

第二屆和平利用原子能國際會議文獻

可控制熱核反應

2

G78

中國科學院原子核科學委員會編輯委員會編

科學出版社出版

目 录

P/2215	高温等离子体中高频电磁场的能量吸收.....	(1)
P/2446	天体器热核反应器.....	(9)
P/358	在 B-1 仿星器放电中的“逃逸”电子与合作现象.....	(29)
P/2430	由热核反应产生的自热过程中等离子体的瞬时温度变化.....	(40)
P/1876	在一个环形管内用磁力拘禁等离子体的平衡.....	(43)
P/1368	用 4π 聚焦系统获得热核反应的可能性.....	(55)
P/359	转向器——一个用来降低仿星器中杂质水平的设备.....	(60)

高温等离子体中高频电磁场的能量吸收*

Р. З. 薩格傑耶夫 (Р. З. Сагдеев), В. Д. 沙弗蘭諾夫 (В. Д. Шафранов)

在高温下的等离子体中, 粒子間的碰撞很少, 同时已知的基于利用碰撞的加热机制效率降低。这就在利用高频电磁场的同时发生等离子体“非碰撞加热”的問題。所謂高频场是指具有比保持热等离子体的特殊時間小得多的周期的电磁振荡。

高频场和等离子体的相互作用也可用来得到等离子体的性质(探测)。

这两个問題的解决, 与穿过等离子体的电磁波的研究有关, 与以不同吸收机制为条件的电磁场吸收部分的分析, 以及在等离子体加热中这些机制作用的研究有关。

本文提供了磁场中(迴旋加速器的和契連科夫的)等离子体中的两种非碰撞吸收主要机制的分析。得到了磁场中温度非各向同性分布的等离子体的电容率张量式 $\epsilon_{\alpha\beta}$ 。张量组分 $\epsilon_{\alpha\beta}$ 是以粒子的拉格郎日座标提出的, 此种形式对吸收机构的明显的物理积分很方便。

根据张量 $\epsilon_{\alpha\beta}$ 的应用去解关于使纵向场稳定的等离子体綫柱振荡的問題, 同时要考虑到电荷的热运动。对于同类等离子体, 确定了电磁波分布的频率和方向范围, 在此范围内有迴旋加速器的或契連科夫的吸收机构。正在进行研究在等离子体加热中非直綫效应对电磁波吸收和迴旋加速器及契連科夫吸收作用影响的情况。

1. 任何一种电磁场的吸收机制皆为由电荷形成的能量积蓄, 这种能量积蓄发生在波电场内和不規則运动的内部自由度之間該能量的再分布中。根据物理性质, 吸收机构可以分为非碰撞的机制(共振的)和碰撞的机构(非共振的)。

在沒有散逸作用时, 由电荷形成的能量积蓄可能是在靜止(准靜止的)場中。而高频場中的电荷一般來說进行振荡, 同时周期地收集能量并将其消耗掉。为了有效地加热等离子体, 必須使碰撞之間的时间(即能量散逸的特征時間)能和振荡的周期相比較。吸收的相应机构主要与存在的碰撞有关, 我們称作为非共振的或是碰撞的。此处談到了用普通焦耳热加热和 Г. И. 布克尔(Г. И. Будкер)于 1951 年所提出的“电子感应加速器的”或“迴轉松弛的”(гирорелаксационный)加热, 这种加热方式亦曾为什留捷尔(Шлютер)^[1] 单独提出过。

若碰撞之間的时间大大超越場振荡的周期时, 那么电荷所产生的連續的有效能量积蓄只有当具有共振时才有可能, 波电场的方向在很长时间内才能和电荷所得到的速度的方向一致。这种吸收机制, 我們称作为共振的或非碰撞的。

共振在以下情况中原则上是可能的。若电荷进行周期性的运动, 則当場的频率与此运动的频率相符合时产生共振。对于磁场中的电荷来講, 这就是迴旋加速器共振(电子或离子)。若电荷沿力綫运动的速度等于 v_{α} , 則电荷吸收場的频率由于多普勒效应而由以下关系确定

* “第二届和平利用原子能国际会议文献” 编号 A/CONF/15/P/2215, 原文为俄文。

$$\omega - k_z v_z = \omega_H, \quad (1)$$

式中 k_z 为波矢量的组分; $\omega_H = \frac{eH}{mc}$; m 为电子或离子的质量。

若电荷运动的速度等于电磁波的相速, 即使在沒有周期运动的情况下也能够实现共振。显然, 这种情况仅对被减慢了波是可能的。在沒有磁場时, 由电荷产生的共振能量积蓄, 仅在等离子体的纵向电磁振荡中实现。由电子振荡所造成的相应的吸收定名为兰道衰减 (затухание Ландау)。对于离子(声音的)振荡同样会产生类似的衰减情况。

对于在磁場中的甚为紧密的等离子体来说, 共振在电磁振动的横支綫中也是可能的, 折射率的数量級等于

$$N \approx \frac{\omega_0}{\omega_H}, \quad \text{式中 } \omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n}{m}};$$

因此电磁波的相速度 $v_\phi = \sqrt{H^2/4\pi mn}$ 。波的相速和电荷运动的热速度的比率等于 $v_\phi/v_T = \sqrt{H^2/8\pi p}$ 。这样, 在当等离子体压力 p 接近于磁場压力的条件下, 波速度則成为电荷运动的平均热速度的数量級, 并且与契連科夫輻射(契連科夫吸收^[2])成反比例的吸收机制成为主要的。沿磁場运动的电荷在下列条件下与波場发生共振:

$$\omega - k_z v_z = 0. \quad (2)$$

当 $\omega/k_z < c$ 时, 此条件和条件(1)确定吸收能量的电荷速度。

由于电荷速度的热分散, 产生吸收作用的頻率范围对迴旋加速器吸收和契連科夫吸收来说, 都能成为极其寬大的。

在碰撞和非碰撞加热法之間, 存在着一个由其物理性质而得出的原則性的区别。第一种情况, 由于碰撞起决定性的作用, 在加热过程中, 电荷按速度的分布仍接近于温度上升时的麦克斯韦分布。第二种情况, 当仅是在共振中的电荷收集能量时, 在加热过程中, 电荷按速度的分布, 自然能与麦克斯韦值有很大的区别。在此情况下, “加热”一詞我們了解为电子和离子不規則运动 $(\mathbf{v} - \mathbf{v})^2$ 的平均能量的增加。

2. 电磁場同等离子体的相互作用, 在原理上可用麦克斯韦自洽方程以及等离子体中电子和离子的动力方程来描写。假定波場中电荷有序运动的速度小于平均热速度, 于是这些方程是場的綫性方程。在此情况下, 利用电容率张量 $\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon'_{\alpha\beta} + i\epsilon''_{\alpha\beta}$ 就能很方便地解决很多与振荡的等离子体有关的问题, 张量的反厄密部分 (антиэрмитовская часть) $i\epsilon''_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta} - \epsilon_{\beta\alpha}^*$ 确定吸收。无碰撞时, 若动力方程在粒子的“拉格郎日”坐标中(根据軌道积分)求积分, 則碰撞张量 $\epsilon_{\alpha\beta}$ 可以在一般的式子中明显地表示出来。分布函数的修正值如下式

$$\psi_1 = -e \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \mathbf{E}(\mathbf{r}(\mathbf{r}', t')) + \frac{1}{c} [\mathbf{v}(t') \mathbf{H}(\mathbf{r}(t'), t')] \right\} \frac{\partial \psi_0}{\partial \mathbf{P}(t')} dt' \quad (3)$$

若場按諧波定律 $e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$ 在空間和時間改变时, 則相应的张量 $\epsilon_{\alpha\beta}$ 等于:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha\beta} &= \delta_{\alpha\beta} + i \sum \int_0^{\infty} K_{\alpha\beta}(t) dt \\ \epsilon'_{\alpha\beta} &= \delta_{\alpha\beta} + \frac{i}{2} \sum \int_{-\infty}^{+\infty} K_{\alpha\beta}(t) \operatorname{sgnt} dt \\ \epsilon''_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \sum \int_{-\infty}^{+\infty} K_{\alpha\beta}(t) dt. \end{aligned} \quad (4)$$

根据电荷种类(电子,离子)进行总计。电荷的每一类函数 $K_{\alpha\beta}(t)$ 都由下式给出

$$K_{\alpha\beta}(t) = \frac{4\pi e^2 n}{\omega} \int v_{\alpha}(t) \left\{ \left(1 - \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{\omega}\right) \frac{\partial \phi_0}{\partial p_{\beta}} + \frac{v_{\beta}}{\omega} \mathbf{k} - \frac{\partial \phi_0}{\partial \mathbf{p}} \right\} e^{i(\omega t - \mathbf{k} \int_0^t \mathbf{v}(t') dt')}, \quad (5)$$

式中 $v(t)$ 为通过初速 v 和时间 t 而表示的非扰动等离子体中的电荷运动速度; 根据开始冲量进行积分。在麦克斯韦分布的个别情况下, 大括号中的式子可采用简单形式^[2] $v_{\beta}\phi_0/T$ 。对于沿 z 轴方向的均匀磁场中无碰撞的等离子体,

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_x \cos \omega_H t - v_y \sin \omega_H t, \\ v_y(t) &= v_x \sin \omega_H t + v_y \cos \omega_H t, \\ v_z(t) &= v_z. \end{aligned} \quad (6)$$

公式(5)中指数内的式子将是 $(\mathbf{k} = \{k_x, 0, k_z\})$;

$$\omega t - \mathbf{k} \int_0^t \mathbf{v} dt' = (\omega - k_z v_z) t - \frac{k_x v_x}{\omega_H} \sin \omega_H t = \frac{k_x v_y}{\omega_H} (1 - \cos \omega_H t), \quad (7)$$

若非扰动分布函数 ϕ_0 为具有符合粒子运动平行于和垂直于 $\mathbf{H}_0(T_{\parallel}$ 和 $T_{\perp})$ 的不同温度的麦克斯韦分布的乘积时, 则 x, y ——公式(5)中大括号式子的成分具有下式:

$$v_{\alpha} \left[\frac{1}{T_{\perp}} - \frac{k_x v_x}{\omega_H} \left(\frac{1}{T_{\perp}} - \frac{1}{T_{\parallel}} \right) \right] \phi_0, \quad \alpha = x, y,$$

而 z 的成分:

$$v_z \left[\frac{1}{T_{\parallel}} + \frac{k_x v_x}{\omega_H} \left(\frac{1}{T_{\perp}} - \frac{1}{T_{\parallel}} \right) \right] \phi_0.$$

将这些式子连同式(6),(7)一起代入式(5),(4)以后, 就不难得出张量 $\epsilon_{\alpha\beta}$ 的闭合公式。

在比较低的频率范围 $\omega \lesssim \omega_H$ 的强磁场中, $\epsilon_{\alpha\beta}$ 的式子主要是因 $k_x v_{\perp}/\omega_H$ 指数展开而得到简化。在零近似值 $\omega t - \mathbf{k} \int \mathbf{v} dt = (\omega - k_z v_z) t$ 中, 张量 $\epsilon_{\alpha\beta}$ 表示如下

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \epsilon & ig & 0 \\ -ig & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix} \quad (8)$$

由以下诸式给出了成份 ϵ, g 和 η (同时考虑到可能的非扰动温度的各向异性现象)

$$\begin{aligned} \epsilon &= 1 + \frac{i}{2} \sum \frac{\omega_0^2}{\omega} < \left[1 - \frac{k_x v_x}{\omega} \left(1 - \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} \right) \right] \delta + (\omega - \omega_H - k_z v_z) + \\ &\quad + \left[1 - \frac{k_x v_x}{\omega} \left(1 - \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} \right) \right] \delta + (\omega + \omega_H - k_z v_z) > \\ g &= \frac{i}{2} \sum \frac{\omega_0^2}{\omega} < \left[1 - \frac{k_x v_x}{\omega} \left(1 - \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} \right) \right] \delta + (\omega - \omega_H - k_z v_z) - \\ &\quad - \left[1 - \frac{k_x v_x}{\omega} \left(1 - \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} \right) \right] \delta + (\omega + \omega_H - k_z v_z) > \\ \eta &= 1 + i \sum \frac{\omega_0^2}{\omega} \delta + (\omega - k_z v_z) \end{aligned} \quad (9)$$

(角括号表示平行于磁场的麦克斯韦分布的平均式 $\delta + (x) = \frac{i}{x} + \pi \delta(x)$)。对给定的 ω, k 来说, δ 函数的自变量中的式子决定粒子的速度, 因此这些粒子与波场共振。

与(1)和(2)相比证明,在同时考虑到多普勒效应的迴旋加速器共振中的吸收确定于成份 ϵ 和 g 的虚部份;与沿磁场力线的电荷运动有关的契連科夫吸收确定于 η 虚部分。根据 $\epsilon_{\alpha\beta}$ 张量成分的纵向速度平均后,以下式表示之:

$$\begin{aligned}\epsilon &= 1 + \sum \frac{\omega_0^2}{2\omega} \left\{ 1 - \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} + \left[1 - \left(1 - \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} \right) \left(1 - \frac{\omega_H}{\omega} \right) \right] i \frac{\sqrt{\pi}\omega}{k_z v_{\parallel}} W \left(\frac{\omega - \omega_H}{k_z v_{\parallel}} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left[1 - \left(1 - \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} \right) \left(1 + \frac{\omega_H}{\omega} \right) \right] i \frac{\sqrt{\pi}\omega}{k_z v_{\parallel}} W \left(\frac{\omega + \omega_H}{k_z v_{\parallel}} \right) \right\}, \\ g &= \sum \frac{\omega_0^2}{2\omega^2} \left\{ \left[1 - \left(1 - \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} \right) \left(1 - \frac{\omega_H}{\omega} \right) \right] i \frac{\sqrt{\pi}\omega}{k_z v_{\parallel}} W \left(\frac{\omega - \omega_H}{k_z v_{\parallel}} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left[1 - \left(1 - \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} \right) \left(1 + \frac{\omega_H}{\omega} \right) \right] i \frac{\sqrt{\pi}\omega}{k_z v_{\parallel}} W \left(\frac{\omega + \omega_H}{k_z v_{\parallel}} \right) \right\} \\ \eta &= 1 + \sum \frac{2\omega_0^2}{k_z^2 v_{\parallel}^2} \left\{ i \frac{\sqrt{\pi}\omega}{k_z v_{\parallel}} W \left(\frac{\omega}{k_z v_{\parallel}} \right) + 1 \right\}.\end{aligned}\quad (10)$$

式中 $v_{\parallel} = \sqrt{\frac{2T_{\parallel}}{m}}$; $W(z) = e^{-z^2} \left\{ 1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{t^2} dt \right\}$ 为[3]中所列入的綜合自变量或然率的积分。在电荷的拉摩半径比问题中的横向特性长度小的条件下,(10)中所作的近似值 $\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_H} \ll 1$ 是正确的。在此近似值中不难得到与均匀磁场中等离子体振动有关的一系列问题的答案,甚至当等离子体被限制在垂直于场的方向之时。

现在来研究关于被纵向磁场所稳定的等离子体线柱振荡的问题,同时考虑到电荷的热运动问题。等离子体的压力可能被外场,纵向场和方位场的压力所平衡(由通过表面的纵向电流所形成的)。令振动式为 $e^{i(kz + m\varphi - \omega t)}$ 。麦克斯韦方程式为基本方程式

$$\nabla \operatorname{div} \mathbf{D} - \Delta \mathbf{E} = \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{D}, \quad (11)$$

式中 $\mathbf{D}$ 为电感应矢量: $D_r = \epsilon E_r + ig E_{\varphi}$, $D_{\varphi} = -ig E_r + \epsilon E_{\varphi}$, $D_z = \eta E_z$ 。边界条件是线柱表面的电场切线部分为连续的,并在围绕等离子体线柱的良好导电柱形外壳的表面变为零,以及扰动的等离子体圆柱表面的压力张量的法向部分也是连续的。

电场方程的解以自变量为 $\mathcal{A}_1 r$ 和 $\mathcal{A}_2 r$ 的贝塞尔函数表示。式中 $\mathcal{A}_{1,2} = \left[\eta \left(\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) + ig(ig - \epsilon \lambda_{1,2}) \frac{\omega^2}{c^2} \right] / \epsilon$, 而 $\lambda_{1,2}$ 值确定于方程式 $\lambda^2 + i\lambda \left[g^2 + \left(\frac{k^2 c^2}{\omega^2} - \epsilon \right) (\eta - \epsilon) \right] / g\epsilon + \left(\frac{k^2 c^2}{\omega^2} + \eta - \epsilon \right) = 0$ 。当 $k = 0$ 不考虑热运动时,得到为凯尔别尔^[4]所导出的色散方程式。

现在我们研究离子迴旋加速器的吸收问题。在满足 $k c_1 \omega_H \gg \omega \gg k v_{\parallel}$, $k v_H$ 条件的频率范围内,式中 v_H 为阿尔芬速度(альфвеновская скорость);可以根据 $1/\eta$ 进行分解。若同时省略与磁场压力相比较的线柱边上的等离子体压力时,则色散方程式可写成下式($m = 0$)

$$h_i^2 \alpha a \frac{I_0(da)}{I_1(da)} = 1 - h_e^2 k a \frac{K_0(ka)I_1(kb) + I_0(ka)K_1(kb)}{K_0(ka)I_1(kb) - I_0(ka)K_1(kb)}, \quad (12)$$

式中 $h_i = H_{zi}/H_\varphi$; $h_e = H_{ze}/H_\varphi$;

$$\alpha^2 = \frac{\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon\right)^2 - g^2 \frac{\omega^2}{c^4}}{\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon - k^2};$$

a, b 各为非扰动线柱和外壳的半径。当 $H_\varphi = 0, b = \infty, H_{ze} = H_{zi}$ 和在 ϵ, g 中省略热运动时,此公式方与斯齐克思 (Стикс) 所引证的纵向磁场中“冷”等离子体圆柱振荡公式相符合。

与[4],[5]不同,在(12)中考虑了造成非碰撞迴旋加速器衰减的热运动影响。利用色散方程式可求出确定等离子体中迴旋加速器能量吸收的速度的虚频率部分,于是知道了电磁场算式,就能求出等离子体的总的能量释放。

色散方程式(12)中不包括契连科夫吸收,对于其计算必须考虑到 $1/\eta$ 展开式中的以下诸项。等离子体线柱中契连科夫低频波吸收见[6]。

3. 对圆柱的总色散方程式的分析是极为复杂的。对于均匀等离子体较为简单的情况来讲,首先进行吸收区域的研究是很有意义的。在均匀等离子体中的波衰减确定于折射指数 $N = p(1 + i\mathcal{R})$ 的虚部分。在以上所作的假设 $k_\perp v_\perp / \omega_H \ll 1$ 条件下,非寻常波和寻常波的折射指数 N_1 和 N_2 是同样根据这些公式用 $\epsilon_{\alpha\beta}$ 表示的,并且不计电荷的热运动^[7]。因为横向磁场的分布 $N_1^2 = (\epsilon^2 - g^2)/\epsilon$ (对带有垂直于不变磁场的电矢量的线性能极化波而言), $N_2^2 = \eta$ (对带有沿磁场的电矢量的波而言)。当横向传播 $k_x = 0$ 时, $\epsilon_{\alpha\beta}$ 公式也用不计热运动的式子表示,因之没有吸收现象。但是对于波的完全的横向传播来讲,等离子体中仍存在吸收区域,但这些吸收区域是位于当得出 $\epsilon_{\alpha\beta}$ 算式(10)时所作的假定适用范围以外。这样,相对论性多普勒效应的计算就导致迴旋加速器吸收的现象(包括最高谐波)^[8]。当考虑横过磁场的粒子的热运动,其频率大大超过 ω_H 时,在除掉 $\text{Re} N \gg 1$ 以外的区域,产生契连科夫吸收。这是由于 $\omega \gg \omega_H$, 从而可以认为算式(7)中 $\sin \omega_H t \approx \omega_H t$, 同时对于共振频率可得到 $\omega = k_x v_\perp$, 即契连科夫辐射条件及与之相应的契连科夫吸收条件。当波沿磁场传播时,折射指数平方 $N_{1,2}^2 = \epsilon \pm g$, 这样它就不包括引起契连科夫吸收的分量 η 。当纵向及横向分布时 (当 $\omega \lesssim \omega_H$) 没有契连科夫吸收,这是与在这些方向中不可能有沿动力线运动的契连科夫电荷辐射有关,这正是由这种辐射的理论所得出来的 (当频率 $\omega \gg \omega_H$ 时,对动力线上电荷的“连接性”的概念是不正确的,因此在横向方向中也可能有契连科夫辐射)。

现在我们来确定吸收带的边界,其中 $\text{Im} N \ll \text{Re} N$, 相应地 $\text{Im} \epsilon \ll \text{Re} \epsilon$ 等。根据对 ϵ, g 和 η 的虚部加展开,即可得到折射指数如式 $N = p(1 + i\mathcal{R})$ 。

对纵向传播来说,在 $\mathcal{R} \ll 1$ 的条件下,电子迴旋加速器吸收用公式来说明^[2]:

$$p^2 = 1 + \frac{2c}{v_\parallel} \frac{\omega_0^2}{\omega^2 p} \exp \left\{ - \left(\frac{\omega - \omega_{He}}{\omega} \right)^2 \frac{c^2}{v_\parallel^2 p^2} \right\} \int_0^{\frac{(\omega_{He} - \omega)c}{\omega v_\parallel p}} e^{-t^2} dt \quad (13)$$

$$\mathcal{R} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{c}{v_\parallel} \frac{\omega_0^2}{\omega^2 p^3} \exp \left\{ - \left(\frac{\omega_{He} - \omega}{\omega} \right)^2 \frac{c^2}{v_\parallel^2 p^2} \right\}.$$

在偏分布中,吸收带的边是由电子在 $\omega \ll \omega_{He}$ (这里迴旋加速器的共振吸收已不起作用) 时所引起的契連科夫吸收造成的。假定 $\omega_{0e}^2/\omega_{He}^2 \gg 1$ 和 $\frac{\sin^4 \theta}{\cos^2 \theta} \ll \frac{4\omega_{0e}^4}{\omega^2 \omega_{He}^2}$

$$N^2 = \frac{\omega_{0e}^2}{\omega(\omega_{He} \cos \theta - \omega)} \left\{ 1 + i \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{c}{v_{||} \omega_{0e} (\omega_{He} \cos \theta - \omega)^{1/2}} \frac{\omega^{3/2}}{\cos \theta} \exp \left[-\frac{\omega(\omega_{He} \cos \theta - \omega)}{\omega_0^2 \cos^2 \theta} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{c^2}{v_{||}^2} \right] \right\} \quad (14)$$

在 $(\theta - \frac{\pi}{2}) \gg \sqrt{\frac{m}{M}}$ 条件下对于迴旋加速器共振范围中的离子

$$p^2 = \frac{\omega_{0i}^2}{\omega_{Hi}^2 - \omega^2} \frac{\omega_{Hi}(1 + \cos^2 \theta) \pm \sqrt{\omega_{Hi}^2 \sin^4 \theta + 4\omega^2 \cos^2 \theta}}{2\omega_{Hi} \cos^2 \theta} \\ \mathcal{K} = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{\omega_{0i}^2}{\omega^2} \frac{c}{v_{||} p^3 \cos \theta} \exp \left\{ -\frac{c^2}{p^2 v_{||}^2} \left(\frac{\omega - \omega_{Hi}}{\omega} \right)^2 \right\} \times \\ \times \frac{(1 + \cos^2 \theta) \sqrt{\omega_{Hi}^2 \sin^4 \theta + 4\omega^2 \cos^2 \theta} \pm (\omega_{Hi} \sin^4 \theta + 4\omega \cos^2 \theta)}{2 \cos^2 \theta \sqrt{\omega_{Hi}^2 \sin^4 \theta + 4\omega^2 \cos^2 \theta}} \quad (15)$$

在 $\omega \ll \omega_{Hi}$ 区域的偏分布中,同样具有非碰撞吸收。С. И. 布拉金斯基(С. И. Брагинский) 和 А. П. 卡贊采夫(А. П. Казанцев) 研究了这种吸收。在 $\omega_0^2/\omega_H^2 \gg 1$ 的极为紧密的等离子体中, N^2 的算式中可以略去 1 时,吸收被証明了它仅仅与电子(或离子)压力对磁場压力的一个参数比率有关

$$\eta_e = \frac{8\pi n T_e}{H^2}; \quad \eta_i = \frac{8\pi n T_i}{H^2} \quad (16)$$

我們引用变数 $x = \frac{\omega}{\omega_H}$, $z = \frac{\omega_H - \omega}{\omega p} \cdot \frac{c}{v_{||}}$ 这时例如关系式(11)可以下式表示

$$\frac{(1-x)^3}{x} = 2\eta_e z^3 e^{-z^2} \int_0^z e^{t^2} dt; \\ \frac{pv_{||}}{c} = \frac{1-x}{xz}; \\ \mathcal{K} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \eta_e \frac{x^2}{(1-x)^3} z^3 e^{-z^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{1}{\int_0^z e^{t^2} dt}. \quad (13a)$$

用列举的公式所测定的吸收甚至在等离子体压力比磁場压力小的条件下亦可传布在頻率相当大的范围内。图 1 和 2 中所表示的例子是在不同值 η_e, η_i 情况下,当相应地被

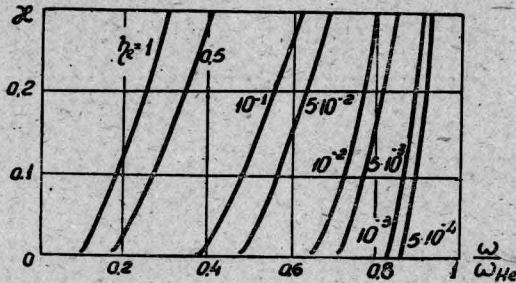


图 1

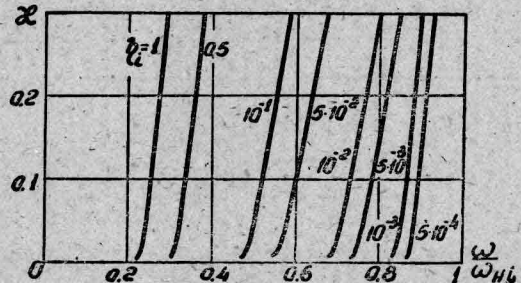


图 2

极化了的电磁波沿均匀磁场传播时电子和离子的迴旋加速器共振吸收带的边缘。由图可知, 吸收带的相对宽度 $\frac{\Delta\omega}{\omega_H}$ 即使在温度比较低的情况下也是非常大的。在 $\eta_c = 10^{-2}$ 时在 $\Delta\omega/\omega_H = 0.3$ 的吸收带中, 进行 10 波长的吸收 (等离子体中波长 $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega_p}$)。如此宽的吸收范围, 如从公式(14), (15)所得出的, 在波的偏传播情况下, 产生在电子和离子的迴旋加速器频率的附近之处。

对于探测等离子体 (活性的或钝化的), 引入注意的是利用在磁场中的高温等离子体特殊的介电性质。一个钝化探测的方法是测量黑体辐射的强度。由所列举的公式和图表可知, 在电子和离子迴旋加速器频率区中, 显然具有宽的“黑度”范围。由 $\epsilon_{\alpha\beta}$ (10) 和 N^2 的算式中得出, 在不计热运动的折射指数大大地超过 1 的宽阔的偏传播中, 产生契連科夫吸收及随之而产生的黑度范围。在 $N^2 = 0$ 区中同样可以预料有特殊的黑度范围, 并且纵向等离子体振动转化为横向电磁波。等离子体边的纵横波之间相联接的各种机制在[9]概述中已讨论过。

在原理上, 根据对吸收范围的形式的研究可进行探测。因为吸收带的宽度与参数 $\eta_{e,i} = 8\pi\rho_{e,i}/H^2$ 有关, 那么这种研究使之能够得到关于等离子体电子或离子成分压力的资料。实际上经常存在的磁场的不均匀性会使这种探测复杂化。

4. 正如我们知道的, 甚至在粒子间没有碰撞时, 波的电磁场能量将有效地被等离子体所吸收。但是我们的线性研究不能够解答关于这种能量在等离子体各个离子(电子)之间的分布情况的问题。显然, 在非碰撞的吸收中等离子体能量的增长无论如何也不能与这个词的一般意义的温度的增长混为一谈。为了解决这个问题, 必须重视非线性近似法。

在波沿磁场传播的情况下, 可以对迴旋加速器共振中吸收的线性研究有某些改善。现在我们来研究近于电子拉摩频率 $\omega_{He} = \frac{eH}{mc}$ 的频率, 这时把离子认为是稳定的。

在电子的动力方程式中, 我们将略去计算波磁场的项。这部分地是由于在具有非扰动的各向同性麦克斯韦分布的普通直线近似法中没有相应的项 (当 $\psi_0(\mathbf{v}) = \psi_0(v^2)$ 时 $[\mathbf{vH}] \frac{\partial\psi_0}{\partial\mathbf{v}} = 0$)。令一切数值都仅与一个沿不变磁场方向的空间坐标有关系。这时问题解答的初步条件:

$$\begin{aligned} \psi(v_x, v_y, v_z, z, 0) &= \psi_0(v_x^2 + v_y^2, v_z^2) \\ E_x(z, 0) &= E_x^0(z) \text{ 及其他, } E_z(z, 0) = 0 \text{ (横向波), 对于方程式} \\ \frac{\partial\psi}{\partial t} + v \frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{e\mathbf{E}}{m} \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{v}} + \frac{e}{mc} [\mathbf{vH}] \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{v}} &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

$$- \text{rot rot } \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi e}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{v} \psi d\mathbf{v} \quad (18)$$

在应用了“轨道积分”后方可得到。

$$\psi(v_x, v_y, v_z, z, t) = \psi_0([v_x - v_1(t, z)]^2 + [v_y - v_2(t, z)]^2, v_z^2) \quad (19)$$

这里

$$v_1(t, z) = \frac{e}{m} \cos \omega_H t \int_0^t [E_x(t', z') \cos \omega_H t' - E_y(t', z') \sin \omega_H t'] dt' +$$

$$+ \frac{e}{m} \sin \omega_H t \int_0^t [E_y(t', z') \cos \omega_H t' + E_x(t', z') \sin \omega_H t'] dt' \quad (20)$$

(类似地表示出 $v_z(t, z)$), $z' = z - v_z(t - t')$.

方程式 (18) 为磁场线性方程式, 并且在纵向速度的初始麦克斯韦分布的情况下, 用富里叶-拉普拉斯法 (метод Фурье-Лапласа) 很容易解出. 已经由 (19), (20) 中看出, $(\mathbf{v} - \mathbf{v})^2$ 值在波衰减的过程中不增加, 即场的全部能量仅仅消耗在等离子体电子有序运动能量的增加上. 这种情况与由高频场中所得到的能量的电子有关, 这些电子经常和场同相, 因而彼此也是同相的. 这样, 与电子在拉摩周长中旋转的相分散有关的电子速度的热分散不改变. 为了使电子有序旋转的能量转变为不规则运动的能量, 必须“搅合”相. 除高温等离子体中很少碰撞外, 沿动力线的磁场的非均匀性能够引起相的混乱, 因为电子以不同的频率 ω_{He} 在不同的地方旋转时, 由于沿动力线的热运动而自行混合.

在上面阐明的迴旋加速器共振的情况下, 能量被沿着具有速度 $v_z = (\omega_H - \omega)/k_z$ 的稳定场而运动的电荷所吸收. 同时横向运动的能量增长, 并且横向速度分布的函数也基本上改变. 因为共振中的粒子数, 确定于纵向速度的分布 (此种分布基本上不改变), 那末吸收就会不断地进行.

在能量吸收的情况下确定电荷共振的按纵向速度的分布也改变时, 则契连科夫吸收就是另一种情况. 此时, 粒子由共振中跑出, 并能使在个别电荷的吸收和辐射之间开始平衡起来. 在数学上当在产生共振 ($v_z = \omega/k_z$) 的速度时它以导数 $\partial \psi_0 / \partial v_z$ 为零表示出来.

关于非线性效应对非碰撞吸收影响问题的分析应作进一步的研究.

最后, 我们对 М. А. 列昂托维奇 (М. А. Леонтович) 院士和 Д. А. 弗兰克-卡敏涅茨基 (Д. А. Франк-Каменецкий) 的宝贵商讨表示衷心的感谢.

参 考 文 献

- [1] Schlüter A. Z. Naturforschg. 1957, 12a, 822.
- [2] Шафранов В. Д., ЖЭТФ (в печати).
- [3] Фаддеева В. Н., Терентьев Н. М., Таблицы значений интеграла вероятностей от комплексного аргумента. ГИТТЛ, Москва, 1954.
- [4] Körper K. Z. Naturforschg. 1957, 12a, 815.
- [5] Stix Th. Phys. Rev., 1957, 106, 1146.
- [6] Сагдеев Р. З., Кадомцев В. Б., Рудаков Л. И., Веденов А. А. Доклад на конференции
- [7] Альперт Я. Л., Гинзбург В. Л., Фейнберг Е. Л. Распространение радиоволн. ГИТТЛ, Москва, 1953.
- [8] Трубников В. А. ДАН СССР, 1958, 118, 913.
- [9] Гершман В. Н., Гинзбург В. Л., Денисов Н. Г. УФН X, 1957, 561.

天体器热核反应器*

N. C. 克里斯托斐洛斯 (Christofilos)**

I. 引言

为了产生大规模的热核反应, 一个用以拘禁等离子体在适当的密度和温度中的理想计划的基本要求, 扼要地说明如下:

a. 在注射任何等离子体之前, 必须首先建立一个磁场模型, 其中的磁力线在真空器内是闭合的。除此之外我们要求这个闭合磁力线的模型与轴对称, 并且在沿方位角的方向没有磁场分量。因此场所产生的漂移和压力梯度都沿方位角取向。这样的漂移不能使等离子体遭受损失。既然这个场模型必须包围产生这模型的电流分布, 建立这些电流的唯一方法是通过带电粒子有组织运动。

b. 除了供给一个闭合磁力线模型之外, 必须用某种手段使中性气体电离成为等离子体, 然后把它加热到燃烧温度。

在天体器 (astron) 反应器内我们预期用一个长圆筒形的近光速的电子薄层可以满足以上的要求。这个转动的近光速电子的薄层 (此后称为 E 层) 是天体器概念的关键性特征。它不仅完成以上的任务, 而且为了求出稳定状态等离子体的平衡解, 它的存在是必要的 (以后我们将要说明)。这平衡解可以满足流体动力学、扩散和麦克斯韦方程式。

这些近光速电子使中性原子电离。只要有形成闭合磁力线的模型, 就可以建立一个等离子体: 形成模型的条件是在 E 层中的近光速电子数必须超过某一临界值。当近光速电子在等离子体中转动的时候, 它们把由于库仑散射失掉的能量传递给等离子体的电子。若是这个能量转移 (对于等离子体是一个能量增益), 比等离子体由于扩散和其它消耗过程产生的损失更大的话, 等离子体的温度就会增加。既然 E 层的电子由于散射不断地失去能量, 它们的寿命是有限的。因此为了维持 E 层, 必须从外边连续的注射电子。

II. E 层的建立

E 层是建立在一个长的柱形器内 (见图 1)。在这器内我们首先用外线圈建立了一个磁场。这磁场的方向基本上是与圆柱的轴平行的, 但是为了反射电子, 它在两头会聚。主要的是为了数学上的便利, 我们要求当电子沿着 E 层运动的时候它们的迴旋半径不变, 尽管它们的方位角动量随着位置变化。若是外场的矢位遵守下面的方程式:

$$A_{\theta} = B_0 \left[\frac{r}{2} + \frac{a}{k} J_1(kr) \frac{\cosh(kz)}{\cosh(kL)} \right] \quad (1)$$

* “第二届国际和平利用原子能会议文献”编号 A/CONF. 15/P/2446 美国, 原文为英文。

** 美国加利福尼亚大学辐射实验室。

就可以满足上述条件。式中 $k=1.84/r_i$, r_i 是 E 层所需的半径, $2L$ 是 E 层的长度, $J_1(kr)$ 是一阶的贝塞耳函数, a 是决定远离 E 层两端的电子的轴向动量和方位动量的比值的一个常数。

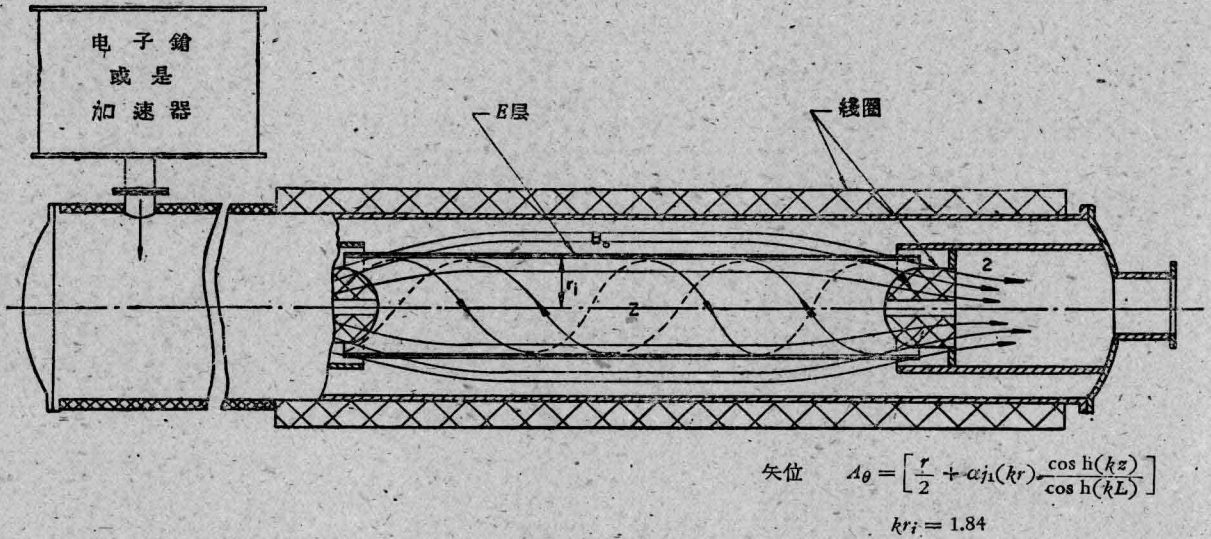


图 1

电子是在 $r = r_i$, $z = L$ 射入的, 它们差不多没有轴向动量。但是在注射点电子遇着一个磁场的径向分量。因此当电子向着圆筒的中心平面运动时, 它们的方位动量也随着改变。在离两头远的位置, 总动量 p 和方位动量 p_θ 的比值是

$$p/p_\theta = 1 + a J_0(kr_i) \quad (2)$$

B_0 的值是由下面的方程式给出的,

$$B_0 = \frac{m_0 c^2}{e r_i} \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{[1 + a J_0(kr_i)]} \quad (3)$$

式中 m_0 是电子的静止质量, γ 是电子的相对论性的质比。

必须选择常数 a 使 $2p_\theta^2/p^2 > 1$ (在远离两端的位置), 不然两端磁场在径向的反聚焦作用会引起不稳定的电子轨道^[1]。这样注射总是给予电子一个相当大的轴向动量; 由于它自己的磁场的压缩力, 这就成为一个轴向压力, 并且防止在轴向 E 层的崩溃。我们假定 E 层的静电荷被正离子中和了。

既然, 为了维持 E 层, 在建立稳定状态以后我们必须不断地注射电子, 我们需要一种技术使我们能够从外边注射到磁场依时守恒的区域。这个任务是这样完成的: 我们用配合的驻波和行波使由外用短脉冲周期地注射的电子在一个行波的谷内受到拘禁, 这样就形成了一个转动的电子环, 并且这样就可以把它们不可逆地注射到应该建立 E 层的区域; 这个注射方法的详述超过本文一般说明的范围。此后当另撰论文讨论。

当每一束或每一环电子被注射到 E 层区域时, 每单位长度 E 层的电荷增加了。转动的电荷成为一个电流, 它在 E 层所包围的体积中形成一个对外磁场反向的磁场。因此在这体积中磁场的净值随着 E 层电荷的增加不断地减小。当在 E 层中每一厘米长度的电子数达到一个临界值 N_0 时,

$$N_0 = \gamma / r_e, \quad (4)$$

(式中, r_e 是經典电子半径) 在远离两端被 E 层包围的体积中的磁場就会降低到零。此时再略微增加层的单位长度上的电荷可以使在被包围体积中的場反向。在那时外場配合着 E 层的場給出閉合磁力綫的模型。

III. 原始等离子体的形成

只要建立起来了閉合磁力綫的模型就可以在它里面集中等离子体。注射到器具内的中性粒子, 当它們經過 E 层区域的时候就电离了。在电离过程中释放出来的电子也获得了几个电子伏的动能。当电离过程在繼續下去和等离子体在建立起来的时候, 它的原始温度不是零而是几个电子伏。但是这温度还要增加, 因为由于庫仑散射近光速电子失掉的能量轉移給等离子体的电子。

熟知的貝特公式給出近光速电子能量的损失:

$$\dot{\gamma} = -4\pi r_e^2 n_0 c \ln \bar{A} \quad (5)$$

式中 n_0 是等离子体的电子密度, $\bar{A}$ 是最大与最小相互作用距离的比值。在方程式 (5) 中我們假定了电子速度是等于 c 。那么每一个等离子体电子的能量增益是

$$\dot{u} = V_0 \frac{N_0 \sigma_0 c}{a \pi r_0^2} \quad (6)$$

式中, $V_0 = m_0 c^2 / e$, N_0 是层的每一厘米长度上的电子数, $\sigma_0 = 4\pi r_e^2 \ln \bar{A}$, r_0 是等离子体的半径,

$$a = \frac{2}{r_0^2 n_0} \int_0^{r_0} n r dr, \quad (6a)$$

n_0 是近 E 层等离子体电子密度, u 和 V_0 是用同一单位表示的。

只要橫切磁力綫的扩散和其他过程的损失率比 $\dot{u}$ 小些, 等离子体的温度 (必然) 繼續上升。这些损失率与能量增益的对比将要在本文的第六节中討論。可是我們認識到能量增益是与层的每单位长度上的电荷成正比, 后者根据方程式 (4) 又与 E 层电子的相对論性的質比成正比。

IV. 等离子体的平衡

当等离子体的温度开始上升的时候, 等离子体的压力也在上升。既然最后閉合的磁力綫是等离子体的边界, 在这边界上的压力是零。所以在橫切磁力綫的方向产生了一个压力的梯度。因为有这么个压力梯度, 等离子体开始向外扩散, 并且产生了一个霍耳电流; 这电流垂直于 B (磁場), 使压力梯度得到平衡。霍耳电流又修改了閉合磁力綫的模型, 这个变化有增加磁場強度的趋势; 因而在等离子体压力上升的时候閉合磁力綫的模型变为更密。当然在等离子体压力增加的时候, 我們也必須加强外磁場, 使在远离两端的区域中, 下面的方程得到滿足,

$$B_0^2 = 8\pi p + B_e^2 \quad (7)$$

式中, p 是等离子体的最大压力, B_e 是层表面上的磁場, B_0 是 (远离两端的) 外磁場。于是发生了一个問題: 在这些情况之下究竟有没有一个无矛盾的等离子体的平衡呢? 为了解决这个問題, 我首先假設了在远离两端垂直于对称軸的一个平面内的等离子体的截面里, 在未知半径 $r_i < r_0$ 的位置, 磁場 (的強度) 經過零值 (r_0 是等离子体圓柱边界的半径)。

另外我們假設了經過 $r = r_i$ 和 $r = r_0$ 之間的截面的磁通量等于經過 $r = 0$ 和 $r = r_i$ 之間的截面的磁通量,但是方向相反;與系統的大小對比拉莫爾半徑是可以忽略的。然後借助於流體動力學、擴散、和麥克斯韋方程式,對於遠離兩端的圓柱部分我們得出了一種解答。對於整個體積包括兩端我們已經求得了這些無矛盾平衡解當中的一個。這個解的詳細推导在附錄 I 中示出。在這例子中矢位的解是

$$A_\theta = B_0 [c_1 J_1(k_1 r) + c_2 J_1(k_2 r)] \frac{\cosh(kz)}{\cosh(kL)} + A(r) \quad (8)$$

其中

$$A(r) = \frac{B_0}{2\lambda r} e^{-\lambda r^2}, \quad \text{設 } r < r_i$$

$$A(r) = \frac{B_0}{2\lambda r} e^{\lambda(r^2 - r_0^2)}, \quad \text{設 } r_i < r < r_0$$

B_0 是遠離兩端的外磁場, λ 是一個參量。

這解要求在 $r = r_i$ 有一個場的突變或是場的跳躍,從 $-B_0 e^{-\lambda r_i^2}$ 到 $+B_0 e^{-\lambda r_i^2}$ 。僅當有一個轉動帶電粒子的薄套,在它的厚度範圍內場的值經過零,這個突變才能實現。為了別的原因, E 層的存在允許這解的存在。即使沒有人得出上述數學的解以前假設過有這 E 層,研究這個平衡解也會導致這層的發現。

作為一個表數的例子,我們算出了等離子體的形狀、它的壓力分布和磁場,其結果由圖 2 和圖 3 的曲線示出。圖 2 示出經過一個對稱軸平面上的截面。同時示出磁力綫(也就是等壓綫)和在兩頭的等離子體的形狀。 $p = 0$ 的綫是最后閉合的磁力綫。所以它是

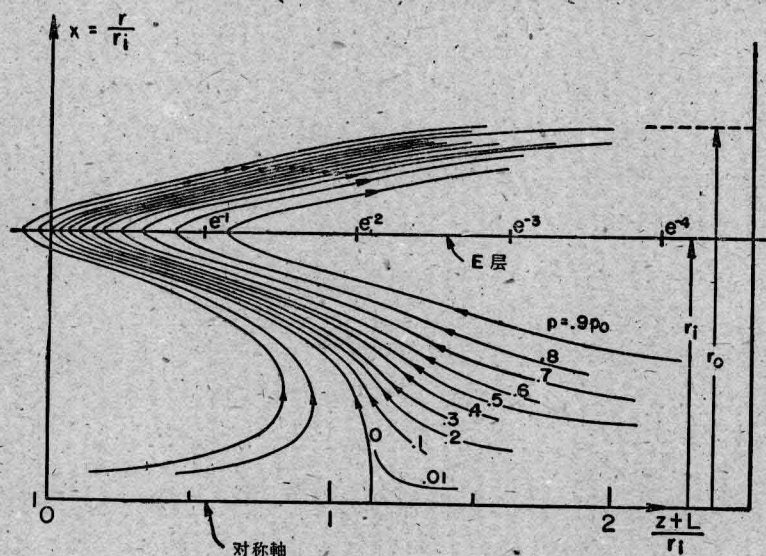


圖 2

等離子體的邊界。正在邊界綫外面的一條綫是不閉合的,它沿着軸向外伸出。在圖 2 中有兩條這樣的綫。等離子體向外擴散,由於這些綫的引導形成了兩個准直束(一頭一個)。於是,在仿星器 (Stellarator) 中所需的轉向器,就為天體器反應器本身所具備了。除了在 $p = 0$ 綫和對稱軸交叉的兩個奇異點之外,上面給出的解在等離子體的內外都是連續的。既然外邊沒有等離子體,矢位解所要求的電流是由實質綫圈供給的。在這裡必須注意到:

既然等离子体以固定的速度經开着的綫轉向, 例如图 2 中在 $p = 0$ 和外边最后一条綫之間, 所以在这区域内压力尽管是很小的, 它还是有限的, 也不完全等于零。因此在这区域内等离子体供給一点电流; 这样, 实质綫圈可以放在图 2 所示最后一条綫的外边。

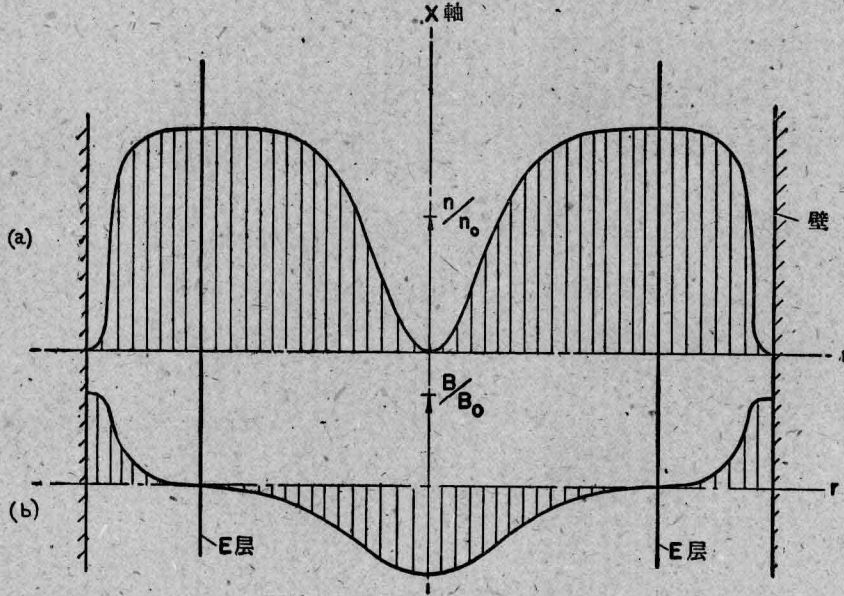


图 3

图 3 示出在垂直于对称軸(远离两端)平面上的一个等离子体的截面。在上图(3a)中划出了密度作为半径函数的曲线。我們看出在对称軸上和在边界上压力是零, 而它的最大是在 E 层区域内。如图(3b)示出磁場的分布。既然在等离子体的体积中磁場反向, 我們給予数量 β 一个定义:

$\beta = \frac{8\pi p}{B_0^2} = 1$. 此外因为最大压力不在对称軸上, 我們取数量 η 为:

$$\eta = \frac{2}{n_0^2 r_0^2} \int_0^{r_0} n^2 r dr, \quad (9)$$

η 与热核反应率成正比, 它比抛物綫分布中的反应率大約要大三倍。

在上解中 $\nabla \cdot (\rho v)$ 不等于零。实际上在 $0 < r < r_i$ 的区域 $\nabla \cdot (\rho v) = -S$, 在 $r_i < r < r_0$ 的区域 $\nabla \cdot (\rho v) = +S$. 若是我們假定在 E 层区域中所有的扩散粒子为电离的中性粒子所代替, 我們怎样可以实现解所需要的源头和尾閘呢? 更进一步的研究使我們認識这些源头和尾閘自动地相互抵消了, 即

$$\int_0^{r_0} S r dr = 0. \quad (10)$$

既然在等离子体中没有实质的源头和尾閘, 实际发生的过程是这样的: 在里面 (在 $0 < r < r_i$ 的区域) 因为没有尾閘, 密度有以速率 S 上升的趋势。但是在 E 层以外沿着同一磁力綫密度会有以同一速率下降的趋势。密度的变化率是很慢的, 在粒子沿着一条 (磁力) 綫完成旅行一周所需的时间內它是可以忽略的。这密度变化的結果是沿着这些綫形成了一个小的压力梯度, 在里面多余的粒子在外面同一綫上出現为一个源头。因此粒子在内部区域消失, 形成了一些虛尾閘, 而在外面再出現为源头。

V. 等离子体的稳定性

在証明了一个平衡解的存在之后,我們要研究这个平衡解对于小的微扰的稳定性. 可能的微扰我們可以区分为两类.

1. 由于磁力綫被傾斜的微扰,即阿耳芬(Alfvén)波沿着磁力綫传播的微扰. 在这情况之下,我們可以用沿着磁力綫前进的一个坡印廷(Poynting)矢量 $\mathbf{P}$ 来形容这微扰. 这条件可以表达为

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{P} \neq 0. \quad (11)$$

2. 第二类的特征是沿着磁力綫沒有坡印廷矢量,即

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{P} = 0. \quad (12)$$

既然在第一类中磁力綫受到傾斜而这只能是由于微扰的能量消失,第二类微扰的危险性似乎更大. 因此在本文中我們把大部分的注意力放在第二种微扰上.

以 E 和 h 各为微扰的电場和磁場. 那末方程式(12)可以写为

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{E} \times \mathbf{h} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{h} \times \mathbf{B} = 0 \quad (13)$$

若是 $E = 0$, 方程式(13)可以得到滿足. 但是只在等离子体沿着場綫有輕微的运动或是它有輕微的轉动的时候,这条件才是可能的. 所以讲得通的情况是

$$\mathbf{B} \times \mathbf{h} = 0. \quad (14)$$

这情况是以簡正方式(normal mode)分析来处理的(参考附录 II 的說明). 为了这样的分析,我們假定微扰是这一类型的

$$\hat{q} = q(r, z) \sin(m\theta) e^{\omega t}. \quad (15)$$

式中 $\hat{q}$ 是任何微扰量. 由此我們从綫性化的流体磁力学方程式得出

$$E_\theta = \frac{1}{r} \phi(rA_\theta) \cos(m\theta) e^{\omega t}. \quad (16)$$

和

$$v_\theta = rf(rA_\theta) \sin(m\theta) e^{\omega t}. \quad (16a)$$

式中 E_θ 和 v_θ 各为在方位向的电場和微扰速度, f 和 ϕ 是通量 $\psi = rA_\theta$ 的任意函数. 根据更进一步的研究(参考附录 II), 我們断定在对称軸上 E_θ 和 $f(rA_\theta)$ 都等于零. 既然沿着一条磁力綫 rA_θ 是不变的,那么在边界表面上的任何一点 E_θ 都是等于零. 由此可見这一类的微扰是一个内部运动,而表面依然是靜止的. 这是因为所有的边界綫經過对称軸折回. 当我們离开末端很远的时候,通量 rA_θ 很快地簡并,成为一个只依赖于半径的函数. 对于 f 和 ϕ 也是这样,微扰簡并为

$$\hat{q} = q(r) \sin(m\theta) e^{\omega t}$$

的类型. 我們更詳細地研究了这个微扰. 若是我們規定一个新量 $\omega = \hat{p} + (B \cdot h/4\pi)$, 其中 $\hat{p}$ 是微扰压力,从綫性化的方程式,我們得出(参考附录 II)以 ω 为变数的二阶微分方程式:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{\partial \omega}{r \partial r} - \frac{\partial \omega}{\partial r} \cdot \frac{\partial \rho}{\rho \partial r} - \left(\frac{\omega^2}{S^2} + \frac{m^2}{r^2} \right) \omega = 0, \quad (17)$$

式中, ρ 是平衡密度,

$$S^2 = \frac{B^2}{4\pi\rho} + \frac{\gamma p}{\rho},$$

S 是媒质的音速。

只要微扰速度不依时守恒, 对于任何微扰方程式 (17) 是适用的。在这情况之下, $\omega = 0$ 。但是等离子体容易受到转动, 因为角动量不断地由 E 层转移到等离子体的电子。这个角动量不可能被转移到壁上去, 因为磁力线本身是闭合的。所以闭合磁力线的模型同等离子体一起转动。当等离子体的粒子向开着的磁力线扩散的时候, 等离子体的角动量就转移到外边去了。等离子体的角动量对于 E 层的角动量的比率和等离子体的一个粒子的平均寿命对于 E 层的一个电子的平均寿命的比率是一致的。由于这个转动, 考虑依时守恒的速度是无意义的, 因为任何径向位置的改变意味着离心力的改变。但是在稳定性的计算中, 在其他方面我们没有考虑这个转动的问题。

我们曾经彻底地研究过方程式 (17), 并发现若是在两个不同的 r 值 $E_0 = 0$ 的时候, ω^2 可能有的本征值总是负的; 这意味着稳定性。根据方程式 (17) 的解, 我们可以算出所有的微扰量, 并且可以反演这些解, 变换为 rA_0 的函数。对于 $B \times h = 0$ 类型的微扰, 我们可以得出所有微扰量的一般解。此后我们可以用曲线坐标写下线性化的流体磁力学方程式, 并把所得的解引入这些方程式。如果不能满足这些方程式, 那就意味着 $B \times h = 0$ 类型的微扰在天体器几何中是不可能的; 如果可以满足, 那就说明微扰是可能的, 但是只有稳定方式 (stable modes) 是可容许的。因此我们断定 $B \times h = 0$ 类型的微扰在天体器几何中或者是可能的和稳定的, 或者是完全不存在。那么余剩的只有

$$B \cdot P \neq 0$$

类型的微扰。为了考查这个微扰, 我们用曲线坐标写出了线性化方程式。此后可以看出, 由于阿耳芬 (Alfvén) 波的机构, 我们在运动方程式中添了几项, 并且它们的贡献是稳定性的。但是在任何位置, 若是磁力线向着等离子体呈现凹形, 它们就会助长不稳定性。这些方程式的直接简正方式的解, 如果是可能有的话, 也是极端困难的。所以, 似乎只能用能量原则才能估计这类型的微扰。对于这个研究普林斯顿工作组的能量原则^[2] 似乎是最合宜的。但是需要某些符合于天体器几何的修正。现在我们正在研究这个问题, 其结果以后将另行报导。

最后我要注明第一类型的微扰 ($B \times h = 0$) 包括所谓笛形 (flute) 的不稳定性和一般的微扰, 其中磁力线沿着平行于本身的方向移动。我们认为这些微扰是最危险的, 并且断定对着这种微扰天体器几何是稳定的。

VI. 在等离子体加热过程中能量的平衡

等离子体的主要能量损失是扩散和轫致辐射。在低温下 (小于一千伏) 第一种是主要的, 而在一万伏以上, 第二种是更重要的。扩散率依赖于整个等离子体中的压力和场的分布; 后者又与所选择的特殊平衡解有关。我们选择了 (本文) 第四部分所讨论的解, 认为它是简单的, 并且可以帮助我们获得等离子体平衡的一个清楚的图形。但是作为一个实际的解它是有些不真实的。原因是我们假定了正在 E 层的外面和正在里面的磁场是相等的。实际上这是不可能的, 因为这需要在 E 层内有无穷大的电荷。而且我们假定了所有的新离子都是在 E 层区域中产生的。这只能在等离子体刚开始形成的时候才是正确的。因此为了计算扩散的损失, 我们需要一个没有上述限制条件的平衡解。

我们并不认为下面的计算是准确的; 计算的目的是要指出用近光速电子来加热一个