高等学校教学用书

南通大学理学院基础数学教研室 编

线性代数

练习册

化学工业出版社

高等学校教学用书

线性代数练习册

南通大学理学院基础数学教研室 编

化学工业出版社

·北京·

线性代数是理工、经济管理及医学各专业都必须开设的公共基础课程，是全国研究生入学考试必考的课程之一。

本练习册与同济大学编写的《线性代数》（第 4 版）教材相配套。每章配有内容小结、常用方法小结、练习题、自测题及参考答案。最后配有 8 套模拟试题和参考答案，其中 1～6 套是为学生总复习时练习使用；7 套、8 套有一定难度，专为学习能力较强的同学提供，也可以作为考研复习时练习使用。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数练习册/南通大学理学院基础数学教研室编．—北京：化学工业出版社，2010.1

高等学校教学用书

ISBN 978-7-122-07351-8

Ⅰ．线…　Ⅱ．南…　Ⅲ．线性代数-高等学校-习题　Ⅳ．O151.2-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 230205 号

责任编辑：唐旭华　　文字编辑：宋湘玲　叶晶磊

责任校对：陶燕华　　装帧设计：刘丽华

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号　邮政编码 100011）

印　　刷：北京市振南印刷有限责任公司

装　　订：三河市宇新装订厂

787mm×1092mm　1/16　印张 7¾　字数 194 千字　2010 年 2 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899

网　　址：http://www.cip.com.cn

凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：16.00 元

目　录

第一章　行　列　式

二、三阶行列式及 n 阶行列式的定义部分知识概要

一、内容提要

1. 二阶行列式的定义：$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

2. 三阶行列式的定义：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

3. n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$.

（1）n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和；（2）每一项是取自不同行不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$（$p_1p_2\cdots p_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列）；（3）当 $p_1p_2\cdots p_n$ 是偶排列时，$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 带正号，当 $p_1p_2\cdots p_n$ 是奇排列时，$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 带负号.

二、常用解题方法及注意事项

1. 求排列的逆序数：(按自然数的从小到大次序为标准次序)

$1,2,\cdots,n$ 的一个排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数记为 $\tau(j_1j_2\cdots j_n) = m_1 + m_2 + \cdots + m_{n-1}$. 其中 $m_i(i=1,2,\cdots,n-1)$ 是 i 前面比 i 大的数的个数.

2. 确定行列式 $D_n = |a_{ij}|_n$ 中的项及符号：

（1）$D_n = |a_{ij}|_n$ 中的项 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 是取自不同行不同列的 n 个数的乘积，因此，行下标 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 和列下标 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 都没有重复数字；（2）将 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 中的因子交换顺序使行下标是自然顺序，即 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n} = a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，该项符号为 $(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}$.

二、三阶行列式及 n 阶行列式的定义部分习题

1. 计算下列二阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$；

(2) $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix}$；

(4) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$.

2. 计算下列三阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$；

(2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix}$.

3. 按自然数从小到大为标准次序，求下列各排列的逆序数：

(1) 3214；　　　　(2) 614235；

(3) $1\quad 2n\quad 3\quad (2n-2)\quad 5\quad (2n-4)\quad \cdots\quad (2n-1)\quad 2$.

4. 确定 i,j，使 6 元排列 $2i316j$ 为奇排列.

5. 写出 4 阶行列式中含有 $a_{13}a_{21}$ 的项.

6. 按定义计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$；　　　　(2) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & b & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

7. 求 $f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$ 的展开式中 x^4 和 x^3 的系数.

行列式的性质与展开部分知识概要

一、内容提要

（一）行列式的性质

1. 行列式 D 与其转置行列式 D^{T} 相等（即 $D^{\mathrm{T}}=D$）.

2. 交换行列式的两行（或列），行列式改变符号（即 $D\xlongequal{r_i\leftrightarrow r_j}-D$ 或 $D\xlongequal{c_i\leftrightarrow c_j}-D$）.

3. 行列式中某行（或列）的公因子可以提到行列式符号外面做因子

（即 $D\xlongequal{r_i\times\frac{1}{k}(k\neq0)}kD_1$ 或 $D\xlongequal{c_i\times\frac{1}{k}(k\neq0)}kD_1$）.

4. n 阶行列式 D 可以按第 i 行（或列）拆成两个行列式 D_1 与 D_2 的和，即 $D=D_1+D_2$. 其中 D 的第 i 行（或列）为 D_1 与 D_2 的第 i 行（或列）的和；D，D_1，D_2 的其余各行（或列）对应元素则同的完全一样.

5. 把行列式某一行（或列）的元素同乘一数后加到另一行（或列）的对应位置元素上，行列式的值不变$\left(\text{即 } D\xlongequal{r_i+kr_j}D_1 \text{ 或 } D\xlongequal{c_i+kc_j}D_1\right)$.

（二）行列式的展开

1. n 阶行列式 D 的某行（或列）元素与对应元素的代数余子式乘积之和为 D.

2. 行列式的某行（或列）元素与另一行（或列）对应元素的代数余子式乘积之和为 0，

即
$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=\begin{cases}D, & i=k\\ 0, & i\neq k\end{cases};$$

$$a_{1j}A_{1t}+a_{2j}A_{2t}+\cdots+a_{nj}A_{nt}=\begin{cases}D, & j=t\\ 0, & j\neq t\end{cases}.$$

二、常用的解题方法及注意事项

1. 行列式的计算：

（1）利用性质将行列式化为三角形行列式（三角形行列式的值等于对角线元素之积）；

（2）利用依行、依列展开转化为低阶行列式的计算（或给出递推公式、或利用数学归纳法）；

（3）化简与展开同时进行（先化简，再按零较多的行（或列）展开）.

2. 行列式化简时注意：

（1）尽量避免分数运算；（2）展开时注意代数余子式与余子式相差的符号$(-1)^{i+j}$.

行列式的性质与展开部分习题

1. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 2008 & 1986 & 1964 \\ 2009 & 1987 & 1965 \\ 2010 & 1988 & 1966 \end{vmatrix}$；

(2) $\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & 1+a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & 1+a_3 \end{vmatrix}$；

(3) $D=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$；

(4) $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 6 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$；

(5) $D=\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$.

2. 证明：

(1) $D=\begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & a+d \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix}=0$；

(2) $\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}=(a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$.

3. 计算 n 阶行列式：

(1) $D_n=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$；(2) $D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2+a_2 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & \cdots & n+a_n \end{vmatrix}$ $(a_1a_2\cdots a_n\neq 0)$.

4. 利用范德蒙德行列式计算：

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}.$$

克拉默法则部分知识概要

一、内容提要

1. 设 n 个变量，n 个方程的线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}k_1+a_{12}k_2+\cdots+a_{1n}k_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}.$$

如果该线性方程组的系数行列式 $D=|a_{ij}|_n\neq 0$，则方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ \cdots,\ x_n=\frac{D_n}{D}.$$

其中 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是 D 中第 j 列换成常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 其余各列不变得到的行列式，

即
$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\ j=1,2,\cdots,n.$$

2. 设齐次线性方程组为$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$.

（1）如果系数行列式 $D\neq 0$，则该齐次线性方程组只有零解；（2）如果该齐次线性方程组有非零解，那么它的系数行列式 $D=0$.

二、常用解题方法及注意事项

1. 解题方法：

（1）用克拉默法则解线性方程组；

（2）利用系数行列式是否为零来判断齐次线性方程组只有零解或有非零解.

2. 注意：

克拉默法则只适合方程个数与未知量个数相同，且系数行列式不为零的线性方程组的求解.

克拉默法则部分习题

1. 用克拉默法则解线性方程组：

(1) $\begin{cases} bx_1 - ax_2 = -2ab \\ -2cx_2 + 3bx_3 = bc \\ cx_1 + ax_3 = 0 \end{cases}$，$abc \neq 0$；

(2) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3 \\ -3x_1 + 4x_2 + 8x_3 - 2x_4 = 4 \\ 6x_1 - x_2 - 6x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases}$.

2. 当 λ 为何值时，齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ -x_1 + \lambda x_2 = 0, \\ \lambda x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

(1) 仅有零解；　　(2) 有非零解.

第一章自测题与参考答案

第一章自测题

一、判断题（每题 3 分，共 15 分）

1. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$.　　(　　)

2. 在四阶行列式 $D_4=|a_{ij}|$ 中，a_{23} 的余子式 M_{23} 与代数余子式 A_{23} 互为相反数．　　(　　)

3. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=1$，$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}=-1$，则 $\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{vmatrix}=0$.　　(　　)

4. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=1$，则 $\begin{vmatrix} a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{11} & a_{21} & a_{31} \end{vmatrix}=1$.　　(　　)

5. $D=\begin{vmatrix} 4 & 1 & 6 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & 2 \\ 6 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{2r_2+r_1} \dfrac{1}{2}\times\begin{vmatrix} 4 & 1 & 6 & 4 \\ 0 & 7 & 18 & 8 \\ 6 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.　　(　　)

二、填空题（每题 4 分，共 16 分）

1. 已知 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=-1$，则 $\begin{vmatrix} a_{21} & 2a_{22} & a_{23} \\ 2a_{11} & 4a_{12} & 2a_{13} \\ a_{31} & 2a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$__________.

2. 已知 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=2$，则 $a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}-a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}+a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=$_____，

$a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=$__________.

3. 由行列式确定的多项式 $f(x)=\begin{vmatrix} 4x & 3x & 2 & 1 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 2x & 1 \\ 1 & 0 & 1 & x \end{vmatrix}$ 中 x^4，x^3 的系数分别为__________.

4. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$__________.

三、计算下列行列式（各 10 分，共 40 分）：

1. $D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$；

2. $\begin{vmatrix} (a-1)^2 & a^2 & (a+1)^2 & 1 \\ (b-1)^2 & b^2 & (b+1)^2 & 1 \\ (c-1)^2 & c^2 & (c+1)^2 & 1 \\ (d-1)^2 & d^2 & (d+1)^2 & 1 \end{vmatrix}$；

3. $D_{2n}=\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ b & & & & & a \end{vmatrix}$；

4. $D_n=\begin{vmatrix} a_1+\lambda & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+\lambda & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+\lambda \end{vmatrix}$.

四、（10 分）设 $D=|a_{ij}|_n$为 n 阶行列式，$B=|-a_{ij}|_n$，$G=|ka_{ij}|_n$（k 为非零数）.

（1）讨论 B,D 的关系；　　（2）讨论 G,D 的关系.

五、（10 分）$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$，求 $A_{21}+A_{22}+A_{23}+A_{24}$.

六、（9 分）设齐次线性方程组为$\begin{cases} a_1x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+bx_2+x_3=0 \\ x_1+2bx_2+x_3=0 \end{cases}$，

用克拉默法则讨论 a,b 应取何值时，方程组（1）仅有零解；（2）有非零解.