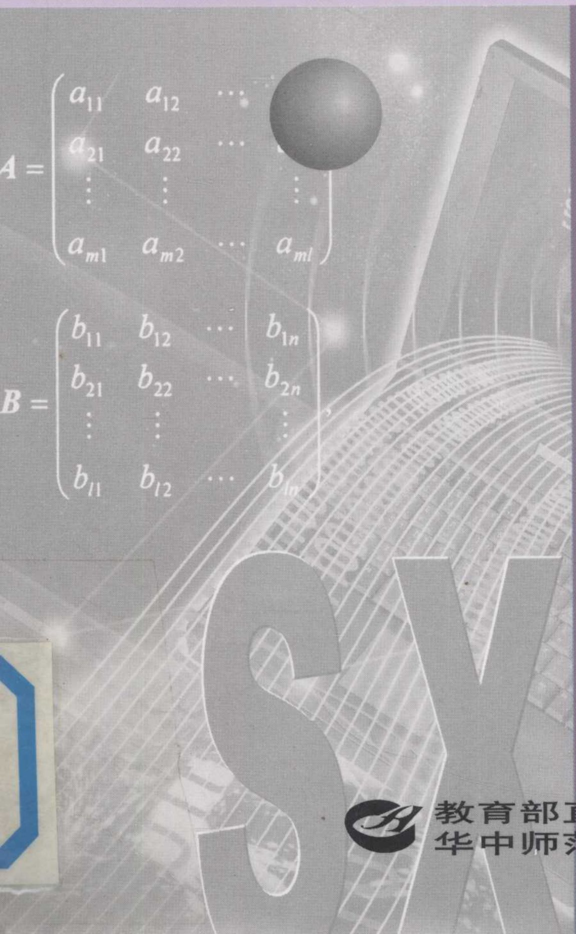
21世纪高等职业教育规划教材 · 数学系列

线性代数

XIANXING DAISHU

■ 郑玉美 主审

■ 刘昌喜 主编



教育部直属师范大学
华中师范大学出版社

21 世纪高等职业教育规划教材·数学系列

线性代数

主　审：郑玉美
主　编：刘昌喜
副主编：魏　莹　奚小平

华中师范大学出版社

内 容 简 介

本书是根据高职高专教育专业人才培养目标和高职高专教育基础课程教学的基本要求而编写的。全书内容包括：行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值问题. 各章都编有内容小结和复习题，同时还编写有反映线性代数学科知识、历史发展以及名人轶事的阅读材料。附录部分还介绍了矩阵在密码学中的应用和 MATLAB 数学软件如何解决线性代数的基本问题。

本书除可作高职高专学校线性代数课程的教材外，还可供相关专业的自学考试者、工程技术人员参考使用。

新出图证(鄂)字 10 号

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/刘昌喜主编. —武汉：华中师范大学出版社，2005. 8

(21 世纪高等职业教育规划教材 · 数学系列)

ISBN 7-5622-3231-8/O · 145

Ⅰ. 线…　Ⅱ. 刘…　Ⅲ. 代数—高等学校：技术学校—教材　Ⅳ. 0151. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 058051 号

线性代数

主　　编：刘昌喜

责任编辑：曾太贵　　责任校对：罗　艺　　封面设计：罗明波

编 辑 室：第二编辑室　　电话：027－67867362

出版发行：华中师范大学出版社©

社　　址：武汉市武昌珞瑜路 100 号

电话：027－67863040(发行部)　027－67861321(邮购)

传真：027－67863291

网址：http://www.ccnup.com.cn　电子信箱：hscbs@public.wh.hb.cn

经　　销：新华书店湖北发行所

印 刷 者：石首市印刷厂　　督　　印：姜勇华

字　　数：210 千字

开　　本：787 mm×960 mm　1/16　　印　　张：10.875

版　　次：2005 年 8 月第 1 版　2005 年 8 月第 1 次印刷

印　　数：1—3 600　　定　　价：17.00 元

21世纪高等职业教育规划教材·数学系列

21世纪高等职业教育规划教材·数学系列

线性代数编委会

序 言

从上个世纪末到本世纪初的短短几年里，我国高等教育的规模迅速扩大，其中高等职业技术学校占有相当大的比重，据权威部门统计，截至2004年，我国独立设置的高等职业技术学校有一千多所，占全国高校总数的68%，在校生781万，占全国高校在校生的53.4%。高等职业技术学校的培养目标是：培养生产、服务、管理第一线具有综合职业能力和全面素质的技术应用型人才。这样的人才是全面建设小康社会的人才大军中不可或缺的重要组成部分。如何不断提高教育质量，源源不断地向社会输送符合培养目标的合格毕业生，是摆在高等职业技术学校面前十分重要的任务。当然，本科层次以上的高等教育，随着规模的迅速扩大，也面临同样的课题，但相对而言，我国在本科生、研究生培养方面，可资借鉴的经验更多一些。对于高等职业技术学校，面临新的形势和新的要求，可供效法的经验则较少，因此可以说，在巩固和提高教育质量方面，高等职业技术学校面临的形势更为严峻。

提高教育质量的关键在于教学内容和教学方法的改革与创新，而教材建设是其中十分重要的方面。数学课程作为高等职业技术学校绝大多数专业学生的一门必修的基础课，其重要性不言而喻。目前已经出版了一些供高等职业技术学校选用的数学教材，但进一步研究和改进的空间仍然很大。为此，郑玉美教授发起组织了十二所高职高专学校多位经验丰富的老师，对高职高专数学课程的结构与内容的改革作了认真的探讨，并在此基础上编写了现在这一套适合高职高专学校使用的试用教材。编写者力求使所编教材充分体现高职高专学校培养应用型人才这一总的目标，在数学内容的安排取舍、数学概念的实际背景及应用数学方法分析和解决实际问题的能力的训练等方面，都作了实实在在的富有成效的努力。这套教材的出版，是高职高专学校数学课程教学改革的一次很有意义的实践。

教材建设是一项长期的、艰巨的工作，它需要广大教师的共同参

与。既需要教材的编写者不断探索、精益求精，更需要使用教材的师生及时反馈使用过程中发现的问题和不足之处。通过这样一种编者与使用者的互动与交流，集思广益，长期积累，不懈追求，才能逐步形成一套比较完善的教材。

2005年7月

前 言

进入21世纪，中国的高等教育从过去的精英教育迈入了大众化的轨道。高等本科与高等职业教育异军突起，其规模与人数已超过正规军，正在成为高等教育的一支重要力量。以往的传统数学课程，从体系结构与内容、深度与广度等方面都已不适应正在成长、变化的高职高专教育形势。各种版本的高职高专数学教材已经陆续登场，这是不可抗拒的时代潮流。这些教材各具特色，推动了当前高职高专数学课程结构与内容的革新，但仍然不足以适应高职高专教育发展的意向与迅猛形势。在武汉生物工程学院党委书记余毅、院长邓宗琦的支持下，郑玉美教授主持了《高职高专数学课程的结构与内容改革实施方案》的研究项目，并于2005年初组织武汉职业技术学院等十二所院校中，长期工作在高职高专数学课程教学第一线的、经验丰富的教育专家进行专题研讨。我们汲取了以往出版的各类高职高专数学教材的优点，结合各校各专业数学教学改革的经验，注意国外同类学校的改革动向，特别是数学思想与数学现代化手段应用的趋势，兼顾我国的国情，决定编写一套具有以下特点的21世纪规范教材：

1. 以“三用”为原则

(1) 够用　删去传统教材中难而繁的内容，保留理、工、农、医、管各专业必须作为基础的内容，达到满足其需要的最大限度，够用即可。

(2) 管用　增添必需的以往传统教材中没有的知识内容，使教材适合各专业的需要，达到管用的效果。

(3) 会用　淡化传统教材偏重理论的思想，删去理论性较强的内容，强调数学知识的应用，力求学以致用，学后会用，增强学生学习数学的信心与兴趣。

2. 以“三凸现”为特色

(1) 凸现数学与文化的联系　对重要的数学概念与理论，着重讲解它们的历史背景、产生的过程及影响，同时有机地结合一些有趣的数学故事及有影响力的数学家的轶事进行讲解，达到让学生全面了解数学，提高他们的综合素质的目的。

(2) 凸现数学现代化教学手段的应用　将数学软件的使用有机地融合进教材中，不盲目追求运算技巧，着重于培养学生解决实际问题的能力。

(3) 凸现数学的应用性　如把有重要应用的“微元法”贯穿在整个高等数学教材中，又如一元函数的积分学一章，改变传统的讲解顺序，从定积分切入，以

有实际应用的定积分为主线，降低不定积分的地位。注意基本概念的实际背景和理论知识的应用，每一章还特地安排一二节专题应用介绍。

为了使本套教材有更宽广的适用性，在保证科学性和逻辑性的前提下，更注重培养学生的科学的良好的思维习惯，提高学生的学习素质。因此，力求全套教材语言准确、生动，条理清晰简洁。标有 * 号的内容，可由主讲者根据专业及学生状况自由取舍或另外安排课时（计划课时之外）讲授。

本套教材第一批共五种：《高等数学》（上）、《高等数学》（下）、《高等数学全程辅导与提高》、《线性代数》、《离散数学》。

参加本套教材编写的主编有：叶子祥、赵国石、刘昌喜、姚志扬、万武、潘玉恒。

全套教材的框架结构、统稿定稿由郑玉美及以上主编负责，齐民友、任德麟、邓宗琦教授认真审阅了全部教材的原稿，提出了许多有建设性的意见，在此对三位资深教授表示衷心的感谢。华中师范大学出版社杨发明教授对本套教材的编写、审查做了大量的工作，在此一并表示深深的感谢。

参加《线性代数》编写的有：刘昌喜、郑玉美、奚小平、胡动刚、刘云鹏、肖斌等。全书由刘昌喜统稿、定稿。

虽然各位编者十分努力，但由于我们的水平有限，成书时间又很仓促，本套教材必有不少缺点与错误，还望广大师生、读者批评指正。

编委会

2005 年 5 月

目　录

第一章 行 列 式

在大多数科学中，后一代人往往撕毁了前一代人所建立的成就，但在数学中，每一代人都是在老的结构上建立新的成果.

——汉克尔·赫尔曼

在自然科学、社会科学以及工程技术等领域中，通常涉及到线性方程组的求解问题. 线性代数就是在研究线性方程组的解的过程中产生和发展起来的. 行列式则是研究线性方程组的一个有力工具.

本章首先从未知量的个数和方程个数相等的线性方程组的解法入手，引入行列式的概念，然后讨论它的性质和计算方法，最后通过克莱姆法则给出一种利用行列式解线性方程组的重要方法.

1.1 行列式的定义

1.1.1 二阶行列式的定义

设由两个方程组成的二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.1-1}$$

其中 $a_{ij}, b_i(i, j = 1,2)$ 为常数，$x_j(j = 1,2)$ 为未知数.

利用中学代数的加减消元法可知，当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，得到方程组 (1.1-1) 的唯一解：

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases} \tag{1.1-2}$$

尽管(1.1-2) 式提供了方程组(1.1-1) 解的公式，但很难记忆. 为了便于理解和记忆，不妨从其表达式中探寻一些规律. 在(1.1-2) 式中，x_1, x_2 表达式的分母是相同的，都等于 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，且该数仅与方程组(1.1-1) 中 x_1、x_2 的系数有关，而与常数项无关. 如果把这些系数按它们在原方程组中的位置写出来，即用符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

来表示 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，便得如下二阶行列式的定义.

定义 1.1　将 2×2 个数排成两行两列(横排的称为行，竖排的称为列)，并在左、右两侧各加一竖线，得到算式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{1.1-3}$$

(1.1-3) 式的左端“$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$”称为二阶行列式，记为 D；(1.1-3) 式的右端“$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$”称为二阶行列式的展开式，其中，$a_{ij}\ (i,j=1,2)$ 称为行列式 D 的第 i 行、第 j 列的元素.

下面给出一种(1.1-3) 式的有效记忆方法：

将 2×2 个元素排成一个方形表

$$\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array}$$

先用左上角与右下角实线(主对角线) 连接的两个元素相乘而得的项取“+”号，即 $a_{11}a_{22}$，再用右上角与左下角虚线(副对角线) 连接的两个元素相乘而得的项取“—”号，即 $-a_{12}a_{21}$，最后两项相加的代数和便得二阶行列式的展开式

$$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

上述方法称为**二阶行列式的对角线法则**.

按照对角线法则，(1.1-2) 式中，x_1、x_2 表达式的分子分别也是某个二阶行列式的展开式，即

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-a_{12}b_2,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

由此可见，$D_j\ (j=1,2)$ 实际上是 D 中的第 j 列被 b_1、b_2 替换后的结果.

于是，(1.1-2) 式可写成

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D}, \\ x_2=\dfrac{D_2}{D}. \end{cases}$$

其中 $D\neq 0$.

1.1.2　三阶行列式的定义

设由三个方程组成的三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{1.1-4}$$

其中 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$，$b_i(i=1,2,3)$ 为常数，$x_j(j=1,2,3)$ 为未知数.

同理，由消元法可知，当

$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\neq 0$ 时，

方程组(1.1-4)有唯一解：

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}, \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}, \\ x_3 = \dfrac{a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}. \end{cases} \tag{1.1-5}$$

从表达式(1.1-5)中可以总结以下规律：一是 $x_j(j=1,2,3)$ 的分母是相同的，且与方程组(1.1-4)中 x_j 的系数有关，与常数项无关；二是 $x_j(j=1,2,3)$ 的分子可以看作是将分母中 x_j 的系数 a_{1j}, a_{2j}, a_{3j} 分别用 b_1, b_2, b_3 替换而成的. 可见，一旦掌握了分母的计算规律，也就弄清了 x_j 的计算方法.

定义 1.2 将 3×3 个数排成 3 行 3 列，并在左右两侧各加一竖线，得到算式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1.1-6}$$

(1.1-6)式左端称为三阶行列式，记为 D；(1.1-6)式右端称为三阶行列式的展开式，其中 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 称为三阶行列式 D 的第 i 行、第 j 列的元素.

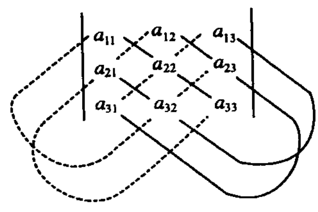


图 1.1

对于三阶行列式的展开式，可以借助图 1.1 来帮助记忆. 其中，三条实线连接的三个元素的乘积项 $a_{11}a_{22}a_{33}$、$a_{12}a_{23}a_{31}$、$a_{13}a_{21}a_{32}$ 依次取“+”号，三条虚线连接的三个元素的乘积项 $a_{11}a_{23}a_{32}$、$a_{12}a_{21}a_{33}$、$a_{13}a_{22}a_{31}$ 依次取“−”号，然后六项相加的代数和便是三阶行列式的展开式：

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31},$$

此即为三阶行列式的对角线法则.

有了三阶行列式的对角线法则，在方程组(1.1-4)的解 $x_j(j=1,2,3)$ 的表达式(1.1-5)中，分子也可以用三阶行列式 $D_j(j=1,2,3)$ 来表示，其中 D_j 是将 D 中 x_j 的系数 $a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}(j=1,2,3)$ 分别用常数项 b_1, b_2, b_3 替换而得.

于是，当方程组(1.1-4)的系数构成的行列式 $D \neq 0$ 时，有唯一解：

$$x_j = \frac{D_j}{D}\ (j = 1,2,3).$$

【例 1】 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -3 & 9 \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$；　(3) $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

【解】 (1) 由二阶行列式的定义或对角线法则，得

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} = 18 - (-21) = 39.$$

(2) 由三阶行列式的对角线法则，得

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\times2\times2 + 1\times1\times1 + 1\times1\times1 - 1\times2\times1$$
$$-2\times1\times1 - 1\times1\times2 = 4.$$

(3) 由对角线法则，得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = a_{11}a_{22}a_{33}.$$

1.1.3 *n* 阶行列式的定义

二阶和三阶行列式的计算可以利用对角线法则，而高于三阶的行列式，对角线法则将不再适用. 为此，下面归纳给出一般 n 阶行列式的定义.

定义 1.3 将 $n \times n$ 个数排成 n 行 n 列，并在其左、右两边各加一竖线，即

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称 D_n 为 n 阶行列式，它表示一个由确定的运算关系所得到的数，即

当 $n = 1$ 时，$D_1 = a_{11}$；

当 $n = 2$ 时，$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$；

当 $n \geqslant 2$ 时，

$$D_n = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}. \tag{1.1-7}$$

(1.1-7) 式称为 n 阶行列式按第一行展开的展开式. D_n 中, a_{ij} 表示第 i 行第 j 列的元素, $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 的**代数余子式**, M_{ij} 称为元素 a_{ij} 的**余子式**,它是由 D_n 中划去第 i 行和第 j 列后余下的元素所组成的 $n-1$ 阶行列式,即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

从定义中可知,余子式和代数余子式仅差一个符号 $(-1)^{i+j}$.

例如,三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

中,元素 a_{21} 的余子式为

$$M_{21}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

a_{21} 的代数余子式为:

$$A_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=-\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

由定义 1.3 得知, n 阶行列式是借助 $n-1$ 阶行列式定义的,而 $n-1$ 阶行列式又可借助 $n-2$ 阶行列式定义,……,以此类推, n 阶行列式最终可通过三阶或二阶行列式来定义.

事实上,可以验证二阶行列式的展开式(1.1-3) 和三阶行列式的展开式(1.1-6) 与 n 阶行列式的展开式(1.1-7) 是一致的.

【例 2】 用两种方法计算下列三阶行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

【解】 方法一　对角线法则:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\times 3\times 2+2\times 1\times 3+2\times 1\times 3-3\times 3\times 3-2\times 2\times 2 -1\times 1\times 1=-18.$$

方法二　按第一行展开：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\times\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2\times\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 3\times\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 5 - 2\times 1 + 3\times(-7) = -18.$$

【例 3】　计算四阶行列式

$$D_4 = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 3 & 7 & -2 & 0 \end{vmatrix}.$$

【解】　D_4 按第一行展开：

$$D_4 = (-3)\times(-1)^{1+2}\times\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 3\times 2\times\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 6\times(-2) = -12.$$

【例 4】　计算下列 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的值.

【解】　将 D_n 按第一行展开，则有

$$D_n = a_{11}A_{11} + 0 + \cdots + 0$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

再将 A_{11} 按第一行展开，得：

$$D_n = a_{11}a_{22}\cdot A_{22},$$

依此类推得：$D_n = a_{11}a_{22}A_{22} = \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

通常，D_n 称为下三角行列式，而 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ **称为上三角行列式.**