大学数学改革系列教材

数学文化

MATHEMATIC CULTURE

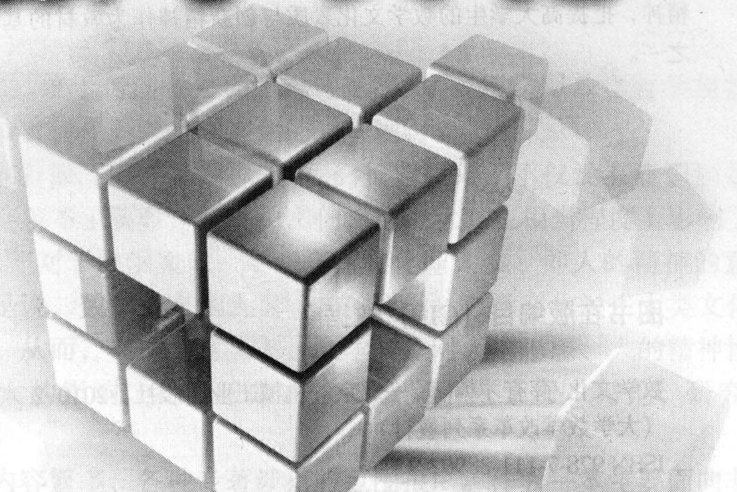
薛有才 编著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

大学数学改革系列

数学文化

-22



薛有才 编著

01-05

x970

机 械 工 业 出 版 社

数学的思想、精神、文化对于人类历史文化变革有着重要的影响。我们正是在这一意义下来学习、讨论、研究数学文化的。

本书的特点有三，一是由大家熟知的许多数学史实来阐明数学的思想、方法与文化意义，特别是介绍了解析几何、微积分、概率论与数理统计等大学生必修的大学数学内容的思想、方法与文化影响，以期加深对这些经典数学内容的理解；二是在众多数学事实的基础上，把它升华为数学哲学理论上的分析；三是延续中学数学新课标改革的精神，把提高大学生的数学文化素质与创新精神作为教材的基本目标之一。

图书在版编目（CIP）数据

数学文化/薛有才编著．—北京：机械工业出版社，2010.2
（大学数学改革系列教材）
ISBN 978-7-111-28902-9

Ⅰ.数… Ⅱ.薛… Ⅲ.数学－文化－高等学校－教材 Ⅳ.01－05

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 018613 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）
策划编辑：郑 玫 责任编辑：朱红波 版式设计：霍永明
责任校对：李 婷 封面设计：张 静 责任印制：洪汉军
北京外文印刷厂印刷
2010 年 4 月第 1 版第 1 次印刷
169mm×239mm·19 印张·368 千字
标准书号：ISBN 978-7-111-28902-9
定价：29.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
电话服务 网络服务
社服务中心：（010）88361066 门户网：http://www.cmpbook.com
销 售 一 部：（010）68326294 教材网：http://www.cmpedu.com
销 售 二 部：（010）88379649
读者服务部：（010）68993821

前　言

《数学文化》终于与读者见面了。这是我 10 多年学习数学哲学与数学文化的一些体会，或者说是我对数学文化的一些理解。

著名数学教育家丁石孙教授说：“我们长期以来，不仅没有意识到数学的文化教育功能，甚至不了解数学是一种文化，这种状况在相当程度上影响了数学研究与数学教育。”对于数学文化，本书是在文化即人文、即人的精神的意义下来讨论的。也就是说，数学是充满人文精神的科学。数学文化对于人类文化变革有着重要的影响。从而，在这个意义下，数学文化对人的思想、人的精神世界、人文素质有着巨大的影响。我们正是在这一意义下来学习、讨论、研究数学文化的。

数学文化内容繁多，各种专著涉猎的范围很广。作为一本主要面向非数学专业的大学生的文化素质教材，本书的选材着眼于以下几点：

1. 数学的思想、方法与意义。我们不仅应当把数学当知识，还应该从文化的角度来关注数学，从思想、方法论等角度提高对数学的认识。

2. 数学文化史。主要介绍中外数学文化的历史及其在人类文化变革中所起到的作用，从而做到以史为鉴，重视数学的文化价值。

3. 数学是一种多元文化。数学与政治、哲学、艺术、生活都有着深刻的联系，并互相促进。我们当然也应该在这种广义的意义上来理解数学文化。

4. 数学家的精神与思想境界是数学文化的一部分。通过数学家在学习、研究数学中的事迹来学习科学的方法，以及实事求是、坚韧不拔的科学态度和敬业精神。

本书的特点有三，一是由许多数学史实来阐明数学的思想、方法与文化意义，特别是介绍了解析几何、微积分、概率论与数理统计等大学生必修的大学数学内容的思想、方法与文化影响，以期加深读者对这些经典数学内容的理解；二是在众多数学史实的基础上，把它们升华为数学哲学理论上的分析；三是延续中学数学新课标改革的精神，把提高大学生的数学文化素质与创新精神作为本书的基本目标之一。

本书参考了国内外众多数学哲学与文化专家的研究成果，特别是 M. 克莱因

与郑毓信先生的研究成果对本书影响较大。笔者对这些内容进行了细致的整理，并把它们有机地组织在一起。本书中除了一些阅读材料外，凡有“*”号的内容，由于涉及较深的数学哲学理论，可以作为阅读材料，供教学上参考。

本书参考了众多的文献，难免有的引用不能一一指出，敬请见谅。笔者对所有参考文献的作者特别是郑毓信、张楚廷、张顺燕、易南轩等先生表示衷心的感谢；感谢陈晓霞老师在资料方面所作出的辛勤工作；感谢机械工业出版社高等教育分社郑玫编辑在本书的策划、出版过程中所付出的辛勤劳动。

本书得到浙江科技学院教材出版基金的资助，特此致谢。

由于作者的水平有限，错误在所难免。真挚地期望各位读者不吝赐教。

薛有才

2009 年 7 月于杭州

目 录

序　言

数学与数学文化

数学是一种艺术，如果你和它交上了朋友，你就会懂得，你再也不能离开它。

——爱因斯坦

数学推理几乎可以应用于任何学科领域，不能应用数学推理的学科极少，通常认为无法运用数学推理的学科，往往是由于该学科的发展还不够充分，人们对于该学科的知识掌握得太少，甚至还在混沌的初级阶段。任何地方只要运用了数学推理，就像一个愚笨的人利用了一个聪明人的才智一样。数学推理就像在黑暗中的烛光，能照亮你在黑暗中寻找宝藏。

——阿尔波斯诺特

我们每个人都学习过数学。甚至我们每个人在牙牙学语的时候，我们的父母就开始教我们学习数数：1，2，3，…。每个孩童，可以说，就是在数数的过程中，开始了他们对世界的认识。对于数学，可以说每个人都有自己深刻的体会。那么，什么是数学呢？数学不只是数的世界、形的世界或应用广阔的科学世界中的科学；数学还是文化，是人类创造的最重要的文化之一，它以自己无穷的力量影响着世界，影响着人类。我国著名数学家齐民友先生写道：

一种没有相当发达的数学的文化是注定要衰落的，一个不掌握数学作为一种文化的民族也是注定要衰落的。

数学是关于世界与宇宙的真理还是人的创造物？数学是像物理、化学一样关于物质世界的科学知识，还是像绘画、小说一样是由人塑造出来的一种文化现象？

数学对科学世界具有什么样的贡献？没有数学，我们的科学世界会是什么样子呢？

数学对人文科学具有什么样的贡献？如果我们说没有数学，就不会有今天繁荣的人文与社会科学，像音乐、绘画、雕塑、哲学、经济学等，就没有今天的理性世界，你同意吗？

数学是美的，令人流连忘返，还是枯燥乏味的，令人难以想象？

数学家都是不食人间香火的假道士，还是充满了活力和爱心的“凡人”？

以上问题对每一个人来说，并不一定是清楚的。数学文化学习的任务就是要回答这些问题，告诉大家一个真实的数学世界。

1. 数学的基本特征

数学最基本的特征，就是它的抽象性、精确性与逻辑演绎性、应用的广泛性、语言性与教育的深刻性。

（1）数学的抽象性

提起数学的抽象性，每个人都有深刻的体会。例如，数字“3”，不是“3个人”、“3个苹果”等具体事物的数量，而是完全脱离了这些具体事物的抽象的“数”。数学中研究的形——三角形、四边形等，也不是三角板、长方形纸片或足球场等具体形状，而是与这些具体事物完全无关的、抽象的“几何图形”。数学中的等式“3 = 3”，也是完全抽象的。如果没有告诉我们等式两边的3是什么，我们是否可以说3千克的黄金等于3千克的杨树叶呢？当然，更不用说今天的代数数论、抽象代数学、拓扑学等现代数学分支了。

为什么数学必须是抽象的？它可以具体点吗？事实上，数学的抽象性主要是由数学的研究对象所决定的。数学是模式的科学，它研究事物及其相互间量的关系，因此它必须抛开事物具体的物理特征，而仅研究事物所具有的量的关系。还是让我们通过例子来说明吧。

例1 七桥问题

18世纪时，帕瑞格河从哥尼斯堡城中流过，河中有两个岛，把该城分为4个部分。河上有7座桥，将两岸和岛连接，如图1所示。城里的人从桥上走来走去，有人便提出这样一个疑问：一个人能否依次走过所有的桥，而每座桥只走一次？如果可以的话，这个人能否还回到原来出发地？这就是有名的“七桥问题”。许多人都在试验，每天都有许多人在想办法“不重复地走遍”所有这7座桥。但是，没有人能够完成这一“壮举”。这个问题有答案吗？

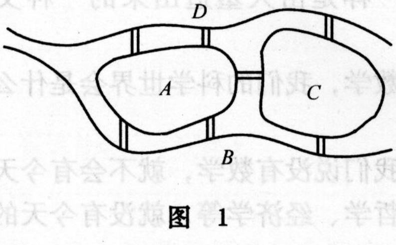


图 1

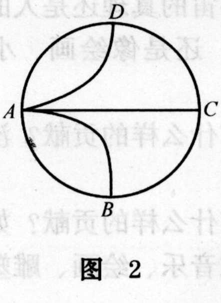


图 2

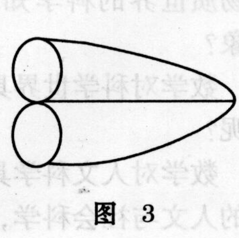


图 3

人们把这个难题拿到了大数学家欧拉面前，请他解决。欧拉经过认真思考，

把问题抽象为：把城市的4个部分不断缩小，最后都缩成一点，而把连接两部分陆地的桥，设想成连接这两点的一条线，于是得到一个“图”，如图2（或图3）所示。于是，原来的问题就变为：这个图能否一笔画成而不重复？如果可以的话，起点是否与终点重合？这是一个有趣的问题。

欧拉是如何解决这个问题的？这需要一些简单的图论知识。图论中的“图”究竟指的是什么？或者说，什么是图？图是指若干个点，以及连接它们中某些点的线（直线或者曲线）组成的有限图形。图可以是平面的，也可以是空间的，如图4所示。图中的点，称为顶点或顶；图中的线，称为边。一个图 G 可以用它的顶点的集合 V 和边的集合 E 唯一确定，记作 $G=(V, E)$。如果两个图的顶点的集合与边的集合相同，则称这两个图是“同构”的。两个同构图，从图论的意义上就认为是完全相同的。如图4中a、b两个图，虽然一个是立体的，一个是平面的，但它们的顶点的集合与边的集合相同，因此是同构的。同样，图2与图3也是同构的。

由彼此相连接的顶点和边组成的部分图形（子图），称为图的一条“链”或“路”。如果一条路首尾相连，则称为回路或环。例如图4b中就有多条回路，如：$A \to B \to C \to D \to A$，$A \to A_1 \to D_1 \to D \to A$，$A \to B \to B_1 \to C_1 \to D_1 \to D \to A$，等。

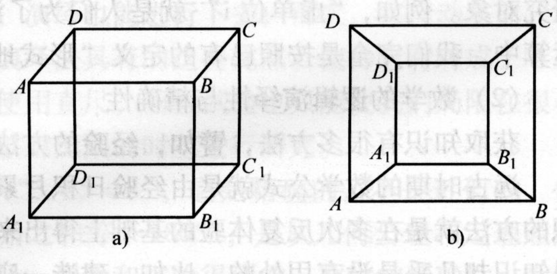


图 4

一个图，如果每两个顶点都有且只有一条边相连，则称之为“完全图”。如果图 G 的一条链，包含了 G 的所有顶点和边，则称之为“欧拉链”；特别地，如果一条回路包含 G 的所有顶点和边，则称之为“欧拉回路”。于是，七桥问题就变成：图2是否为一个欧拉链？或者，它是否为一个欧拉回路？为此，需要了解关于顶点的几个概念。

一个顶点所聚集的边的数目，称为该顶点的“度”。顶点的度是奇数，称为“奇顶点”；顶点的度是偶数，称为“偶顶点”。

关于一个图是否为欧拉链或欧拉回路，有一个简单的判定准则。我们把它写成定理形式：

定理1（欧拉回路判定准则） 一个连通图（图中任何两个顶点都能够用一条链来连接）是欧拉回路的充要条件是它的奇顶点的个数是0或2。

由此可以得到图是否可以一笔画的判定准则，也写成定理形式：

定理2（一笔画判定准则） 如果一个图上的奇顶点的个数是0或2，该图就可以一笔画，否则不能一笔画。特别地，若奇顶点的个数为0，即图上没有奇顶

点，则该图不仅可以一笔画，而且起点还能与终点重合。

据此，对于上述七桥问题很容易得出结论：因为图2（或图3）上的4个点都是奇顶点，所以它不是欧拉回路，所以它不能一笔画。从而知道哥尼斯堡七桥问题的答案是否定的。

这就是数学中的抽象过程，陆地再大再广，在所研究的问题中作用并不大，它们与一个点的作用相当；桥也不管长短曲直与宽阔，完全可以用一条曲线代替。抽象的结果，走路的问题变成了一笔画的问题。

不过，抽象并不是数学独有的属性，它是任何一门科学乃至全部人类思维都具有的特性。因此，单是数学概念的抽象性还不能说尽数学的特点。

数学在它的抽象方面的特点还在于：第一，在数学的抽象中首先保留量的关系和空间形式而舍弃了其他一切。第二，数学的抽象是经过一系列阶段而产生的，它们达到的抽象程度大大超过了自然科学中一般的抽象。数学中许多概念是在抽象概念之上的抽象，例如，群的概念。第三，数学抽象的特殊性在于数学对象是借助于明确的定义建构的；而且，在严格的数学研究中，无论所涉及的对象是否具有明显的直观意义，我们都只能依据相应的定义和推理规则进行，而不能求助于直观。而且，在经常的数学研究中我们就是依抽象思维的产物作为直接的研究对象。例如，“虚单位i”就是人们为了满足运算而构造出来的。在复数的运算中，我们完全是按照已有的定义“形式地”进行。

（2）数学的逻辑演绎性与精确性

获取知识有很多方法，譬如，经验的方法、归纳的方法、类比的方法。

远古时期的数学公式就是由经验日积月累而成。例如，古人对许多图形求面积的方法就是在多次反复体验的基础上得出来的。但在许多情况下，经验对于获得知识却几乎是没有用处的。比如，建造一座桥梁，谁敢去实验一种钢索能否承担得起这座桥呢？

类比方法是有用的，但也受一定的限制，并不是在所有情形中都能使用类比法。例如，我们可以从平面的性质类比立体空间的性质，但我们还必须进行证明，不能想当然地认为在平面中成立的性质在立体空间中必成立。

使用更为广泛的另一种推理方法是归纳法。例如，我们可以从以下等式中进行归纳：$4=2+2$，$6=3+3$，$8=5+3$，$10=5+5=7+3$，$12=7+5$，…，归纳得出：一个大于4的偶数可以表示为两个奇质数（素数）的和。归纳过程的本质在于，在有限的几个例子的基础上概括出一些总是正确的结论。

归纳法在科学实验中是基本的推理方法。尽管由归纳推理得出的结论，经常被事实证明是正确的，但还不能说所有归纳得出来的结论都是确定无疑的。有时候，归纳出来的结论并不正确。例如，如果近几期的彩票中奖号码比较接近，但我们不能从中归纳出这些号码就是中奖率比较高的号码。归纳推理的方式还会受

到许多其他方面的限制。

在得出结论的几种方法中，每一种无疑都会在一定的情形中有用，但它们又都有一定的使用范围。即使经验中的事实，或作为类比、归纳推理基础的事实是完全确定的，但得到的结论依然可能不确定、不正确。在要求确定性是最为重要的推理中，这些方法几乎是无用的。

我们还有一种更重要的获取知识的方法，这就是古希腊人发展的演绎法。所谓演绎法是一种运用理性思维形式从一些普遍性结论或一般性原理中推导出个别性结论的论证方法。例如，在数学上，从原始概念和公理出发，运用演绎思维得出一些定理，然后再依据这些定理以及定义等继续进行推理论证，得出一个比较完整的数学理论系统。欧几里得几何学是世界上第一个演绎推理系统，它从几个不证自明的公理出发，运用演绎推理方法，得到一系列几何（数学）定理，形成一个完整的公理化体系。演绎推理就是从已认可的事实推导出新命题，承认这些事实就必须接受推导出的新命题。演绎法重要的是，如果作为出发点的事实是确定无疑的话，则结论也确定无疑。

演绎法，作为获得新知识的方法，与反复试验法、类比法、归纳推理法相比，有很多优点。首先，如果前提确定无疑则结论也确定无疑；其次，与试验相反，即使不利用或缺乏昂贵的仪器，演绎也能进行下去；再次，在行动之前，利用演绎推理我们就已经知道结论。演绎法具有的这些优点，使得它有时成了唯一有效的方法。计算天文距离不可能使用直尺，而且试验也只能使我们局限在很小的时空范围内，但是演绎推理却可以对无限的时空进行研究。

我们经常说数学是精确的，如“$3+5=8$”，它是精确的，不是近似的、估计的；欧氏几何定理“三角形三内角之和等于180°”，是从几何公理和定理经过逻辑推导得出来的，而非猜测、估计、测量和试验得到的。数学的精确性，就是来源于数学的演绎推理。

我们还是通过例子来说明演绎法的力量。

例2 抛掷一枚硬币出现正面的概率

这是大家都非常熟悉的一个例子，我们来看看如何利用数学得到精确的概率值。解决这个问题的一种方法是计算“频率”，例如，掷100 000次硬币，然后计算出现“正面”的次数，出现“正面”的次数与100 000的比即为所求的频率，也就是所求的答案，或者差不多会接近真实的答案。不过，数学家们却往往通过思考去找出解决这个问题的方法：一枚质地均匀的硬币只有两个面，由于在硬币的形状上或者在扔硬币的方式中，没有任何因素有利于某一面的出现，所以得到每一面朝上的可能性是相同的。在此问题中，仅仅是出现“正面”的一面是有利于问题的情形。因此出现“正面”的概率就是1/2。

在历史上，曾有人做过许多次抛掷硬币的试验来验证上述结果，如表1

所示。

表1　历史上的抛掷硬币试验

试　验　者	抛掷次数 n	出现正面次数 m	出现正面的频率 m/n
普丰	4 040	2 048	0.506 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

可能有人认为上述例子体现不出数学的逻辑演绎性，仅是体现了数学家不是动手而是动脑子在研究问题。是的，逻辑演绎就是在用推理，而不是用试验（实验）的方法去解决问题。

下面再看一例。

例3　抽屉原理的应用

设有10本书，共3类，文学类（A类）、史学类（B类）、数学类（C类），证明至少有一类书有4本或4本以上。

这个问题很容易通过反证法证明。假设A类、B类、C类的书都不超过3本，那么所有的书加起来就不超过9本，这与有10本书相矛盾。所以，至少有一类书超过3本，即4本或4本以上。

这个问题相当于：有10件物品，装在3个抽屉里，那么有一个抽屉至少有4件物品。这是一个具体的抽屉原理问题，看似很简单，却很有用。

在任意的6个人中，一定可以找到3个相互认识的人，或者3个互不认识的人。你能证明这一命题吗？实际上，利用抽屉原理就不难证明。

现在，我们就把6个人看做6件物品，然后将他们标记为A、B、C、D、E、F。以F为基准，将A、B、C、D、E这5件“物品”，分为两类亦即“装于两个抽屉”，一类是“与F相识”的，另一类是“与F不相识”的。这时，相当于把5件“物品”A、B、C、D、E放进两个抽屉。那么，两“抽屉”中必有其一至少有3件“物品”。现在可以看到，无论是哪个“抽屉”中有3件“物品”，都将得到我们所需要的答案。

如果“与F相识”的抽屉里有3个人，不妨说是A、B、C。这时，假若A、B、C 3人彼此不相识，那么已说明答案是成立的；假若A、B、C中至少有2人，例如A、B 2人相识，再加之A、B与F都相识，因此，A、B、F 3人便是彼此相识的3人，这也说明了答案成立。如果“与F不相识”的抽屉里有3个人，仍不妨说是A、B、C 3人。这时，若A、B、C 3人彼此相识，那么已说明答案成立；假若A、B、C中至少有2人，例如A、B 2人不相识，而他们又都与F不相识，这样，A、B、F 3人都是彼此互不相识的3人。于是命题所说的答案亦成立。

从古希腊开始，演绎的方法过去一直是数学中“唯一”被承认的方法，归纳的方法几乎被赶出了数学的家园。但是在近年，我国数学家吴文俊院士、张景中院士等却发展了一种“例证法”——用演绎来支持归纳。我们用张景中院士举过的一个简单例子予以说明。

例如，证明恒等式：$(x-1)^2=x^2-2x+1$。我们用$x=1$代入上式，两边都是0；用$x=2$代入上式，两边都是1；用$x=3$代入上式，两边都是4。这就已经证明了上式一定是恒等式。这是因为如果它不是恒等式，它一定是一个二次或一次代数方程，那么它最多只有2个根。现在$x=1$，2，3都是“根”，说明它不是方程而只能是恒等式。

“在这个具体问题上，演绎推理支持了归纳推理。我们用数学上承认的演绎法证明了归纳法的有效性”。

举例的方法不仅能证明代数问题，也能应用在几何问题上面。吴文俊院士、张景中院士等在这方面作出了杰出的贡献。这一方法现在广泛应用于“机器证明”之中。有兴趣的读者可以阅读上述的张景中院士的著作：《数学与哲学》。这是我国数学家对数学发展的卓越贡献。

（3）数学应用的广泛性

数学的抽象性，决定了数学应用的广泛性。正因为“3+5=8”是抽象的，超乎一切具体的事物之外，结论是精确的，所以它对于任何领域里的事物都适用。在小学和中学里学习的算术、代数和几何知识，是人们日常生活中应用最为广泛的知识。随着社会的进步，许多新的数学知识会逐渐进入人们的日常生活领域。

数学的应用有时甚至是神奇的。我们来看看海王星的发现过程，你就会被数学神奇的应用力量所震惊。1781年3月13日，赫歇耳发现了第七颗行星——天王星。1821年有个法国人布瓦德，将1781年以来40年的天王星资料进行了一番细细推算。这一算不得了，这天王星总也进不了开普勒的轨道。他又将1781年以前的观察资料再算一遍，又是另一个轨道。事情过了10年到了1830年，有人将天王星的轨道再算一遍，又是第三种样子。这下，平静的天文界哗然起来，如果不是哥白尼的假设、开普勒的“立法”都错了，就是天王星外还有一颗未发现的新行星通过引力在影响它的轨道。但是经过80年的探索，却杳无踪影。天王星距太阳约28亿千米，绕太阳一周，要用84年，如果它的轨道外再有一颗星，找起来真是大海捞针了。在宇宙中，一颗星会对附近的另一颗星的运行轨道发生影响，这叫摄动。根据开普勒等人的理论，在当时对已知星计算摄动是不成问题的。现在要反过来，靠这么一点点的摄动就要去推算那颗未知的新行星，这里面有许多的未知数，简直无从下手。

1846年9月23日，德国柏林天文台台长加勒收到一封来自法国的一位名叫

勒维列的来信。信中写道："尊敬的加勒台长：请您在今天晚上，将望远镜对准摩羯座δ星（垒壁阵四）之东约5°的地方，您就会发现一颗新行星。它就是您日夜在寻找的那颗未知行星，它小圆面直径约3角秒，其运动速度为每天后退69角秒（一周天360度，1度=60角分，1角分=60角秒）……"加勒读完信后，不禁有点发愣。他心里又惊又喜，是谁这么大的口气，难道他已观察到这颗星了？好不容易熬到天黑，加勒和助手们便忙将望远镜对准那个星区。果然发现一个亮点，和信中所说的位置相差不到1度。他眼睛紧贴望远镜，一直看了一个小时，这颗星果然后退了3角秒。"哎呀！"加勒台长跳了起来，大海里的针终于捞到。几天后他们向全世界宣布：又一颗新行星发现了！它的名字取做：海王星。

然而，年轻的勒维列不是靠观察，而是靠笔算出来的。他研究了其他行星与太阳的距离，木星、土星和天王星轨道的半径差不多后一个都是前一个值的2倍，假设未知星半径也是天王星的2倍，他列出33个方程进行计算。计算结果和观察结果有误差，经过修正、计算、再修正、再计算，逐步逼近。就这样好几年过去了，终于达到了理想的结果——误差小于1角秒。真是，天文学家冒着寒风在星空下观察了一辈子不得其果，而这个未出茅庐的小伙子却用一支笔将结果精算于帷幄之中。科学的假设、科学的理论一旦建立，竟有如此伟大的神力。

事实上，早在一年前的9月里有个叫亚当斯的23岁英国青年就已计算出这颗新行星的位置，并将结果转告给英国皇家天文台台长。可惜的是，这位台长瞧不起这个无名小卒，也根本不相信数学的力量，所以没有做认真的观察。好在后来大家承认海王星是他们俩同时发现的，勒维列和亚当斯以后分别担任了巴黎天文台和剑桥大学天文台的台长。

例4 范·米格伦伪造名画案

二次世界大战期间，在比利时解放以后，荷兰保安部开始搜捕纳粹同谋犯。在曾把大量艺术品卖给德国人的某商号的档案中，他们发现了一个银行家的名字，这个银行家曾充当把17世纪荷兰著名画家杨·费美尔（Jan Vermeer，1632—1675）的油画《捉奸》卖给纳粹空军元帅格林的中间人。这个银行家又泄漏，他是第三流荷兰画家范·米格伦（Van Meegeren）的代表，因此范·米格伦因通敌罪于1945年5月29日被捕。同年7月范·米格伦在牢房里宣布，他从未把《捉奸》卖给格林，并说，这幅画和非常著名、非常美丽的《埃牟斯的门徒》以及其他四幅冒充费美尔的油画和两幅冒充德胡斯（De Hooghs，17世纪荷兰画家）的油画都是他自己的仿冒作品。范·米格伦为了证实自己所说的话，在监狱里开始伪造费美尔的油画《耶稣在医生们中间》，以向怀疑者证实他是伪造费美尔作品的高手。当这项工作几乎要完成的时候，范·米格伦获悉，通敌罪已改为伪造罪。因此，他拒绝最后完成这幅油画，并使它变陈，以使满怀希望的

检查者们不能发现他使伪造品变陈的秘密。为了澄清这一问题，由一些卓越的化学家、物理学家和艺术史学家组成的国际专门小组受命调查这一事件。他们用X射线检查画布上是否曾经有过别的画，此外，他们分析了颜料，考查了画中有没有经历岁月的痕迹。不过，范·米格伦是很懂得这些方法的。为了不被别人发现是伪作，他从不很值钱的古画上刮去颜料而只用画布，然后设法使用费美尔可能使用的颜料。范·米格伦也知道，陈年颜料是很坚硬的，而且不可能溶解。因此他很机灵地在颜料里掺了一种叫酚醛类人工树脂的化学药品，它在油画完成后在炉子上烘干时就硬化为酚醛树脂。但是，范·米格伦的伪造工作有几点疏忽之处，专家小组在米格伦伪造的画中找到了现代颜料钴蓝的痕迹。此外，他们还在几幅画里检验出20世纪初才发明的酚醛类人工树脂。根据这些证据，范·米格伦于1947年10月12日被确认为伪造罪，判刑一年，服刑期间他因一次心脏病发作而死于1947年12月30日。但是，即使知道了专家组收集的证据之后，许多人还是不相信《埃牟斯的门徒》是范·米格伦伪造的，依据是，其他所谓的伪造品以及范·米格伦最近完成的《耶稣在医生们中间》等作品质量都很差，他们肯定，美丽的《埃牟斯的门徒》的作者不会画出质量如此之差的作品。

事实上，《埃牟斯的门徒》曾被著名的艺术史学家A·布雷丢斯（Bredius）鉴定为费美尔的真迹，并且被伦布兰特（Rembrandt）学会以170 000美元的高价购去。专家小组对怀疑者的答复是，由于范·米格伦曾因他在艺术界没有地位而十分沮丧，他决心绘出《埃牟斯的门徒》以证明他高于第三流画家。当创作出这样一幅杰作之后，他的志气消退了。而且，当他看到《埃牟斯的门徒》多么容易卖掉以后，在炮制后来的伪造品时就不太用心了。这种解释不能使怀疑者们感到满意。他们需要一个完全科学的、判定性的证明来确定《埃牟斯的门徒》是伪造品。卡内基·米伦大学的科学家们在1967年做到了这一点。

测定油画需要放射性的知识。我们知道，地壳中几乎所有的岩石都含有少量的铀。岩石中的铀衰变为另一种放射性元素，而该放射性元素又衰变为一系列其他元素（见图5），最后变为无放射性的铅。铀的半衰期是4.5×10^9年，它不断为这一系列中后面的各元素提供来源，使得当它们衰变后就有前面的元素予以补充。

所有的油画中都含有少量的放射性元素铅-210（^{210}Pb），还有更少量的镭-226（^{226}Ra），因为两千多年来画家用的颜料铅白，即氧化铅都含有这种元素。铅白是由金属铅冶制成的，而金属铅又是从铅矿石中提炼出来的。在提炼过程中，矿石中的铅-210随同金属铅一起被提炼出来。但是，90%～95%的镭以及它衰变的后裔则随同其他废料作为矿渣而被除去。这样，铅-210的绝大部分来源被切断，它便以22年的半衰期非常迅速地衰变。这个过程一直进行到铅白中的铅-210同所余少量的镭再度处于放射性平衡为止，这时铅-210的衰变恰好被镭的衰变所补足而得到平衡。