高等几何

山东省五所师专高等几何修编组

编写说明

本书是根据去年十一月教育部在天津召开的全国师范专科学校教学工作座谈会的精神，在泰安师专数学系等编写的《近世几何基础》（1980年11月，铅印本）的基础上，修编而成的。

高等几何是高等师范院校数学专业的基础课程。本书分“几何基础”和“射影几何”两编，分别介绍了几何学的公理化体系及几何学的变换群。一方面使学生能从较高的观点来理解和处理初等几何与解析几何中的问题，以便更深入地掌握中学几何教材；另一方面也使学生掌握一些进一步研究几何学的基本知识与方法。

关于本书的内容作以下的说明：（1）几何基础部分的内容直接与中学初等几何教材有关，射影几何部分也注意安排了一些联系初等几何与解析几何的定理、例题和习题。（2）射影几何部分没有单用解析法进行研究，而是兼用综合法与解析法，发挥各自的优越性。考虑到师范专科学校的学生毕业后要能胜任初中几何课的教学，对他们多进行一些用综合法解决问题的能力的训练，还是非常必要的。（3）本书中标有星号“*”的章节，可作为学生的选学教材，不一定逐一讲授。

本书的编写过程是：1981年12月，泰安师专、济宁师专、临沂师专、菏泽师专、枣庄师专等五校数学系的有关同

志集体讨论了编写大纲、细目和分工，然后由临沂师专数学系几何组执笔写出初稿；1982年4月，临沂师专、菏泽师专、泰安师专、济宁师专、枣庄师专、昌潍师专、北镇师专、德州师专、青岛师专、济南师专、聊城师专、胜利油田教师进修学院、潍坊教师进修学院等单位的代表，集体讨论了初稿；1982年6月，张立绥、李云普、孙炳泰、马知效等同志，对初稿进行了审阅和修改，最后由李云普同志执笔整理定稿。在编写过程中，除参考了叶非莫夫著《高等几何学》（裘光明译，1954年12月第一版）、科士青著《几何学基础》(苏步青译，1958月11月新一版)、钱端壮编《几何基础》（1959年3月第一版）、孙泽瀛编《近世几何学》（1959年4月第一版）等书外，还参考了朱德祥编《高等几何》（昆明师院数学系，1981年8月，铅印本）。

由于我们的水平所限，定有内容不妥和谬误之处，望读者批评指正。

编　者

1982年6月

目　　录

第一编　几何基础

第二编　射影几何

第一编　几何基础

公理法是整理和叙述数学知识的一种常用的方法。对于几何学，人们往往把在实践中总结出来的若干最基本的命题作为公理，由此再引出一些较复杂的概念并论证一些其他命题。这种在公理体系的基础上建立各种几何学，并对其逻辑结构进行的研究，称为几何基础。在本编中，我们主要介绍欧氏几何的公理体系和罗氏几何的公理体系。

第一章　欧氏几何的公理体系

在本章中，我们首先从几何基础的发展简史谈起，然后系统地研究希尔伯特的公理体系（结合公理，顺序公理，合同公理，连续公理与平行公理），最后介绍了公理体系的三个基本问题（相容性，独立性，完备性）。

§1　古代几何学简史

早在公元前600—400年时，世界各民族就已经懂得并应用着许多的几何知识。在我们中国，有一部很古的数学书叫"周髀算经"（约为公元前400年的作品），记载有周公（约公元前1100年）与商高问答的话，那时就知道勾股形（即直

角三角形）中勾三、股四、弦五的关系。商高又说：从前禹王治理洪水，就是用这种方法测量地势高低使水流就道的，人们才得以安居。“周髀算经”中还记载了有一位名叫陈子的人，他曾用勾股定理和相似图形的比例关系推算过地球和太阳的距离以及太阳的直径。可见我们的祖先对几何知识的积累和应用是丰富多彩的。其后，如“九章算术”、“孙子算经”、“五曹算经”等等，都是我国汉唐以前流传至今的经典数学著作，其中记载有丰富的算术、代数和几何的知识。特别关于圆周率的计算，我国古代数学家有着重大的贡献，如西汉末年(公元前50—23年)刘歆已算得 $\pi=3.1547$；三国时，刘徽（公元263年）利用割圆术算得 $\pi=3.14$；南北朝时，祖冲之（公元429—500年）算得 $3.1415926<\pi<3.1415927$，已达到了极为精确的数值。在埃及，公元前3000多年时，库佛王的金字塔就高达138公尺。希腊古代数学家泰勒斯（Thales，约公元前639—548年）曾利用相似形的原理测量了金字塔的高度。这些事实说明，当时已有了精密的测量和几何的计算。

古希腊的历史学家和数学家，认为埃及人的几何知识的发生是由于对土地的测量，因为在尼罗河每年泛滥之后，他们就得把被河水冲没的地界重新测量一次，“测量”便是“几何学”这个名词的来源。在希腊文中，“几何学”这个名词就是“土地测量”的意思。关于埃及人当时的几何知识，有两本书流传至今，其一是公元前2000—1700年阿梅斯(Ahm—es)手抄的书，后人称为“阿梅斯杂录”；其二是缺少卷首的现在保存在莫斯科的书（约公元前十九世纪左右），称为“莫斯科杂录”。从这两本书上可以看到，当时埃及人

已能够取一边为单位长度的正方形作为面积单位，并能用与现代相同的公式去计算矩形、三角形、梯形的面积。特别重要的是埃及人当时已能够精确地计算正四棱台的体积 $V=\frac{1}{3}h(a^2+ab+b^2)$。与埃及人同时，中国、巴比伦、印度等国的古代人民对几何知识也都有一些重要的应用和发展。但是，当时这些国家的几何学，总的看来还是有些粗糙和单凭经验的，没有能够超出个别问题的特殊解答的范围。

约在公元前七世纪时，埃及人的几何知识传入希腊，那时希腊的经济文化比其他民族要繁荣昌盛得多，几何学也跟着发展成为科学。那时，希腊人不仅继续积累新的几何事实并且开始采用特别的方法去创造理论，这便是我们现在所用的演绎法（公理法），直到今天，这也还是叙述几何的基本方法。创造这个方法是数学思想的伟大成就之一，它不是短时间可以产生出来的，而需要积累好几辈学者的工作。

希腊几何学的创始人公认为泰勒斯，他曾在埃及居住过，学会了埃及人的数学知识，以后他的学识很快便超过了当时埃及人的数学水平。泰勒斯从埃及回到他的故乡米勒都斯，在那里创办了学校，为古代希腊培养了许多哲学家和其它学科的学者，成为当时著名的流派——依虹尼安派，对希腊的文化发展起了重大的作用。

继泰勒斯之后，希腊数学家毕达哥拉斯(Pythagoras 公元前569—500年）也创立了一个有名的学派，称为毕达哥拉斯学派。这个学派在几何学的发展方面作出了重大的贡献，如：毕达哥拉斯定理（勾股定理）；三角形内角和定理；有关空间正多面体定理等等。毕达哥拉斯的学生希派

斯(Hippasus)还发现了无公度线段的存在，使人类的几何知识大大地前进了一步。

在毕达哥拉斯学派稍后，在希腊的京城雅典，创立了科学史上著名的雅典学派。如希波克拉特(Hippocrates，公元前470年—？)，柏拉图(Plato，公元前429—348年)，欧道克斯(Eudoxus，公元前408—355年)，他们被称为雅典学派中最著名的三大几何学家。历史上第一部几何学教科学，就是希波克拉特写的，在这本教科书中有了初步的几何定理的证明。人所共知的几何三大难题，也是由于希波克拉特的研究，以致引起了后代几何学家的重视。柏拉图是当时希腊的哲学家，但他对几何学特别地重视，他把逻辑学的思想方法引进了几何学，使原始的几何学知识受到逻辑学的指导而产生了系统性与严密性的要求。欧道克斯在数学上的主要贡献是比例论与“取尽法”，他的比例论后来编入了欧几里得的“几何原本”的第五卷，使欧几里得在这理论的基础上以当时最大可能的严密方式叙述了几何。取尽法是以下面的假设作基础的：“如果从某数量去掉一半或更多的部分且对剩下的部分施行同一手续，并同样地一直进行下去的话，那么可以获得这样的数量，使它比任意给予的一数量还要小些。”欧道克斯应用反面的讨论而得到了棱体、锥体和球体的体积计算方法。

古代希腊几何学的发展，与哲学的发展有着密切的联系。特别值得提出的是逻辑学的创始人亚里斯多德(Aristotle，公元前384—322年)，他曾经指出：“任何一种严密科学是从一些不能证明的原理开始的，不然所需要的证明将要无止境地继续下去，形成无穷尽的步骤，至于不

能证明的原理可分成两类：（a）一切科学共同具有的原理；（b）某一门科学特有的原理……。”实际上，亚里斯多德所说的逻辑方法，就是今天我们在数学里普遍应用的演绎法或称公理法。这对当时的希腊几何学家欧几里得的历史巨著“几何原本”（下一节将详细介绍）有着重大的影响。

§2 欧几里得的“几何原本”

欧几里得（Euclid，公元前330—275年）是古希腊最伟大的一位几何学家。他是柏拉图派的学生，曾在埃及的亚历山大城教授过数学，并且是希腊的亚历山大学派的创始人。

欧几里得在他的千古不朽的名著“几何原本”中，不仅非常详尽地搜集了当时所知道的一切几何学方面的资料，而更重要的是把这些非常分散的知识用逻辑推理的链子，把它们编排成为一个有系统的理论。他把几何学，依照亚里斯多德所说的严密科学理论的要求，建筑在几个最初的假设（定义、公设、公理）上，由这些假设利用逻辑推论导出后面一切的定理。不仅如此，欧几里得并且示范式地规定了几何证明的方法，主要的便是分析法、综合法和归谬法。因此，欧几里得的“几何原本”，不但在完善和充实上大大地超过了在它以前的所有几何学著作，并且在以后的两千余年间依然没有一部几何著作可以和它比美。直到现在，虽然罗巴切夫斯基有了新的发现，使几何学发生了革命，但中等学校里几何教科书的叙述方法，仍然和我们在“几何原本”里所见到的在实质上没有多大的差别。

欧几里得“几何原本”的基本构造是定义、假设和公理的系统。“原本”共有十三卷，其中1至4、6、11至13卷属于几何本身，其余则讲比例（用几何方式来叙述）和算术。第一卷，包括三角形相等的条件、三角形的边角关系、平行线的理论以及三角形、多边形面积相等的理论。第二卷，叙述了如何把多边形变成等积的正方形。第三卷，叙述了圆的性质。第四卷，讨论了圆的内接和外切多边形。第六卷，论述了相似多边形。在最后三卷中，叙述了立体几何的理论。这些章节，所讲述的是比较纯正的普通的初等几何的材料，有许多在欧几里得时代已经知道的东西（例如圆锥曲线的理论），在“几何原本”里没有提到。

“几何原本”的每卷里，首先给该书中要建立其间相互关系的一些重要概念下了定义。例如在第一卷里首先就列举了23个定义，在这里我们引进其中最先的八个，以便于以后分析研究。

定义1　点是没有部分的。

定义2　线是有长度而没有宽度的。

定义3　线的界限是点。

定义4　直线是这样的线，它对于它的所有各个点都有同样的位置。

定义5　面是只有长度和宽度的。

定义6　面的界限是线。

定义7　平面是这样的面，它对于在它上面的所有直线有相同的位置。

定义8　平面角是位置在一个平面上的两条相交直线相互的倾斜度。

在定义以后，欧几里得引进了公设和公理，很难指出欧几里得的公设与公理之间的差别，以及欧几里得根据什么原则把一些命题称为公设而把另一些命题称为公理，而且在不同的“几何原本”的版本中（从1482年以来，“几何原本”以各国不同的语言出了500版以上），所采用的一些不加证明的命题也时而称为公设，时而称为公理。（注意：公设原词的意义是“要求”，公理原词的意义是“有价值的命题”）。

公　设

1　从每个点到每一个别的点必定可以引直线。

2　每条直线都可以无限延长。

3　以任意点作中心可以用任意半径作圆周。

4　所有的直角都相等。

5　若两直线和第三直线相交且在同一侧构成的两个同侧内角之和小于二直角，则这两条直线就在同侧内角的和小于二直角的那一侧相交。

公　理

1　等于同量的量相等。

2　等量加等量得到等量。

3　等量减等量得到等量。

4　不等量加等量得到不等量。

5　等量的两倍相等。

6　等量的一半相等。

7　能合同的量相等。

8 全体大于部分。

在公理后面，欧几里得叙述几何定理，按逻辑相关性把它们排成次序，使得每一个命题可以根据前面的命题、公设和定理来证明。列举的定义和公理，足够用来作为所有后面定理的严格的逻辑证明的；叫做几何学的（公理法的）根据或基础。欧几里得是第一个提出几何根据的古代数学家，就是这件事使他的数学事业得到了很高的评价。

欧几里得要给他的书里所遇到的所有概念来下定义，这实际上是不可能的。例如“点”、“线”、“面”就是不能下定义的原始概念。所以，在欧几里的“几何原本”里，除了一些有价值的定义外，也有一些定义并没有起定义的作用。例如定义4，直线是关于它的所有各个点都有同样位置的线。这句话可随便怎样解释，可以解释为直线在它所有点处都有同一的方向，但是这样以来，就必须建立“方向”这个概念；也可以解释为，任何直线都可以合同，但是这样以来就必须建立“合同”（或“叠合”、“运动”）这个概念（直线在运动中不会弯曲吗？）。其它如定义1，“点是没有部分的”，这个定义本身并没有什么精确的几何内容，所以在“原本”中连欧几里得本人都不能应用这样的定义。

关于“原本”中公设和公理的列举，要严格按逻辑要求来证明所有以后的定理，这些公设与公理是不够的。例如，在“原本”中虽然欧几里得用到连续性的思想，但在他的公理系统中却没有连续公理，“原本”中第一卷第一个命题就是这样的：“第一命题：在一定直线（应为线段）上作一等边三角形。

设AB是已知的一定直线。要作立在定直线AB上的等

边三角形。

以A为中心，AB为距离画一圆，且以B为中心，BA为距离又画一圆。连结这两圆的交点C与两点A和B（图1—1），由于点A是圆BCD的中心，$AC=AB$；由于点B是圆ACE的中心，$BC=BA$，所以$CA=BC=AB$。因此，三角形

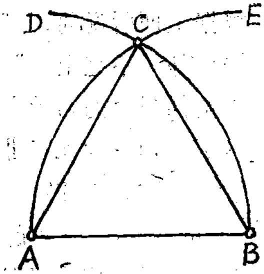

图 1-1

ABC是等边三角形，并且是立在定直线AB上的，这就是所求的”。

在这段论证里，欧几里得是以直观为根据的，他引用了“如果两个圆每一个都通过另一个的内点，则两圆必相交于某一点”这样的事实，然而他却没有以公理的形式加以规定。其他如“在直线上两点之间的点”，“在直线的同一侧的点”，“在多边形内的点”等等，欧几里得公设和公理从没给出任何的规定来作为这些概念的根据。当在某个定理的证明里要用到这些概念时，都是依靠直观感觉。然而，在几何学的严正结构里，每一个命题，如果它不被公理所包含的话，就应该证明，不论它是多么显然。此外，欧几里得的某

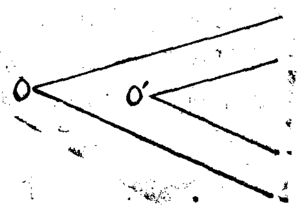

图 1-2

些公理是不够肯定和确切的，例如公理8就是不够确切的。如图1—2，虽然角O'被角O所包含，但由于两角的两边彼此平行，在“原本”中已经证明了“$\angle O=\angle O'$”，这

样的问题很容易引起人们对公理的误解。

根据上面所说的，“原本”中欧几里得的公理体系最重要的缺点是“不完全性”，他的逻辑说服力在许多情形下是由人们空间观念的习惯所保证的。这就是说，“原本”没能够包含了几何学的无可非难的逻辑根据。古代的学者们，已经注意到了欧几里得“几何原本”的缺点，阿基米德(Archimedes，公元前287—212年)就曾扩大了“原本”中的几何公设，增加了长度、面积和体积的测度理论。欧几里得只是确定了长度间、面积间、体积间的比值，而阿基米德则直接给出了实际计算圆面积和球体积的式子。阿基米德共引进了度量几何的五个公设，其中第五个公设在现代几何中我们还经常地应用着。这公设是这样写的：“两条不等的线段，两个不等的面或两个不等的体，其中较小的一个量增加适当的倍数后，可以变成大于较大的一个量。”这个阿基米德的第五个公设在现代几何学中称为阿基米德公理或度量公理，现在这个公理是这样陈述的：“任何两线段a和b，如果$a<b$，则必存在正整数n，使得$na>b$成立”。这个公理是度量几何的理论根据，以后我们还会谈到它。

在阿基米德之后，要求把“原本”的公理体系弄得更完全、更正确的工作仍然在继续着，然而在许多世纪的长时间里并没有增加什么原则性的胜过欧几里得已经做了的工作。直到十九世纪的末期，才在原则上完成了几何学逻辑结构的基础，第一次出现了完备的公理体系，根据这样的公理体系，我们可以不依靠任何的空间观念的直觉性来证明所有的定理。

欧几里得“几何原本”虽然有它的缺点，但并不失掉它

的巨大的历史意义。“原本”是几何学方面最早的经典著作，它是在公理法的基础上，逻辑地创造几何学的先例，为后代数学家指明了正确的方向。特别地，现代数学里处统治地位的公理法，其源流是归之于欧几里得“几何原本”的。

欧几里得以后的古代数学家，为改进欧几里得公理体系进行了两千多年的努力，几乎没有一个古代数学家不在这些方面下过功夫。他们一方面是针对“原本”中逻辑上的缺点的消除，另一方面则是试图证明欧几里得的第5公设（以后也简称为公设5）。

§3 对欧几里得第五公设的试证

从欧几里得时代到十九世纪末期，证明公设5的问题是最流行的问题之一，这在几何学的发展史上占极重要的位置。试图证明公设5的各种各样的尝试，促进了现代公理法的建立并且开创了非欧几何的道路。什么原因唤起了古代数学家们对公设5的试证呢？这有两个主要的方面。第一是由于公设5有较复杂的性质，它在平行线理论中占有基本的地位，如三角形的内角和、相似图形的存在以及三角学等等，都与公设5有关；第二是由于公设5在“几何原本”中应用很迟，欧几里得本人在第26个命题之后用到公设5时，他也尽量地避免了，仅仅在第29个命题的证明中唯一的用过一次，这样，就引起了人们对公设5所确立的真理认为是不明显的，它有可能根据欧几里得的其它公理推导出来。在试证公设5的两千多年的漫长岁月里，虽然都未取得成功，但从此却引出了和公设5等价的一系列命题，并从此建立了罗巴切夫