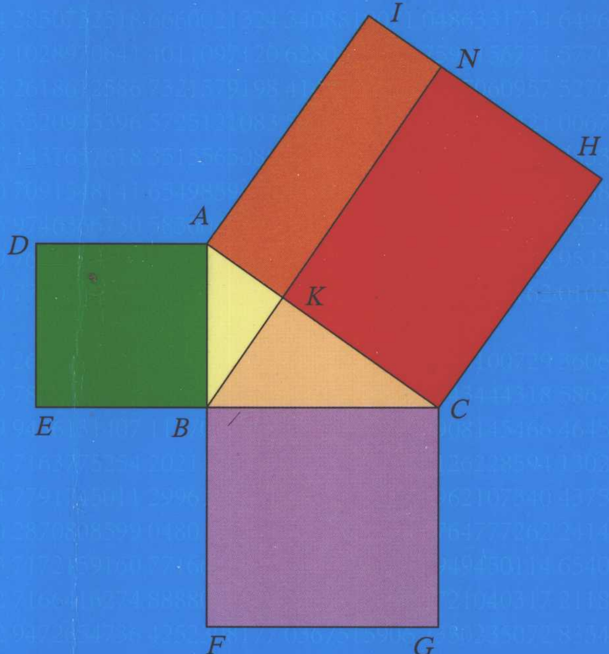
挑战高考数学压轴题

文卫星　编著

华东师范大学出版社



挑战高考数学压轴题

文卫星 编著

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

挑战高考数学压轴题/文卫星编著. —上海:华东师范大学出版社,2010.5
ISBN 978-7-5617-7743-5

Ⅰ.①挑… Ⅱ.①文… Ⅲ.①数学课—高中—解题—升学参考资料 Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第087000号

挑战高考数学压轴题

编　　著　文卫星
策　　划　倪　明(数学工作室)
组稿编辑　应向阳
审读编辑　徐惟简
装帧设计　高　山

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路3663号　邮编200062
电话总机　021-62450163 转各部门　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537(兼传真)
门市(邮购)电话　021-62869887
门市地址　上海市中山北路3663号华东师范大学校内先锋路口
网　　址　www.ecnupress.com.cn

印 刷 者　江阴天海印务有限公司
开　　本　787×1092　16开
印　　张　10.5
字　　数　270千字
版　　次　2010年8月第1版
印　　次　2010年8月第1次
印　　数　1—16000
书　　号　ISBN 978-7-5617-7743-5/G·448
定　　价　19.00元

出 版 人　朱杰人

前言

这是一本供高三同学复习迎考、研究压轴题，挑战满分的书！

高考压轴题通常是指解答题的最后两题中的部分较难的小题或客观题中部分较难的题目，它们的功能是突出选拔性.

客观题中的难题知识点可以是高中数学的各个分支，而解答题的难题则主要集中在函数与导数、数列和解析几何三大分支，每个分支都可以涉及不等式，尤其是放缩法使得有些试题的难度较大. 以下是 2008 年（统计 36 套），2009 年（统计 39 套）、2010 年（统计 35 套）压轴题中最后三题考点分布情况：

年　份	函　数	数　列	解析几何	导　数	其　他
2008 年	6	26	35	27	14
2009 年	7	26	37	31	16
2010 年	8	13	33	27	24

注：其中函数内容为：函数基本性质（不涉及导数）；其他部分的内容为：立体几何、概率与统计；这些试题大多数是安排在倒数第 3 题.

本书分上、下两篇，第一篇是解答题，第二篇是客观题. 解答题分函数、数列、解析几何与导数四章. 客观题根据解法特点分为 9 章. 本书选题主要是 2008 年、2009 和少量 2010 年全国各地高考题中的思想性、方法性强的典型试题，按“分析与解、解题反思、发散训练”的形式展开.

分析与解——分析每种方法是怎么想起来的，在遇到困难的时候应该如何突破，结合具体问题谈一些思维方法.

解题反思——指出容易失误（思维不缜密或运算易错处）的地方以及原因，分析到某一步卡住（思想方法有偏差或技能技巧不熟练）的原

因，并提出解决办法.

同时，引导读者注意对一些看似平淡问题的追根求源，对某些考题适当拓展，培养读者的探究性能力，还针对本题所涉及的典型思想方法和技能技巧进行评析，等等.

发散训练——给出与考题相近的问题以便练习、巩固、提高. 每题都给出详细的解答，以方便自学.

这些题目往往是题海战术无法企及的，解答这些题目不仅需用扎实的数学基础知识，更需要数学思想方法(有时要在哲学思想指导下)的指引和顽强的意志以及良好的心理素质.

解答压轴题不仅是高考的需要，也是培养综合运用所学知识解决问题和创新能力的需要，它能教会你在遇到陌生问题时要以什么样的心态对待，以什么样的方法进行怎么思考，即使不能完全做对，也要充分展示自已的实际水平.

解答压轴题的途径：

1. 认真审题——条件预示可知并启发解题手段，结论预告需知并诱导解题方向.

2. 解题实践——沟通已知与需知. 由已知能得到什么，结论需要什么，如果由已知条件能直接得到结论，则解题成功. 如果由条件不能直接得到结论，就要转化，可以是数形结合，可以是恒等变形，可以构造模型，……各种思想方法在此大有用武之地.

当解题不能进行的时候，回到已知！已知条件本身是解这道题的信息源，凡是结论需要而条件没有给出的一定是隐含的，要仔细挖掘.

3. 等价转化——转化必须等价，因此前一步到后一步往往会有附加条件约束，它是正确解题的前提，也是检验的依据，必须充分重视.

4. 规范书写——逻辑层次清楚，表达简略得当.

5. 几点注意——数学考试的偶然性较大，有些问题必须特别注意：

(1) 毅力在解题中的作用十分重要.

(2) 心理因素对考试的影响值得关注.

(3) 准确运算，减少各种“低级错误”是提高正确率的重要途径.

本书在写作过程中得到华东师大第二附属中学任念兵老师的悉心帮助. 上海市行知中学特级教师赵传义、江苏省锡山高级中学特级教师、教授级高级教师杨志文、北京市(北京市宏志中学)骨干教师王芝平、北京一中王坤、上海市闵行中学曹东辉、上海莘庄中学徐辉等老师审阅了部分书稿，在此谨向他们表示衷心感谢！

由于水平有限，书中肯定有些不足或错误，敬请读者批评指正.

文卫星

2010.6 于上海市七宝中学

目录

上篇 解答题

下篇 客观题

训练题详解

上篇 解答题

第 1 章 函 数

函数综合题通常是指函数的定义域、对应法则(可以是解析式、也可以是图象和表格)、单调性、奇偶性、周期性等内容的综合考查.涉及到的具体函数主要有正比例函数、反比例函数、一次函数、二次函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、以及它们的和函数与积函数等.应用问题也常以函数内容呈现.

在这部分,起到压轴作用的试题又往往都涉及不等式等知识.

§1.1 函数性质

近年以三角函数为载体考查函数、不等式性质以及求最值的考题时有出现.

例 1 (10·上海理)若实数 x、y、m 满足 $|x-m|>|y-m|$,则称 x 比 y 远离 m.

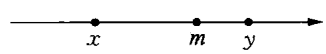
(1) 若 x^2-1 比 1 远离 0,求 x 的取值范围;

(2) 对任意两个不相等的正数 a、b,证明:a^3+b^3 比 a^2b+ab^2 远离 $2ab\sqrt{ab}$;

(3) 已知函数 $f(x)$ 的定义域 $D=\left\{x \middle| x\neq\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4},\ k\in\mathbf{Z},\ x\in\mathbf{R}\right\}$. 任取 $x\in D$,$f(x)$ 等于 $\sin x$ 和 $\cos x$ 中远离 0 的那个值. 写出函数 $f(x)$ 的解析式,并指出它的基本性质(结论不要求证明).

【分析与解】

条件“$|x-m|>|y-m|$,则称 x 比 y 远离 m”的几何意义就是数轴上 x 对应的点比 y 对应的点离 m 对应的点远(如图). 于是



(1)的条件等价于 $|x^2-1|>1$,解得 $x\in(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$.

(2) 因 a、b 是不相等的正数,所以 a^3+b^3 比 a^2b+ab^2 远离 $2ab\sqrt{ab}$ 等价于 $|a^3+b^3-2ab\sqrt{ab}|>|a^2b+ab^2-2ab\sqrt{ab}|$.(*)

又由 a、b 是不相等的正数,知 $a^3+b^3>a^2b+ab^2$,且 $a^2b+ab^2>2ab\sqrt{ab}$.

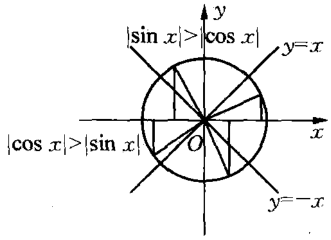
从而(*)等价于:$a^3+b^3-2ab\sqrt{ab}>a^2b+ab^2-2ab\sqrt{ab}$,

即:$a^3+b^3>a^2b+ab^2$.

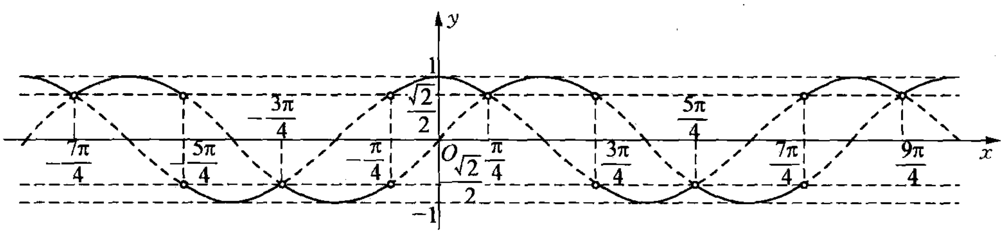
又 $a^3+b^3-(a^2b+ab^2)=(a-b)^2(a+b)>0$,

故 $|a^3+b^3-2ab\sqrt{ab}|>|a^2b+ab^2-2ab\sqrt{ab}|$,

所以 a^3+b^3 比 a^2b+ab^2 远离 $2ab\sqrt{ab}$.



(3) “$f(x)$等于 $\sin x$ 和 $\cos x$ 中远离 0 的那个值”等价于“$f(x)$等于$|\sin x|$和$|\cos x|$中的最大值”，根据单位圆中的三角函数线(或三角函数图象，如图)知道，当 $x\in\left(k\pi+\dfrac{\pi}{4},\ k\pi+\dfrac{3\pi}{4}\right)$ $(k\in\mathbf{Z})$ 时，$|\sin x|>|\cos x|$，当 $x\in\left(k\pi-\dfrac{\pi}{4},\ k\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)$ $(k\in\mathbf{Z})$ 时，$|\cos x|>|\sin x|$，于是 $f(x)=\begin{cases}\sin x & x\in\left(k\pi+\dfrac{\pi}{4},\ k\pi+\dfrac{3\pi}{4}\right)\ (k\in\mathbf{Z}),\\ \cos x & x\in\left(k\pi-\dfrac{\pi}{4},\ k\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)\ (k\in\mathbf{Z}).\end{cases}$



从图象中可以看出：$f(x)$是非奇非偶函数；$f(x)$的最小正周期 $T=2\pi$；

当 $x=2k\pi$ 或 $x=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$ 时，$f(x)$取得最大值 1，当 $x=2k\pi+\pi$ 或 $x=2k\pi-\dfrac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$ 时，$f(x)$取得最小值-1；

$f(x)$的单调递增区间为：$\left(2k\pi-\dfrac{\pi}{2},\ 2k\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\left(2k\pi-\dfrac{\pi}{4},\ 2k\pi\right]$，$\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{4},\ 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right]$，$\left[2k\pi+\pi,\ 2k\pi+\dfrac{5\pi}{4}\right)$ $(k\in\mathbf{Z})$；

$f(x)$的单调递减区间为：$\left[2k\pi,\ 2k\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\left[2k\pi+\dfrac{\pi}{2},\ 2k\pi+\dfrac{3\pi}{4}\right)$，$\left(2k\pi+\dfrac{3\pi}{4},\ 2k\pi+\pi\right]$，$\left(2k\pi+\dfrac{5\pi}{4},\ 2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$.

【解题反思】

1. 条件“x 比 y 远离 m”是题目中的临时定义(又称自定义)，针对“$|x-m|>|y-m|$”画图有助于深刻理解题意，这是解题的前提.

2. 第(3)题的解答过程中，数形结合思想一直伴随其间：从写出函数解析式到写出函数的性质. 一旦画出图象，以下就是书写的功夫，一定要注意数形结合思想的灵活运用.

3. 函数的性质一般指：定义域、值域(最值)、奇偶性、单调性、周期性.

【发散训练】

1. 在原题设条件下，解答：已知函数 $f(x)$的定义域 $D=\{x\mid x\neq k\pi,\ k\in\mathbf{Z},\ x\in\mathbf{R}\}$. 任取 $x\in D$，$f(x)$等于 $1+\sin x$ 和 $1-\sin x$ 中接近 0 的那个值. 写出函数 $f(x)$的解析式，并指出它的奇偶性、最小正周期和单调性(结论不要求证明).

例 2 （09·上海春考）设函数 $f_n(\theta)=\sin^n\theta+(-1)^n\cos^n\theta$，$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$，其中 n 为正整数.

（1）判断函数 $f_1(\theta)$、$f_3(\theta)$ 的单调性，并就 $f_1(\theta)$ 的情形证明你的结论；

（2）证明：$2f_6(\theta)-f_4(\theta)=(\cos^4\theta-\sin^4\theta)(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$；

（3）对于任意给定的正整数 n，求函数 $f_n(\theta)$ 的最大值和最小值.

【分析与解】

（1）$f_1(\theta)$、$f_3(\theta)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上均为单调递增的函数. 函数 $f_1(\theta)=\sin\theta-\cos\theta$，

设 $0\leqslant\theta_1<\theta_2\leqslant\frac{\pi}{4}$，则 $\sin\theta_1<\sin\theta_2$，$\cos\theta_2<\cos\theta_1$，所以

$$f_1(\theta_1)-f_1(\theta_2)=(\sin\theta_1-\sin\theta_2)+(\cos\theta_2-\cos\theta_1)<0,$$

即 $f_1(\theta_1)<f_1(\theta_2)$，所以函数 $f_1(\theta)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增.

用定义判断函数单调性是有效的方法. 其关键是判断差的符号.

（2）原式右边 $=\sin^6\theta+\cos^6\theta-\sin^2\theta\cdot\cos^4\theta-\sin^4\theta\cdot\cos^2\theta$，

$$\begin{aligned}\text{原式左边}&=2(\sin^6\theta+\cos^6\theta)-(\sin^4\theta+\cos^4\theta)\\&=\sin^6\theta+\cos^6\theta+(\sin^2\theta+\cos^2\theta)(\sin^4\theta+\cos^4\theta)\\&\quad-\sin^2\theta\cdot\cos^4\theta-\sin^4\theta\cdot\cos^2\theta-(\sin^4\theta+\cos^4\theta)\\&=\text{右边}.\end{aligned}$$

（2）有多种证明方法.

（3）求函数在闭区间上的最值，最基本的方法是利用函数的单调性. 我们首先来判断这个函数的单调性.

由（1）知当 $n=1$，3 时，$f_n(\theta)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增，最大值为 $f_1\left(\frac{\pi}{4}\right)=f_3\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$，最小值 $f_1(0)=f_3(0)=-1$.

$n=2$ 时，$f_n(\theta)=1$ 不是单调函数，当 n 为偶数时，

$$f_n(\theta)=\sin^n\theta+\cos^n\theta\leqslant\sin^2\theta+\cos^2\theta=1.$$

因此知道需要分 n 为奇数和偶数分别求最值.

猜想，当 n 为奇数时 $f_n(\theta)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上为增函数.

设 $0\leqslant\theta_1<\theta_2\leqslant\frac{\pi}{4}$，则 $0\leqslant\sin\theta_1<\sin\theta_2<1$，$0<\cos\theta_2<\cos\theta_1\leqslant1$，

从而，$\sin^n\theta_1<\sin^n\theta_2$，$\cos^n\theta_2<\cos^n\theta_1$，所以，

$f_n(\theta_1)-f_n(\theta_2)=(\sin^n\theta_1-\sin^n\theta_2)+(\cos^n\theta_2-\cos^n\theta_1)<0$，即 $f_n(\theta_1)<f_n(\theta_2)$.

所以 $f_n(\theta)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增，得 $f_n(\theta)$ 的最大值为 $f_n\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$，最小值为 $f_4(0)=-1$.

当 n 为偶数时，如果仍用定义来证明单调性，则

对任意 θ_1、$\theta_2\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 且 $\theta_1<\theta_2$，$f_n(\theta)=\sin^n\theta+\cos^n\theta$，

$$f_n(\theta_1)-f_n(\theta_2)=(\sin^n\theta_1-\sin^n\theta_2)+(\cos^n\theta_1-\cos^n\theta_2),$$

因 $\sin^n\theta_1-\sin^n\theta_2<0$，$\cos^n\theta_1-\cos^n\theta_2>0$，

不能确定 $f_n(\theta_1)-f_n(\theta_2)$ 的符号，解题需要另辟蹊径.

这时如果想到把不同名函数化成同名函数，就会想到用半角公式：设 $n=2k$ $(k\in\mathbf{N}^*)$，则

$$\begin{aligned}
f_n(\theta)&=\sin^n\theta+\cos^n\theta=(\sin^2\theta)^k+(\cos^2\theta)^k\\
&=\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)^k+\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^k\\
&=\frac{1}{2^k}\left[(1-\cos 2\theta)^k+(1+\cos 2\theta)^k\right]\\
&=\frac{1}{2^k}\left[(1-\mathrm{C}_k^1\cos 2\theta+\mathrm{C}_k^2\cos^2 2\theta-\mathrm{C}_k^3\cos^3 2\theta+\cdots+(-1)^k\mathrm{C}_k^k\cos^k 2\theta)\right.\\
&\quad\left.+(1+\mathrm{C}_k^1\cos 2\theta+\mathrm{C}_k^2\cos^2 2\theta+\mathrm{C}_k^3\cos^3 2\theta+\cdots+\mathrm{C}_k^k\cos^k 2\theta)\right]\\
&=\frac{1}{2^{k-1}}(1+\mathrm{C}_k^2\cos^2 2\theta+\mathrm{C}_k^4\cos^4 2\theta+\cdots).
\end{aligned}$$

由于 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$，$\cos 2\theta$ 是减函数，从而 $f_n(\theta)$ 是减函数. 因此，函数 $f_n(\theta)$ 的最大值为 $f_n(0)=1$，最小值为 $f_n\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^n}=2^{1-\frac{n}{2}}$.

综上所述，当 n 为奇数时，函数 $f_n(\theta)$ 的最大值为 0，最小值为 -1.

当 n 为偶数时，函数 $f_n(\theta)$ 的最大值为 1，最小值为 $2^{1-\frac{n}{2}}$.

【解题反思】

1. 在(3)的解题过程中，当 n 为奇数时的解法是受第(1)问的启发. 那么第(2)问在这道题目中是不是很不协调呢?

实际上，也可以由第(2)题得 $2f_6(\theta)\geqslant f_4(\theta)$，受此启发想到：$2f_4(\theta)-f_2(\theta)=(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\cdot(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\geqslant 0$，$2f_4(\theta)\geqslant f_2(\theta)$，这样就有 $f_6(\theta)\geqslant\frac{1}{2}f_4(\theta)\geqslant\frac{1}{4}f_2(\theta)$.

由特殊到一般发现解题方法，可以认为(2)给本解法提供"暗示". 当解题遇到困难时，要善于发现题目已有信息，哪怕是蛛丝马迹.

于是对任意正整数 $l\geqslant 2$，想到

$$\begin{aligned}
&2f_{2l}(\theta)-f_{2l-2}(\theta)\\
&=2(\cos^{2l}\theta+\sin^{2l}\theta)-(\cos^{2l-2}\theta+\sin^{2l-2}\theta)\\
&=\cos^{2l}\theta+\sin^{2l}\theta+(\cos^2\theta+\sin^2\theta)(\cos^{2l-2}\theta+\sin^{2l-2}\theta)\\
&\quad-\sin^2\theta\cos^{2l-2}\theta-\cos^2\theta\sin^{2l-2}\theta-(\cos^{2l-2}\theta+\sin^{2l-2}\theta)\\
&=(\cos^{2l-2}\theta-\sin^{2l-2}\theta)(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\geqslant 0,\text{从而}
\end{aligned}$$

$$f_n(\theta)\geqslant\frac{1}{2}f_{n-2}(\theta)\geqslant\cdots\geqslant\frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1}}f_2(\theta)=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1}}=f_n\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

解综合题的后面小题要注意运用前面小题的结论或思想方法，它对后面题目有时会有启发和诱导作用.

2. 对 n 为偶数时，有些同学对 n 用数学归纳法，这样的证明是不对的.

因为自变量是 θ，不是 n. 也有同学按下述方法解答：

$$f_n(\theta)=\sin^n\theta+\cos^n\theta\geqslant 2\sqrt{\sin^n\theta\cdot\cos^n\theta}.$$

当且仅当 $\sin^n\theta=\cos^n\theta$ 时等号成立，在 $\left[0,\ \frac{\pi}{4}\right]$ 内，$\sin\theta=\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故 $f_n(\theta)\geqslant 2\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^n}=2^{1-\frac{n}{2}}$.

用导数方法求解很简单：

$f'_n(\theta)=n\cos\theta\sin^{n-1}\theta-n\sin\theta\cos^{n-1}\theta=n\sin\theta\cos\theta(\sin^{n-2}\theta-\cos^{n-2}\theta)\geqslant 0$.

所以，$f_n(\theta)$ 在区间 $\left[0,\ \frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增.

这种解法是巧合. 因为 $\sin^n\theta\cdot\cos^n\theta$ 不是定值，这里的“证明”和 n 的奇、偶性没有任何关系. 在运用不等式时 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$，只有当积 ab 为定值时，和 $a+b$ 才取得最小值，而和 $a+b$ 为定值时，积 ab 取得最大值. 因此，也称该不等式为“和积不等式”.

【发散训练】

2. (08・全国Ⅱ理)设函数 $f(x)=\frac{\sin x}{2+\cos x}$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 如果对任何 $x\geqslant 0$，都有 $f(x)\leqslant ax$，求 a 的取值范围.

例2 (08・江苏)若 $f_1(x)=3^{|x-p_1|}$，$f_2(x)=2\cdot 3^{|x-p_2|}$，$x\in\mathbf{R}$，$p_1$，$p_2$ 为常数，且 $f(x)=\begin{cases}f_1(x),\ f_1(x)\leqslant f_2(x),\\ f_2(x),\ f_1(x)>f_2(x).\end{cases}$

(1) 求 $f(x)=f_1(x)$ 对所有实数成立的充要条件(用 p_1，p_2 表示)；

(2) 设 a，b 为两实数，$a<b$ 且 p_1，$p_2\in(a,\ b)$，若 $f(a)=f(b)$，求证：$f(x)$ 在区间 $[a,\ b]$ 上的单调增区间的长度和为 $\frac{b-a}{2}$(闭区间 $[m,\ n]$ 的长度定义为 $n-m$).

【分析与解】

(1) $f(x)=f_1(x)$ 恒成立等价于 $f_1(x)\leqslant f_2(x)$，即 $3^{|x-p_1|}\leqslant 2\cdot 3^{|x-p_2|}$，所以 $3^{|x-p_1|-|x-p_2|}\leqslant 2$，

即 $|x-p_1|-|x-p_2|\leqslant\log_3 2$ 恒成立. (*)

因为

$$\begin{aligned}|x-p_1|-|x-p_2|&\leqslant|(x-p_1)-(x-p_2)|\\&=|p_1-p_2|,\end{aligned}$$

所以 $|p_1-p_2|\leqslant\log_3 2$.

这里使用不等式：

$|a|-|b|\leqslant|a-b|$.

对 $g(x)=|x-p_1|-|x-p_2|$，也可用分段讨论求得其最大值为 $|p_1-p_2|$.

综上，$f(x)=f_1(x)$ 对所有实数成立的充要条件是：$|p_1-p_2|\leqslant\log_3 2$.

(2) (i) 如果 $|p_1-p_2|\leqslant\log_3 2$，由(1)知，$f(x)=f_1(x)$(如图1)对所有实数都成立，则其图象关于直线 $x=p_1$ 对称. 因为 $f(a)=f(b)$，所以区间 $[a,\ b]$ 关于直线 $x=p_1$ 对称.

因为减区间为$[a,\ p_1]$，增区间为$[p_1,\ b]$，所以单调增区间的长度和为 $b-\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{b-a}{2}$.

> 以下要考虑 $f(x)$ 在区间$[a,\ p_1]$，$[p_1,\ p_2]$，$[p_2,\ b]$上的单调性. 为此需要讨论在各个区间上 $f_1(x)$，$f_2(x)$的大小.

(ii) 如果 $|p_1-p_2|>\log_3 2$. 可设 $p_1<p_2$，则$p_2-p_1>\log_3 2$.

于是当 $x\leqslant p_1$ 时，$f_1(x)=3^{p_1-x}<3^{p_2-x}<f_2(x)$，从而 $f(x)=f_1(x)$.

当 $x\geqslant p_2$ 时，因 $f_1(x)>0$，$f_2(x)>0$，且$\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}=\dfrac{3^{x-p_1}}{2\cdot 3^{x-p_2}}=\dfrac{1}{2}\cdot 3^{p_2-p_1}>\dfrac{1}{2}\cdot 3^{\log_3 2}$

$=\dfrac{1}{2}\cdot 2=1$，从而 $f(x)=f_2(x)$.

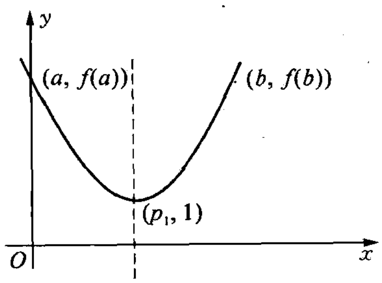


图 1

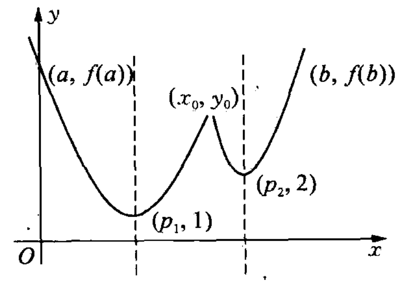


图 2

当 $p_1<x<p_2$ 时，$f_1(x)=3^{x-p_1}$，$f_2(x)=2\cdot 3^{p_2-x}$，由方程 $3^{x_0-p_1}=2\cdot 3^{p_2-x_0}$ 得 $x_0=\dfrac{p_1+p_2}{2}+\dfrac{1}{2}\log_3 2$，　①

> 在区间$[p_1,\ p_2]$上 $f_1(x)$与 $f_2(x)$有交点，要求出交点横坐标 x_0.

因 $f_1(x)$在$[p_1,\ p_2]$是递增，$f_2(x)$在$[p_1,\ p_2]$递减，故 $p_1<x_0<p_2$.

所以 $f(x)=\begin{cases}f_1(x),\ p_1<x\leqslant x_0,\\ f_2(x),\ x_0<x<p_2.\end{cases}$

由此可知，在区间$[a,\ b]$上，$f(x)=\begin{cases}f_1(x),\ a\leqslant x\leqslant x_0\\ f_2(x),\ x_0<x\leqslant b\end{cases}$（如图 2），

由函数 $f_1(x)$及函数 $f_2(x)$的单调性可知，$f(x)$在区间$[a,\ b]$上的单调增区间的长度之和为 $(x_0-p_1)+(b-p_2)$.

因 $f(a)=f(b)$，即 $3^{p_1-a}=2\cdot 3^{b-p_2}$ 得 $p_1+p_2=a+b+\log_3 2$.　②

由①、②得

$$(x_0-p_1)+(b-p_2)=b-\frac{1}{2}(p_1+p_2-\log_3 2)=\frac{b-a}{2}.$$

综合(i)、(ii)可知，$f(x)$在区间$[a,\ b]$上的单调增区间的长度和为 $\dfrac{b-a}{2}$.

【解题反思】

1. 在(1)中，根据 $f_1(x)<f_2(x)$ 推得含有绝对值的不等式，用不等式性质比分类讨论简单.

2. 解答(2)的关键是要分清 $f_1(x)$，$f_2(x)$在各区间上的表达式，各函数的单调区间可以通过图象来确定，再用符号语言书写. 数形结合思想是解答本题的重要方法.

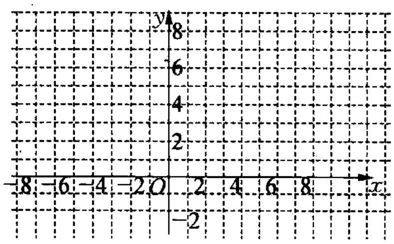
【发散训练】

3. (06·上海春考)设函数 $f(x)=|x^2-4x-5|$.

(1) 在区间$[-2, 6]$上画出函数 $f(x)$的图象；

(2) 设集合 $A=\{x \mid f(x)\geqslant 5\}$，$B=(-\infty, -2]\cup[0, 4]\cup[6, +\infty)$. 试判断集合 A 和 B 之间的关系，并给出证明；

(3) 当 $k>2$ 时，求证：在区间$[-1, 5]$上，$y=kx+3k$ 的图象位于函数 $f(x)$图象的上方.



【本节综述】

涉及函数单调性的问题可以是最值、函数的零点、图象与 x 轴交点的个数等. 确定函数单调性的方法通常有：利用定义、利用已知函数（比如二次函数、指对数函数、“耐克函数$\left(y=x+\dfrac{k}{x}\ (k>0)\right)$”、三角函数等）和导数等方法.

§1.2 抽象函数

抽象函数是指没有给出具体解析式的函数的统称，有时也以方程的形式出现. 这类问题一般在客观题中出现，但近年解答题中有时也会出现.

例 (09·上海理)已知函数 $y=f(x)$ 有反函数. 定义：若对给定的实数 $a(a\neq 0)$，函数 $y=f(x+a)$ 与 $y=f^{-1}(x+a)$ 互为反函数，则称 $y=f(x)$ 满足“a 和性质”；若函数 $y=f(ax)$ 与 $y=f^{-1}(ax)$ 互为反函数，则称 $y=f(x)$ 满足“a 积性质”.

(1) 判断函数 $g(x)=x^2+1(x>0)$ 是否满足“1 和性质”，并说明理由；

(2) 求所有满足“2 和性质”的一次函数；

(3) 设函数 $y=f(x)(x>0)$ 对任何 $a>0$，满足“a 积性质”. 求 $y=f(x)$ 的表达式.

【分析与解】

(1) 只要看 $g(x+1)$ 和 $g^{-1}(x+1)$ 是否互为反函数即可.

$g(x)=x^2+1(x>0)$ 的反函数 $g^{-1}(x)=\sqrt{x-1}(x>1)$，故 $g^{-1}(x+1)=\sqrt{x}(x>0)$，而 $g(x+1)=(x+1)^2+1(x>-1)$ 的反函数为 $y=\sqrt{x-1}-1(x>1)$.

所以 $g(x)=x^2+1(x>0)$ 不满足“1 和性质”.

(2) 因 $y=f(x+a)$ 与 $y=f^{-1}(x+a)$ 的图象关于直线 $y=x+a$ 对称，如果它们是互为反函数，则斜率为-1 的一次函数满足条件. 以下是证明：

设 $f(x)=kx+b(k\neq 0, x\in \mathbf{R})$ 满足“2 和性质”，$f^{-1}(x)=\dfrac{x-b}{k}$，$f^{-1}(x+2)=\dfrac{x+2-b}{k}$. 而 $f(x+2)=k(x+2)+b$ 的反函数 $y=\dfrac{x-b-2k}{k}$，由“2 和性质”定义得 $\dfrac{x+2-b}{k}=\dfrac{x-b-2k}{k}$，比较得 $k=-1$，即所求的一次函数为 $f(x)=-x+b$.

(3) 由于反比例函数 $f(x)=\dfrac{k}{x}\ (k\neq 0)$ 的反函数是它自身，由此可猜测满足“a 积性质”的是反比例函数.

由于 $y=f^{-1}(ax)$ 的反函数为 $y=\dfrac{f(x)}{a}$，又已知 $y=f^{-1}(ax)$ 的反函数为 $y=f(ax)$，所以 $f(x)=ay=af(ax)$ 对 $x>0$ 都成立.

把上述等式看成关于 a，x 的二元方程，令 $ax=1$，则 $f(x)=\dfrac{1}{x}f(1)$，令 $x=1$ 得 $f(1)=af(a)$. 若 $f(1)=0$，则 $f(a)=0$ 对一切 $a>0$ 的实数都成立，即 $f(x)=0$，与 $f(x)$ 有反函数矛盾，所以 $f(1)\neq 0$，令 $f(1)=k$，那么 $f(x)=\dfrac{k}{x}$，经检验满足条件.

【解题反思】

解答抽象函数问题常常用已知的初等函数去“猜测”它的性质(这是合情推理)，然后再给予证明. (2)、(3)的结论正是在这一思想指导下猜测出来的，(2)的证明相对容易，(3)的证明紧扣反函数的定义，然后把它视为关于 a、x 的二元方程，再用赋值法，一步一步朝目标靠近.

【发散训练】

1. 若对任意的 x，$y\in\mathbf{R}$，都有 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)g(y)$，且 $f(0)=0$，$g(0)=1$.

(1) 讨论 $f(x)$，$g(x)$的奇偶性；

(2) 若存在 $c>0$，使 $g(c)=0$，判断 $f(x)$，$g(x)$的周期性.

2. 设 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上不恒为 0 的函数，且对任意的 a、$b\in\mathbf{R}$ 都满足：$f(ab)=af(b)+bf(a)$.

(1) 求 $f(0)$、$f(1)$的值；

(2) 判断 $f(x)$的奇偶性，并证明；

(3) 若 $f(2)=2$，$u_n=\dfrac{f(2^{-n})}{n}\ (n\in\mathbf{N}^*)$，求数列$\{u_n\}$的前 n 项和 S_n.

【本节综述】

对某些抽象函数可以用已知初等函数去类比，先得到结论，再证明.

对判断抽象函数奇偶性的问题往往用取特殊值的方法(如发散训练 1、2)来证明.

§1.3 函数与方程、不等式

函数与方程、不等式的关系非常密切，把函数与方程、不等式融于一体的考题常有新意，尤其是二次函数、二次方程与二次不等式，应该特别注意.

例 1 (09·江苏)设 a 为实数，函数 $f(x)=2x^2+(x-a)|x-a|$.

(1) 若 $f(0)\geqslant 1$，求 a 的取值范围；

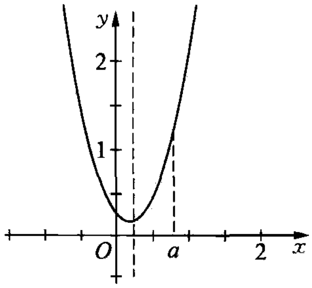
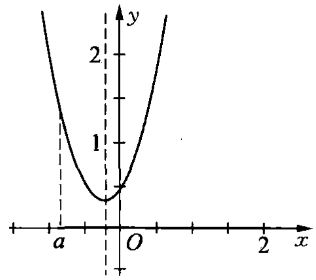
(2) 求 $f(x)$的最小值；

(3) 设函数 $h(x)=f(x)$，$x\in(a,+\infty)$，直接写出(不需给出演算步骤)不等式 $h(x)\geqslant 1$ 的解集.

【分析与解】

(1) 若 $f(0)\geqslant 1$，则 $-a\mid a\mid\geqslant 1$，即 $\begin{cases}a<0,\\ a^2\geqslant 1,\end{cases}$ $a\leqslant -1$.

(2) 去掉绝对值符号要讨论，由于所得二次函数的定义域与解析式都含有参数 a，还要进行讨论.

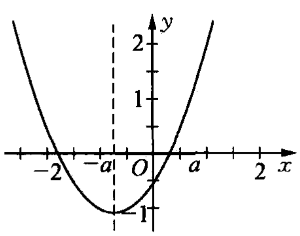
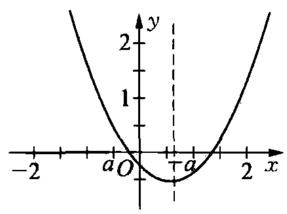
当 $x\geqslant a$ 时，$f(x)=3x^2-2ax+a^2=3\left(x-\frac{a}{3}\right)^2+\frac{2a^2}{3}$，

$$f(x)_{\min}=\begin{cases}f(a),\ a\geqslant 0,\\ f\left(\frac{a}{3}\right),\ a<0\end{cases}=\begin{cases}2a^2,\ a\geqslant 0,\\ \frac{2a^2}{3},\ a<0;\end{cases}$$

当 $x\leqslant a$ 时，$f(x)=x^2+2ax-a^2=(x+a)^2-2a^2$，

$$f(x)_{\min}=\begin{cases}f(-a),\ a\geqslant 0,\\ f(a),\ a<0\end{cases}=\begin{cases}-2a^2,\ a\geqslant 0,\\ 2a^2,\ a<0.\end{cases}$$

综上，$f(x)_{\min}=\begin{cases}-2a^2,\ a\geqslant 0,\\ \frac{2a^2}{3},\ a<0.\end{cases}$

(3) $x\in(a,+\infty)$ 时，由 $h(x)\geqslant 1$ 得 $3x^2-2ax+a^2-1\geqslant 0$，$\Delta=4a^2-12(a^2-1)=12-8a^2$.

当 $a\leqslant -\frac{\sqrt{6}}{2}$ 或 $a\geqslant\frac{\sqrt{6}}{2}$ 时，$\Delta\leqslant 0$，$x\in(a,+\infty)$；

当 $-\frac{\sqrt{6}}{2}<a<\frac{\sqrt{6}}{2}$ 时，$\Delta>0$，得

$$\begin{cases}\left(x-\frac{a-\sqrt{3-2a^2}}{3}\right)\left(x-\frac{a+\sqrt{3-2a^2}}{3}\right)\geqslant 0,\\ x>a.\end{cases}$$

(i) $a \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$时，$x \in (a, +\infty)$（如图(i)）；

(ii) $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$x \in (a, +\infty)$（如图(ii)）

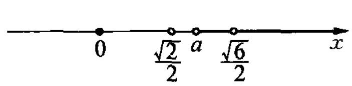
(iii) $a \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$时，$x \in \left[\frac{a+\sqrt{3-2a^2}}{3}, +\infty\right)$（如图(iii)）；

(iv) $a \in \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$时，

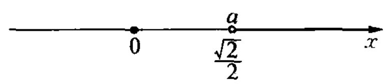
$$x \in \left(a, \frac{a-\sqrt{3-2a^2}}{3}\right] \cup \left[\frac{a+\sqrt{3-2a^2}}{3}, +\infty\right)（如图(iv)）.$$

令 $a > \frac{a+\sqrt{3-2a^2}}{3}$

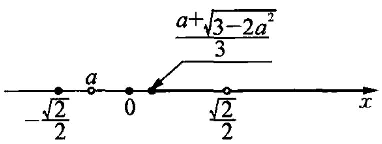
解得 $a > \frac{\sqrt{2}}{2}$.



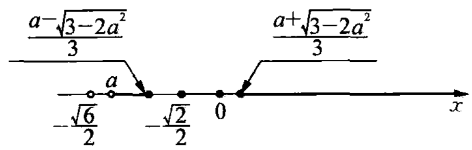
图(i)



图(ii)



图(iii)



图(iv)

【解题反思】

第(2)题是求二次函数在某个区间上的最值，通常分为三种类型：一是“轴定（对称轴为定值）区间（区间含参数）变”型；二是“轴变区间定”型；三是“轴变区间变”型，本题即是此类. 解题时常借助于函数图象.

(3)是解含参数的二次不等式组，需要比较两个根的大小，再求交集，借助数形结合，可使解答形象直观.

【发散训练】

1. （07·湖北文）设二次函数 $f(x)=x^2+ax+a$，方程 $f(x)-x=0$ 的两根 x_1 和 x_2 满足 $0<x_1<x_2<1$.

(1) 求实数 a 的取值范围；

(2) 试比较 $f(0)f(1)-f(0)$ 与$\frac{1}{16}$的大小，并说明理由.

例 2 （07·江苏）已知 a, b, c, d 是不全为零的实数，函数 $f(x)=bx^2+cx+d$，$g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. 方程 $f(x)=0$ 有实数根，且 $f(x)=0$ 的实数根都是方程 $g(f(x))=0$ 的根；反之，$g(f(x))=0$ 的实数根都是 $f(x)=0$ 的根.

(1) 求 d 的值；

(2) 若 $a=0$，求 c 的取值范围；

(3) 若 $a=1$，$f(1)=0$，求 c 的取值范围.