是两两互不相容的事件，则

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k)$$

由频率的定义知道，其大小表示事件在 n 次试验中发生的频繁程度. 频率大，事件 A 发生就频繁，这意味着事件 A 在一次试验中发生可能性就大；反之亦然. 因此，频率在一定程度上反映了事件发生的**可能性**大小，但能否直接用频率表示事件在一次试验中发生的可能性大小？先看下面的例子.

例 1.3.1 考虑抛硬币，观察正面 H 出现次数的试验，我们将一枚硬币抛掷 5 次、50 次、500 次，各做 10 遍，得到数据见表 1.1，其中 n 表示试验次数，n_H 表示 H 发生的频数，$f_n(H)$ 表示 H 发生的频率.

表 1.1

实验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

在历史上有人做过这种试验，得到数据见表 1.2.

表 1.2

实 验 者	n	n_H	$f_n(H)$
德摩根	2 048	1 061	0.518 1
蒲 丰	4 040	2 048	0.506 9
K·皮尔逊	12 000	6 019	0.506 1
K·皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

上述统计数据表明：抛硬币次数 n 较小时，频率 $f_n(H)$ 在 0 与 1 之间随机波动，其幅度较大，但随 n 增大，频率 $f_n(H)$ 呈现出稳定性，稳定于 0.5.

大量试验证实，当重复试验次数逐渐增大时，随机事件 A 发生的频率呈现出**稳定性**，即当试验次数 n 很大时，频率 $f_n(A)$ 在一个稳定的值 $p\ (0<p<1)$ 附近摆动. 尽管每进行一连串（n 次）试验，所得到的频率可以各不相同，但只要 n 相当大，频率与某个稳定的值是会非常接近的，这个性质称为"频率的稳定性"，即统计规律性. 因此，如果让试验重复大量次数，计算出频率 $f_n(A)$，用它来表征事件 A 发生的可能性大小是合适的.

但是，在实际中，我们不可能对每一事件都做大量的试验，因此，直接用频率表征事件发生可能性的大小是不现实的. 同时，为了理论研究的需要，结合频率的稳定性和自身的性质，我们受到启发，用以下给出的概率来表征事件发生可能性大小.

1.3.2　概率的定义及性质

定义 1.3.2　设 E 是随机试验，S 是它的样本空间，对于 E 的每一个事件 A 赋

予一个实数，记为 $P(A)$，称为事件 A 的**概率**，如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件：

(1) **非负性** 对于每一个事件 A，有 $P(A) \geqslant 0$；

(2) **规范性** 对于必然事件 S，有 $P(S)=1$；

(3) **可列可加性** 设 $A_1, A_2, \cdots$ 是两两互不相容的事件，即对于 $A_iA_j=\varnothing$，$i \neq j$；$i, j=1, 2, \cdots$，有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots \tag{1.3.1}$$

由概率的定义知，事件的概率值可以看成以事件为自变量的一个函数值，它们在[0, 1]之中. 由此，我们可以推导出概率的若干性质.

性质 1.3.1 $P(\varnothing)=0$.

证 由 P 的可列可加性及规范性，有

$$\begin{aligned} 1=P(S)&=P(S+\varnothing+\varnothing+\cdots)=P(S)+P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots \\ &=1+P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots \end{aligned}$$

故 $P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots=0$，注意到 $P(\varnothing) \geqslant 0$，这样只有 $P(\varnothing)=0$.

性质 1.3.2(有限可加性) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两互不相容的事件，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n) \tag{1.3.2}$$

证 令 $A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\varnothing$，则有 $A_iA_j=\varnothing$，$i \neq j$；$i, j=1, 2, \cdots$. 由可列可加性得

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)&=P\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big)=\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) \\ &=\sum_{k=1}^{n} P(A_k)+0=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n) \end{aligned}$$

性质 1.3.3(单调性) 如果 $A \subset B$，则有

$$P(B-A)=P(B)-P(A) \tag{1.3.3}$$

$$P(B) \geqslant P(A) \tag{1.3.4}$$

证 由 $A \subset B$ 知，$B=A \cup (B-A)$，且 $A \cap (B-A)=\varnothing$，由概率的可加性有 $P(B)=P(A)+P(B-A)$，从而 $P(B-A)=P(B)-P(A)$，又由非负性有 $P(B-A) \geqslant 0$，知 $P(B) \geqslant P(A)$.

思考题 证明 $P(B-A)=P(B)-P(AB)$.

性质 1.3.4 对任一事件 A，$P(A) \leqslant 1$.

证 因为 $A \subset S$，由性质 1.3.3 知，$P(A) \leqslant P(S)=1$.

性质 1.3.5(逆事件的概率) 对任一事件 A 有 $P(\bar{A})=1-P(A)$.

证 因为 $A \cup \bar{A}=S$，且 $A\bar{A}=\varnothing$，$1=P(S)=P(A \cup \bar{A})=P(A)+P(\bar{A})$，从而得证.

性质 1.3.5 在概率的计算上很有用，如果正面计算事件 A 的概率不容易，而计算其对立事件的概率较易时，可以先计算对立事件的概率，再计算 $P(A)$.