

联考奇迹百分百

MBA/MPA/MPAcc

数学

辅导教程

2011

范培华 尤承业 王培德 编著

清华大学出版社

联考奇迹百分百

MBA/MPA/MPAcc

内容摘要

数学

辅导教程

2011

范培华 尤承业 王培德 编著

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书按照最新考试大纲和考试动态,由资深 MBA 考前辅导名师编写而成.对重要的概念和 MBA 考试的热点进行充分的展开、挖掘、补充,与新大纲无关的内容一律删去.

本书将复习的起点放低,书中内容足够备考的需要,配备了最基本的例题和习题,也配备了一些略高于 MBA 考试的题目以及较灵活的解法,适合各层次学员使用.习题后附有参考答案,部分典型的例题与习题还给出多种解法,既强调各个知识点的纵向衔接,又强调它们之间的横向联系.书后附 2008—2010 年 MBA 联考数学真题及解析.

版权所有,侵权必究.侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

数学辅导教程.2011/范培华,尤承业,王培德编著. --北京:清华大学出版社,2010.7
(MBA/MPA/MPAcc 联考奇迹百分百)

ISBN 978-7-302-23107-3

I. 数… II. ①范… ②尤… ③王… III. 高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料
IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 113966 号

责任编辑:冯 昕

责任校对:王淑云

责任印制:李红英

出版发行:清华大学出版社

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座

<http://www.tup.com.cn>

邮 编:100084

社 总 机:010-62770175

邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c_service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 刷 者:北京四季青印刷厂

装 订 者:三河市兴旺装订有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:185×260 印 张:22 字 数:531 千字

版 次:2010 年 7 月第 1 版 印 次:2010 年 7 月第 1 次印刷

定 价:35.00 元

产品编号:037717-01

MBA/MPA/MPAcc 联考奇迹百分百

——数学辅导教程 2011

丛书序言

本套丛书自 2007 年首次出版以来,得到了广大备考学员的认同,称其“确实是一部实用的、高效的备考宝典。”根据最新的联考大纲和 2010 年 1 月的考试动向,清华大学出版社组织著名的 MBA、MPA、MPAcc 考前辅导专家,对本套丛书重新进行了编写和优化,力求更精确瞄准联考方向,把握联考动态。

本套丛书包括《逻辑辅导教程》、《数学辅导教程》和《英语辅导教程》三本教材,有以下几点。

1. 专家名师领衔,突出实用性

MBA、MPA、MPAcc 考生大多数工作繁忙,时间对他们来说尤为宝贵,清华大学出版社在严谨调研的基础上,以北大、清华 MBA、MPA、MPAcc 考前辅导以及备考清华、北大、复旦、上海交大等名校的备考考生为对象,跟踪调研备考历程、联考成绩、老师结课评分等综合信息,精心组织一线著名辅导专家鼎力编写。这些专家多年来活跃在考前辅导的讲台上,积累了大量宝贵的经验和技巧,一直以来备受考生的推崇。本套丛书的编写力求以考生为中心,“考的一定讲透,不考的坚决不讲”,突出准确、详尽、简洁、重点、实用的原则。

2. 紧跟考试动态,体现全新性

2005 年,联考大纲有重大调整。2007 年,大纲数学部分又有重大调整;2009 年,数学考试套路再一次变化。2010 年大纲英语部分又进行了较大调整,更加强调语言能力,即阅读理解能力和写作能力。考试的思路和难点在不断地调整和变化。因此,紧跟形势变化,把握联考方向成为丛书编写的重要原则。本套丛书在编写中特别强调了以下原则:

- (1) 紧贴考试大纲,摸清出题者思路,具有指引性、前瞻性、完全性。
- (2) 难度略高于大纲,所有类型题全面涵盖,重点突出,层次分明。
- (3) 强调基础,要求基础分一定要拿到;强化技巧,体现在考场上就是短时间内做出高质量答案。
- (4) 无保留,一线专家多年提炼的备考复习精髓在此毫无保留地奉献给考生。
- (5) 强调“母题”作用,突出“学一通百”,灵活运用,活学活用。

3. 名家名师智慧奉献,强调高效性

本套丛书编者均为一线专家,历届北大、清华联考状元大都是他们的学生,经他们辅导的学

生 80% 都能顺利进入北大、清华、复旦、上海交大等名校。在备考复习中, 这些名师向来不强调题海战术, 而是强调用最短的时间, 培养出最具竞争力的得分高手。因此, 无论在教学上还是在教材编写上, 都强调类型化、层次化、典型化, “母题型” 在模拟考试精讲中尤能体现。模拟考试与历年联考真题重合度超过 40%。

综合以上特点, 本套丛书不仅是备考名校 MBA 的“高分用书”, 更适用于所有 MBA、MPA、MPAcc 备考考生, 其辅导详尽, 示例简洁的特点, 注定了它将成为备考考生短期见效的极好帮手。

衷心希望这套丛书能够助各位考生一臂之力, 在 2011 年的考试中梦想成真!

清华大学出版社
2010 年 6 月

MBA/MPA/MPAcc 联考奇迹百分百

——数学辅导教程 2011

前言

工商管理硕士(Master of Business Administration,简称 MBA)教育于 20 世纪初起源于美国.1990 年,国务院学位委员会正式批准在我国设立 MBA 学位和试办 MBA 教育.1991 年 MBA 正式开始招生,自 1997 年起 MBA 招生入学考试初试开始实行统一命题、统一阅卷的全国联考制度.经国务院学位委员会办公室批准的 MBA 培养院校有 182 所,至今全国累计招收 MBA 与 EMBA 学生 20 多万人. MBA 教育已经成为我国培养适应 21 世纪发展需要的高层次管理人才的重要渠道,在我国的经济发展和改革开放当中正在发挥越来越大的作用.

公共管理硕士(Master of Public Administration)简称“MPA”.美国的第一个 MPA 项目创立于 1924 年.我国的 MPA 教育始于 2001 年,目前有 100 多所学校招收 MPA 学生.

专业会计硕士(Master of Professional Accounting)简称“MPAcc”.美国的第一个 MPAcc 教育始于 1948 年.我国的 MPAcc 教育始于 2004 年,目前有 25 所学校招收 MPAcc 学生.

2009 年,国家教育主管部门决定,将 MBA 入学联考的模式推广到 MPA 教育和 MPAcc 教育.从 2010 年起, MBA、MPA、MPAcc 入学考试使用同样的综合能力考试试卷和英语考试试卷.

MBA 招生入学考试中的“数学考试”属于“综合能力考试”的一部分,综合能力考试时间 3 小时,满分 200 分,其中数学占 75 分.均是五选一的单向选择题.

编者在北大和清华 MBA 考前辅导班多年执教,积累了许多有效的经验,应广大考生自学的需要,编写了这本 MBA、MPA、MPAcc 联考教程.在 2010 年 1 月 MBA、MPA、MPAcc 考试后,根据最新的数学考试大纲和最新的考试动态,我们对这本教程进行了修订,力求更精准地瞄准联考方向,把握联考动态.

本书力求充分体现最新的 MBA、MPA、MPAcc 招生入学考试数学考试大纲的要求,内容紧扣最新的数学考试大纲,与新大纲无关的内容一律删去,与联考紧密相关的内容尽量做到“准确、全面、简洁、实用”.真正做到以考生为中心,“考的内容一定讲透,不考的内容坚决不讲”.编写过程中特别注意了以下几点:

1. 避免使概念的复习成为考试大纲的“名词解释”,也避免使其成为一般教材的浓缩,而是根据考试大纲的要求以及历年考试的情况,对概念进行筛选、梳理.突出基本的、重要的,摒弃无用的.对重要的概念(如实数绝对值、二次函数)和 MBA 考试的热点(如应用题以及方程、不等式的讨论)进一步展开、挖掘、补充,交代得更为透彻.

2. 将夯实基础作为复习的基点. 对基础较差的学员, 将复习的起点放低 (MBA、MPA、MPAcc 数学考试所需要的基础知识和准备知识在本书中都有较详尽的阐述, 即本书的内容足够备考的需要), 书中为其配备了最基本的例题与习题; 同时书中也配备了较难一些 (略高于 MBA、MPA、MPAcc 试题) 的例题与习题以及较灵活的解法, 供基础较好的学员使用.

3. 鉴于 MBA、MPA、MPAcc 教育培养的目标是 21 世纪要求的务实型管理人才, 需要选拔那些基本素质好、具有综合能力和管理潜质的复合型人才. 本书力求突出综合能力考试倾向于能力测试的要求, 在内容上, 特别是例题的筛选以及例题与习题的解法上努力体现以能力立意作为命题指导思想这个原则.

4. 本书配备了数量较多的例题与习题. 例题中除了个别题目为传统题型外, 绝大多数都是 MBA、MPA、MPAcc 考试题型 (即问题求解和条件充分性判断); 每章后的习题则全部是 MBA、MPA、MPAcc 考试题型, 习题后附有参考答案. 部分典型的例题与习题还给出多种解法, 以拓展学员解题时的思维空间, 有利于考试时解法的优选.

5. 本书编写过程中, 既强调了各个知识点的纵向衔接, 又强调了考试大纲内各个知识点的横向联系, 以适应 MBA、MPA、MPAcc 数学考试对综合能力的要求. 本书作为复习资料, 不是供学员初学使用的, 因此不受各个概念最初出现先后顺序的约束, 而是把问题分析透彻, 培养学员运用数学方法分析和解决问题的能力作为着力点.

6. 本书突破了以往“类型+方法”式的将数学知识和数学方法模式化的复习路线, 采取了“明确方向+分析思路”式突出数学思维能力的复习路线. 培养学员在将实际问题转化为数学模型的能力和解决问题时, 做到方向明、思路宽、切入准、直奔主题, 以适应 MBA、MPA、MPAcc 数学考试的要求.

本书力求将针对性、权威性、实用性和高效性融为一体, 成为学员迈入 MBA、MPA、MPAcc 门槛的金钥匙. 但由于水平所限, 不到之处在所难免, 恳请读者提出宝贵意见.

最后, 衷心地希望广大读者通过学习此书, 能够在联考中取得数学高分. 祝大家考试成功!

编者

2010 年 6 月

MBA/MPA/MPAcc 联考奇迹百分百

——数学辅导教程 2011

目 录

预备知识 MBA 联考题型	1
第 1 章 实数的概念、性质和运算	4
1.1 实数及其运算	4
1.1.1 实数	4
1.1.2 实数的性质	7
1.1.3 实数的运算	7
1.2 实数的绝对值	11
1.2.1 实数的绝对值	11
1.2.2 实数的绝对值的几何意义	11
1.2.3 实数绝对值的性质	11
1.2.4 非负数	12
1.3 比和比例	16
1.3.1 比	16
1.3.2 比例	16
1.3.3 正比例和反比例	17
1.4 平均值	22
1.4.1 算术平均值	22
1.4.2 几何平均值	22
习题 1	26
参考答案	38
第 2 章 整式和分式	53
2.1 整式	53
2.1.1 式的分类	53
2.1.2 整式定义	53
2.1.3 整式的运算	53
2.1.4 多项式的因式分解	55

2.2	二次三项式	61
2.2.1	二次三项式的定义	61
2.2.2	二次函数	61
2.3	分式	69
2.3.1	分式定义	69
2.3.2	分式的基本性质	69
2.3.3	分式的运算	69
2.4	根式 指数式 对数式 (附录)	77
2.4.1	根式(无理式)	77
2.4.2	指数式与对数式	78
2.4.3	指数函数与对数函数	78
习题 2		81
参考答案		90
第 3 章	方程和不等式	105
3.1	方程和不等式的概念	105
3.1.1	方程和不等式的定义	105
3.1.2	不等式的性质	106
3.2	一次方程(组)和一元一次不等式(组)	106
3.2.1	一元一次方程	106
3.2.2	一元一次不等式(组)	107
3.2.3	二元一次方程组	108
3.3	一元二次方程	114
3.3.1	一元二次方程的定义	114
3.3.2	一元二次方程的求根公式	114
3.3.3	一元二次方程根与系数的关系——韦达定理	115
3.3.4	一元二次方程的解法	115
3.4	一元二次不等式	120
3.4.1	一元二次不等式的定义	120
3.4.2	一元二次不等式的解	120
3.5	二元二次方程组	125
3.6	含绝对值的方程和不等式	126
3.7	方程讨论	128
3.7.1	实根的讨论	128
3.7.2	有理根的讨论	129
3.7.3	整数根的讨论	129
3.7.4	根的符号讨论	129
3.7.5	根的范围讨论	130
3.7.6	两个方程公共根的讨论	130

习题 3	136
参考答案	146
第 4 章 数列	165
4.1 数列的基本概念	165
4.1.1 数列的定义	165
4.1.2 数列的通项公式	165
4.1.3 数列的前 n 项和	166
4.1.4 数列的分类	166
4.2 等差数列	167
4.2.1 等差数列的定义	167
4.2.2 等差中项	168
4.2.3 等差数列的通项公式	168
4.2.4 等差数列的前 n 项和公式	168
4.2.5 等差数列判别方法	168
4.2.6 等差数列性质	169
4.3 等比数列	175
4.3.1 等比数列的定义	175
4.3.2 等比中项	175
4.3.3 等比数列的通项公式	176
4.3.4 等比数列的前 n 项和公式	176
4.3.5 等比数列的判别方法	176
4.3.6 等比数列的性质	176
4.4 数列求和法	184
4.4.1 倒置相加法	184
4.4.2 裂项法	184
习题 4	188
参考答案	199
第 5 章 排列组合与概率初步	219
5.1 排列组合	219
5.1.1 计数原理	219
5.1.2 排列	220
5.1.3 组合	221
5.1.4 排列与组合	223
5.2 概率初步	224
5.2.1 随机事件	224
5.2.2 事件的关系和运算	225
5.2.3 事件的运算法则	226

5.2.4 事件的概率	230
5.2.5 等可能事件的概率	230
5.2.6 独立重复实验	231
习题 5	241
参考答案	251
第 6 章 平面几何与解析几何	264
6.1 平面几何	264
6.1.1 平行直线	264
6.1.2 三角形	265
6.1.3 四边形	266
6.1.4 圆	267
6.2 平面解析几何	273
6.2.1 直角坐标系	273
6.2.2 直线	274
6.2.3 圆的方程	276
6.3 常见立体图形	282
6.3.1 长方体	282
6.3.2 圆柱体	282
6.3.3 圆锥体	282
6.3.4 球	282
习题 6	287
参考答案	303
2008 年 1 月 MBA 联考数学真题及解析	316
2009 年 1 月 MBA 联考数学真题及解析	325
2010 年 1 月 MBA 联考数学真题及解析	333

预备知识 MBA 联考题型

1. 问题求解

MBA 数学联考题型中的“问题求解”，即通常的“选择填空题”。这种题型要求从五个选择支(A),(B),(C),(D),(E)中确定符合题干要求的一个选择支，MBA 联考中的“问题求解”属于单项选择填空题。

这种题型的解法有直接解法和间接解法两种逻辑上的解题方法，直接解法就是从题干出发，一步步导出结论，从而来确定符合题干条件的选择支，间接解法指的是排除法等其他非直接解法的逻辑方法。

例 0.1 一列火车通过一座长为 60 m 的桥，测得火车头进入桥到火车尾离开桥需要 20 s，又知道这列火车通过一根电线杆需要 5 s，则火车长度为()。

- (A) 15 m (B) 20 m (C) 25 m (D) 30 m (E) 35 m

答案 (B)。

解 设火车长度为 x m，火车速度为 y m/s，由条件可知，火车在 20 s 之内所走的距离等于桥长加上火车车身长，5 s 所走的距离等于火车车身长，于是有

$$\begin{cases} 20y = 60 + x, \\ 5y = x, \end{cases}$$

解得 $x=20, y=4$ ，即火车车身长度为 20 m，故选(B)。

上例就是从题干出发，逐步导出结论，属于直接解法。

例 0.2 使 $\frac{x-1}{x} \geq 2$ 成立的 x 的取值范围是()。

- (A) $-1 \leq x < 0$ (B) $x \geq -1$ (C) $x \leq -1$
(D) $x \leq -1$ 或 $x > 0$ (E) $-1 \leq x \leq 0$

答案 (A)。

解 当 $x=0$ 时，不等式左边无意义，可排除(E)；代入 $x=2$ ，不等式变为 $\frac{1}{2} \geq 2$ ，不成立，即 2 不是不等式的解，可排除包含 $x=2$ 的解(B),(D)；代入 $x=-2$ ，不等式变为 $\frac{-3}{-2} \geq 2$ ，不成立，即 -2 也不是不等式的解，排除包含 $x=-2$ 的解(C)，故选(A)。

上例的解法是排除不符合题干条件的选择支，从而确定符合题干条件的一个选择支，属于间接解法，排除法适用于五个选择支都是确定的问题求解题，即适用于不含“以上结果均不正确”的选择支。

2. 条件充分性判断

定义 0.1 如果条件 A 成立，那么就能推出结论 B 成立，即 $A \Rightarrow B$ ，则说 A 是 B 的充分条件。

若 A 是 B 的充分条件，则也可以说 A 具备了使 B 成立的充分性，若 $A \nRightarrow B$ ，则说 A 不是 B

成立的充分条件,即 A 不具备使 B 成立的充分性.

例如: $A = \{x | x > 1\}$, $B = \{x | x \geq -2\}$, 写成: $x > 1 \Rightarrow x \geq -2$.

在这个命题中,“ $x > 1$ ”是“ $x \geq -2$ ”的充分条件,而“ $x \geq -2$ ”不是“ $x > 1$ ”的充分条件.

“ $x - 2 > 1$ ”不是“ $3 < x < 5$ ”的充分条件,同样“ $x - 1 \leq 4$ ”也不是“ $3 < x < 5$ ”的充分条件;但是,“ $x - 2 > 1$ ”与“ $x - 1 \leq 4$ ”联合起来,即“ $x - 2 > 1$ ”且“ $x - 1 \leq 4$ ”,就是“ $3 < x < 5$ ”的充分条件.

MBA 联考题型中“条件充分性判断”就是要求判断所给出的条件能否充分支持题干中陈述的结论,阅读每小题中的条件(1)和条件(2)后选择:

(A) 条件(1)充分,但条件(2)不充分;

(B) 条件(2)充分,但条件(1)不充分;

(C) 条件(1)和条件(2)单独都不充分,但条件(1)和条件(2)联合起来充分;

(D) 条件(1)充分,条件(2)也充分;

(E) 条件(1)和条件(2)单独都不充分,条件(1)和条件(2)联合起来也不充分.

例 0.3 条件充分性判断

方程 $x^2 - 5x - 6 = 0$ 成立,

(1) $x = -1$; (2) $x = 6$.

答案 (D).

解 方法一 条件(1)中, $x = -1$, $(-1)^2 - 5 \cdot (-1) - 6 = 0$, 因而条件(1)充分. 条件(2)中, $x = 6$, $6^2 - 5 \cdot 6 - 6 = 0$, 因而条件(2)也充分, 故选(D).

方法二 由 $x^2 - 5x - 6 = 0$ 知 $x_1 = -1$, $x_2 = 6$, 即条件(1)和条件(2)单独都充分, 故选(D).

从逻辑上讲, 条件充分性判断的解题方法可以从条件入手(条件(1)、条件(2)或联合条件(1)、条件(2))推导出结论, 如上例方法一. 也可以从结论入手, 寻找使结论成立的条件, 也就是找结论成立的充要条件或充分条件, 一直找到条件(1)、条件(2)或条件(1)和条件(2)联合起来的关系, 如上例方法二. 还可以同时从条件和结论切入, 寻找他们之间的关系, 如下例.

例 0.4 条件充分性判断

等式 $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{c}$ 成立.

(1) a, b, c 互不相等, 且它们的倒数成等差数列;

(2) a, b, c 互不相等, 且它们两两之积 ab, ca, bc 也是等差数列.

答案 (D).

解 要使 $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{c}$ 成立, 只需 $(a-b)c = a(b-c)$ 且 $c \neq 0, b \neq c$, 即 $ac - bc = ab - ac$ 且 $c \neq 0, b \neq c$, 也即 $ab + bc = 2ac$ ($b \neq c \neq 0$).

条件(1)中, 有 $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b}$, 去分母有

$$bc + ab = 2ca.$$

又 $b \neq c, c \neq 0$, 从而知条件(1)充分.

条件(2)中, 有 $ab + bc = 2ca$ 且 $b \neq c, c \neq 0$ (若 $c = 0$, 则 $bc = ca = 0$, 从而 $ab = 0$, a, b, c 中至少有两个为 0, 矛盾), 条件(2)充分, 故选(D).

上例中首先从结论入手, 寻找使 $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{c}$ 成立的充分条件 $ab + bc = 2ca$ 且 $c \neq 0, b \neq c$, 然后

分别从条件(1)和条件(2)出发得出这个充分条件.

例 0.5 条件充分性判断

不等式 $3 \leq x \leq 7$ 成立.

(1) $x-1 \geq 2$; (2) $x+2 < 9$.

答案 (C).

解 条件(1)中, $x \geq 3$, 令 $x=8$ 可知条件(1)不是充分条件. 条件(2)中, $x < 7$, 令 $x=1$ 可知条件(2)也不是充分条件. 将条件(1)和条件(2)联合起来, 即“ $3 \leq x < 7$ ”是“ $3 \leq x \leq 7$ ”的充分条件.

因此, 应选(C).

例 0.6 条件充分性判断

要使 $\frac{1}{a} > 1$ 成立.

(1) $a < 1$; (2) $a > 1$.

答案 (E).

解 方法一 条件(1)中, $a < 1$ 等价于 $a < 0$ 或 $a = 0$ 或 $0 < a < 1$, 则有 $\frac{1}{a} < 0$ 或 $\frac{1}{a}$ 无意义或 $\frac{1}{a} > 1$, 显然不能使 $\frac{1}{a} > 1$ 成立, 即条件(1)不是“ $\frac{1}{a} > 1$ ”的充分条件.

条件(2)中, $a > 1$ 等价于 $0 < \frac{1}{a} < 1$, 因此, 条件(2)也不是“ $\frac{1}{a} > 1$ ”的充分条件.

考虑到条件(1)与条件(2)无法联合, 即没有 a 值同时满足条件(1)与条件(2), 因此, 条件(1)与条件(2)联合起来也不充分, 故选(E).

方法二 条件(1)中, 令 $a=0$ 知条件(1)不充分, 条件(2)中, 令 $a=2$ 知条件(2)也不充分, 条件(1)与条件(2)又无法联合, 故选(E).

从以上诸例可以看到, 条件充分性判断的求解过程即为以下三个命题中某几个命题真假的判定:

- ① 条件(1)成立, 则题干结论成立.
- ② 条件(2)成立, 则题干结论成立.
- ③ 条件(1)与条件(2)两个条件都成立, 则题干结论成立.

第 1 章 实数的概念、性质和运算

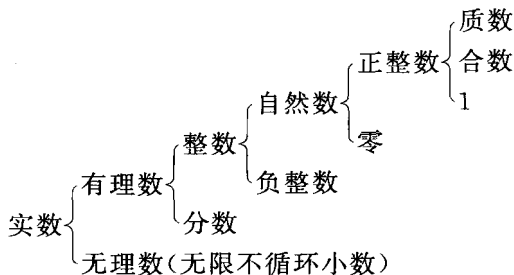
MBA 综合能力考试中的“数学”部分要求在实数范围内考查. 实数的概念、性质和运算是数学复习的基础. 实数绝对值是数学中的第一个最重要的概念, 实数绝对值的定义本身就是分段表达式, 即是数学分类思想的体现. 比和比例、平均值(算术平均值和几何平均值)同实数绝对值概念一样在数学和其他学科中都有着广泛的应用, 即便在日常生活中也是经常使用的概念和方法.

实数的概念、性质和运算, 特别是实数绝对值、比和比例、平均值都是重要的数学工具, 因此本章复习要掌握实数的性质和运算法则; 理解并能够熟练运用实数绝对值的概念、几何意义及其在方程、不等式中的应用; 能够在具体问题中使用比和比例的性质, 特别是这些性质使用的条件要十分明了; 会进行算术平均值与几何平均值的计算.

1.1 实数及其运算

1.1.1 实数

1. 实数的分类



表示法: 实数集 $\mathbb{R}$, 整数集 $\mathbb{Z}$, 自然数集 $\mathbb{N}$, 正整数集 $\mathbb{N}_+$.

2. 整数

整数按能否被 2 整除可分成奇数和偶数:

$$\text{整数} \begin{cases} \text{奇数 } 2n-1, \\ \text{偶数 } 2n, \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

正整数的分类中, 质数是指一个大于 1 的正整数, 它只能被 1 和它本身整除. 质数又称素数. 如 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 等就是质数. 合数是指一个大于 1 的正整数, 除了 1 和它本身以外还有其他因数. 如 4, 6, 8, 9 等就是合数.

3. 几个整数的关系: 互质数, 最大公约数与最小公倍数

将整数表示为质因数积的形式叫分解质因数. 如 $600 = 2^3 \times 5^2 \times 3$.

约数: 若整数 a 能被整数 $b(b \neq 0)$ 整除, 则 b 叫做 a 的约数. 如 2 是 6 的约数. 一个整数的约数是有限个的, 其中最小的约数是 1, 最大的约数是它本身. 如 6 的约数有 1, 2, 3, 6 四个. 几个

整数公有的约数,叫做这几个整数的公约数.几个整数的公约数中,其中最大的一个,叫做这几个整数的最大公约数.

定义 1.1 公约数只有 1 的两个或两个以上的整数,叫做互质数,简称互质.如 2 与 3, 5 与 7, 4 与 27 等就是互质数.

倍数: 如果整数 a 能被整数 b ($b \neq 0$) 整除,那么 a 叫做 b 的倍数.如 42 是 7 的倍数.一个数的倍数的个数有无限多个,最小的倍数(除零外)是它本身,0 是所有整数的倍数.几个整数公有的倍数,叫做这几个整数的公倍数.几个整数的公倍数中,除 0 以外最小的一个,叫做这几个整数的最小公倍数.互质的两个整数的积就是这两个互质整数的最小公倍数.

例 1.1 求 1800 与 1890 的最大公约数与最小公倍数.

解 把 1800 与 1890 分解质因数:

$$1800 = 2^3 \times 3^2 \times 5^2,$$

$$1890 = 2 \times 3^3 \times 5 \times 7.$$

求最大公约数是取出它们相同的质因数,质因数次数取最低的相乘,即 $2 \times 3^2 \times 5 = 90$.

求最小公倍数是取出它们相同的质因数,质因数次数取最高的,连同它们各自独有的质因数之积,即 $2^3 \times 3^3 \times 5^2 \times 7 = 37\,800$.

4. 整除

定义 1.2 如果数 a 除以数 b ,所得的商正好是整数而没有余数,则称 a 能被 b 整除.

末位是 2(或 5)的倍数的整数一定能被 2(或 5)整除;末两位是 4(或 25)的倍数的整数一定能被 4(或 25)整除,末三位是 8(或 125)的倍数的整数一定能被 8(或 125)整除.

被 3(或 9)整除的数,需要其各位数字之和能被 3(或 9)整除.

5. 分数

约分: 把一个分数的分子分母同除以它们的最大公约数.

通分: 把异分母分数分别化为和原来分数相等的同分母分数.公分母就是这几个分数分母的最小公倍数.

最简分数(既约分数): 分子、分母为互质数的分数.

6. 小数

纯循环小数化分数: 一个循环节做分子,分母是和这个纯循环小数中一个循环节数字个数相同的 9.

$$\text{如 } 0.217\,217\,217\cdots = 0.\dot{2}1\dot{7} = \frac{217}{999}.$$

混循环小数化分数: 分子是第二个循环节前小数点后的数减去小数点后不循环的部分,分母是和第一个循环节数字个数相同的 9,后面加与小数点后不循环数字个数相同的 0.

$$\text{如 } 0.235\,353\,5\cdots = 0.2\dot{3}\dot{5} = \frac{235-2}{990} = \frac{233}{990}.$$

例 1.2 在乘以 $\frac{52}{27}$ 和乘以 $\frac{143}{18}$ 都是整数的分数中,求其中最小的分数.

解 设所求的分数为 $\frac{y}{x}$, 即

$$\frac{52y}{27x} \in \mathbb{Z} \quad \text{且} \quad \frac{143y}{18x} \in \mathbb{Z}.$$

因为 52 与 27 互质, 所以 x 是 52 的约数, y 是 27 的倍数. 又因为 143 与 18 互质, 所以 x 是 143 的约数, y 是 18 的倍数. 又因为所求的 $\frac{y}{x}$ 是符合条件中最小的分数, 所以 x 是 52 与 143 的最大公约数, y 是 27 与 18 的最小公倍数. 因为 $52=2^2 \times 13$, $143=11 \times 13$. 所以 $x=13$. 因为 $27=3^3$, $18=2 \times 3^2$, 所以 $y=2 \times 3^3=54$. 因此, 所求分数为 $\frac{54}{13}$.

例 1.3 条件充分性判断

$b=d$ 或 $b=-d$.

(1) $\frac{a}{b}$ 与 $\frac{c}{d}$ 都是最简分数;

(2) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \in \mathbb{Z}$.

答案 (C).

解 在条件(1)中, 含 $a=1, b=2, c=3, d=5$, 结论显然不满足, 即条件(1)不充分.

在条件(2)中, 含 $a=1, b=2, c=2, d=4$, 结论同样不满足, 即条件(2)不充分.

条件(1)、条件(2)联合起来, 设 $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = x$, 由条件(2)知 $x \in \mathbb{Z}$, 则有

$$ad+bc=bdx. \quad ①$$

由①式可得

$$bc=d(bx-a).$$

由 c, d 互质及 d 是 bc 的约数知 d 是 b 的约数. 由①式还可得

$$ad=b(dx-c).$$

由 a, b 互质及 b 是 ad 的约数知 b 是 d 的约数.

因此, $b=\pm d$. 即条件(1)与条件(2)联合起来充分, 故选(C).

例 1.4 若 $\frac{a}{b}$ 是最简分数, 其中 a, b 取 1~9 中的数, $\frac{b+1}{9a+2} = \frac{1}{b}$, 则 $\frac{a}{b} = ()$.

(A) $\frac{2}{3}$

(B) $\frac{4}{5}$

(C) $\frac{5}{6}$

(D) $\frac{6}{7}$

(E) 以上结果均不正确

答案 (D).

解 由 $\frac{b+1}{9a+2} = \frac{1}{b}$ 得 $9a=b(b+1)-2=b^2+b-2=(b+2)(b-1)$. 因此, $(b+2)(b-1)$ 是 9 的倍数.

(1) 若 $(b+2)(b-1)$ 中有一个因式是 9 的倍数, $b \leq 9, b-1 \leq 8$, 故 $b-1$ 不可能是 9 的倍数, 此时必然有 $b+2$ 是 9 的倍数, $b+2=9, b=7$, 于是 $a=6$.

(2) 若 $(b+2)(b-1)$ 没有一个因式是 9 的倍数, 此时 $b+2$ 与 $b-1$ 都是 3 的倍数, 令 $b-1=3k, k \in \mathbb{Z}$, 则 $b=3k+1, b=1$ 或 4. 当 $b=1$ 时, $a=0$, 不符合题意. 当 $b=4$ 时, $a=2, \frac{a}{b} = \frac{2}{4}$ 不是最简分数, 也不符合题意.