张 威 杨月婷 编

数值分析

(第5版)习题解答

清华大学出版社

数值分析

(第5版)习题解答

张　威　杨月婷　编

清华大学出版社
北京

内容简介

本书是与李庆扬、王能超、易大义编写的《数值分析》第5版配套的辅导书.书中将教材中各章的“复习与思考题”及“习题”做了详尽的解答.尤其是对教材第5版所增加的复习与思考题的解答,可以帮助读者对各章知识进行归纳、提炼和梳理,有助于读者全面掌握各章的知识理论和方法,起到统揽全局的作用.习题部分的解答是在作者多年“数值分析”课程教学的基础上给出的,对于学生在学习过程中容易出现的问题,在解答中特别加以注意.

本书可供理工科各专业本科生、研究生学习“数值分析”课程使用,也可作为某些专业的同等学力申请学位或博士生入学考试的复习参考书.

图书在版编目(CIP)数据

数值分析(第5版)习题解答/张威,杨月婷编. --北京:清华大学出版社,2010.8

ISBN 978-7-302-23092-2

Ⅰ.①数…　Ⅱ.①张…②杨…　Ⅲ.①数值计算—高等学校—习题　Ⅳ.①O241-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第113992号

责任编辑:刘　颖

责任校对:刘玉霞

责任印制:杨　艳

出版发行:清华大学出版社　　**地　址**:北京清华大学学研大厦A座

http://www.tup.com.cn　　**邮　编**:100084

社　总　机:010-62770175　　**邮　购**:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969,c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质　量　反　馈:010-62772015,zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印　装　者:北京嘉实印刷有限公司

经　销:全国新华书店

开　本:185×230　　**印　张**:9　　**字　数**:206千字

版　次:2010年8月第1版　　**印　次**:2010年8月第1次印刷

印　数:1~4000

定　价:15.00元

产品编号:034910-01

目　　录

第 1 章　数值分析与科学计算引论

复习与思考题解答

1. 什么是数值分析？它与数学科学和计算机的关系如何？

答　数值分析也称计算数学，是数学科学的一个分支，主要研究的是用计算机求解各种数学问题的数值计算方法及其理论与软件实现.

数值分析以数学问题为研究对象，但它并不像纯数学那样只研究数学本身的理论，而是把理论与计算紧密结合，着重研究数学问题的数值方法及其理论.

2. 何谓算法？如何判断数值算法的优劣？

答　一个数值问题的算法是指按规定顺序执行一个或多个完整的进程，通过算法将输入元变换成输出元.

一个面向计算机，有可靠理论分析且计算复杂性好的算法就是一个好算法. 因此判断一个算法的优劣应从算法的可靠性、准确性、时间复杂性和空间复杂性几个方面考虑.

3. 列出科学计算中误差的三个来源，并说出截断误差与舍入误差的区别.

答　用计算机解决实际问题首先要建立数学模型，它是对被描述的实际问题进行抽象、简化而得到的，因而是近似的，数学模型与实际问题之间出现的误差叫做模型误差.

在数学模型中往往还有一些根据观测得到的物理量，如温度、长度等，这些参量显然也包含误差，这种由观测产生的误差称为观测误差.

当数学模型不能得到精确解时，通常要用数值方法求它的近似解，其近似解和精确解之间的误差称为截断误差或方法误差.

有了求解数学问题的计算公式以后，用计算机做数值计算时，由于计算机字长有限，原始数据在计算机上表示时会产生误差，计算过程又可能产生新的误差，这种误差称为舍入误差.

截断误差和舍入误差是两个不同的概念，截断误差是由所采用的数值方法而产生的，因而也称方法误差，舍入误差是由数值计算而产生的.

4. 什么是绝对误差与相对误差？什么是近似数的有效数字？它与绝对误差和相对误差有何关系？

答　设 x 为准确值，x^* 为 x 的一个近似值，称 $e^*=x^*-x$ 为近似值 x^* 的绝对误差，简称误差. 近似值的误差 e^* 与准确值 x 的比值 $\frac{e^*}{x}=\frac{x^*-x}{x}$ 称为近似值 x^* 的相对误差，记作 e_r^*.

通常我们无法知道误差的准确值，只能根据测量工具或计算情况估计出误差绝对值的一个上界 ε^*，ε^* 叫做近似值的误差限.

若近似值 x^* 的误差限是某一位的半个单位，该位到 x^* 的第一位非零数字共有 n 位，就说

x^* 有 n 位有效数字.

有效数位越多,绝对误差限越小,相对误差限也越小.

5. 什么是算法的稳定性? 如何判断算法稳定? 为什么不稳定算法不能使用?

答　一个算法如果输入数据有误差,而在计算中舍入误差不增长,则称此算法是数值稳定的;否则称为不稳定的.

判断一个算法是否稳定主要是看初始数据误差在计算中的传播速度,如果传播速度很快就是数值不稳定的.

对于不稳定的算法来说,由于其误差传播是逐步扩大的,因而计算结果不可靠,所以不稳定的算法是不能使用的.

6. 什么是问题的病态性? 它是否受所用算法的影响?

答　对一个数值问题本身来说,如果输入数据有微小扰动(即误差),引起输出数据(即问题解)相对误差很大,这就是病态问题.

病态性是数值问题本身固有的,不是由计算方法引起的,病态性并不受所用算法的影响,对病态问题必须采用特殊的方法以减少误差危害.

7. 什么是迭代法? 试利用 $x^3-a=0$ 构造计算$\sqrt[3]{a}$的迭代公式.

答　迭代法是一种按同一公式从初始值开始重复计算逐次逼近真值的算法,是数值计算普遍使用的重要方法.

在计算$\sqrt[3]{a}$时,可从等价的方程求根问题 $x^3-a=0$ 出发,利用方程的等价形式 $x=\frac{1}{3}\left(2x+\frac{a}{x^2}\right)$即可得到计算$\sqrt[3]{a}$的迭代公式

$$x_{k+1}=\frac{1}{3}\left(2x_k+\frac{a}{x_k^2}\right),\quad k=0,1,2,\cdots,\quad x_0\text{ 给定}.$$

8. 直接利用以直代曲的原则构造求方程 $x^2-a=0$ 的根 $x^*=\sqrt{a}$的迭代法.

答　求方程 $f(x)=0$ 的根在几何上就是求曲线 $y=f(x)$与 x 轴交点 x^* 的横坐标. 假如已给出一个近似值 x_k,用该点$(x_k,f(x_k))$处的切线逼近曲线,令 x_{k+1} 为该切线与 x 轴交点的横坐标,一般情况下,x_{k+1} 近似方程根 x^* 的程度比 x_k 近似 x^* 的程度要好,这就是以直代曲的思想. 曲线 $y=x^2-a$ 在点$(x_k,f(x_k))$处的切线方程为 $y=2x_kx-x_k^2-a$,切线方程的根 $x=\frac{1}{2}\left(x_k+\frac{a}{x_k}\right)$,以此作为新的近似值,就得到了求方程 $x^2-a=0$ 的根 $x^*=\sqrt{a}$的迭代公式

$$x_{k+1}=\frac{1}{2}\left(x_k+\frac{a}{x_k}\right),\quad k=0,1,2,\cdots,\quad x_0\text{ 给定}.$$

9. 举例说明什么是松弛技术.

答　在积分近似计算的梯形公式 $T_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{h}{2}[f(x_{i-1})+f(x_i)]$ 中,取 $n=1,2$ 可分别得

$$T_1=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)],$$

$$T_2 = \frac{b-a}{4}[f(a)+2f(c)+f(b)], \quad c = \frac{a+b}{2}.$$

令

$$S_1 = T_2 + \omega(T_2 - T_1) = (1+\omega)T_2 - \omega T_1,$$

若取 $\omega = 1/3$,则得

$$S_1 = \frac{4}{3}T_2 - \frac{1}{3}T_1 = \frac{b-a}{6}[f(a)+4f(c)+f(b)],$$

这就是松弛技术,ω 称为松弛因子.

10. 考虑无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$,它是发散的,在计算机上计算它的部分和,会得到什么结果?为什么?

答 虽然在理论上无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是发散的,但在计算机上计算时,由于计算机只能进行有限数的计算,所以无论 n 取多大的值,级数的和都是有限数. 即使对于有限值的 n,当 n 较大时,$\frac{1}{n}$ 较小. 如果小到在计算机内视为计算机零,则对部分和就没有贡献了. 这时所得的部分和就是常数了.

11. 判断下列命题的正确性:

(1) 解对数据的微小变化高度敏感是病态的.

(2) 高精度运算可以改善问题的病态性.

(3) 无论问题是否病态,只要算法稳定都能得到好的近似值.

(4) 用一个稳定的算法计算良态问题一定会得到好的近似值.

(5) 用一个收敛的迭代法计算良态问题一定会得到好的近似值.

(6) 两个相近数相减必然会使有效数字损失.

(7) 计算机上将 1000 个数量级不同的数相加,不管次序如何结果都是一样的.

答 (1) 对. 病态就是根据这一现象定义的.

(2) 错. 病态性是问题本身固有的,与所采用的方法无关.

(3) 错. 只有当问题为良态时,稳定的算法才有可能得到好的近似值.

(4) 错. 用一个稳定的算法计算良态问题是否能得到好的近似值还依赖于初始值选取得是否适当.

(5) 错. 用收敛的迭代法计算良态问题时,同样依赖于初始值选取的问题.

(6) 错. 如果两个相近数直接相减,大多会使有效数字损失. 但可以通过等价变换转化成其他运算而避免有效数字损失.

(7) 错. 次序不加处理和次序加以处理的结果一般是不一样的. 尤其是当所加的数据的数量级相差较大时. 此时,将数量级相近的数据调整到一起相加结果会准确些.

习题解答

1. 设 $x>0$,x 的相对误差为 δ,求 $\ln x$ 的误差.

解 设 x 的近似数为 x^*,则由假设有 $\frac{x^*-x}{x^*}=\delta$. 对于 $f(x)=\ln x$,因 $f'(x)=\frac{1}{x}$,故由

$$\varepsilon(f(x^*))\approx|f'(x^*)|\varepsilon(x^*)$$

得

$$\ln x-\ln x^*=\varepsilon(f(x^*))\approx\left|\frac{1}{x^*}\right|(x^*-x)=\frac{1}{x^*}(x^*-x)=e_r(x^*)=\delta,$$

即 $e(\ln x^*)\approx\delta$.

2. 设 x 的相对误差为 2%,求 x^n 的相对误差.

解 设 $f(x)=x^n$,则此计算函数值问题的条件数为

$$C_p=\left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\right|=\left|\frac{x\cdot nx^{n-1}}{x^n}\right|=n,$$

又因为计算函数值问题的条件数定义为函数值的相对误差与自变量相对误差的比值,即 $\varepsilon_r((x^*)^n)\approx C_p\cdot\varepsilon_r(x^*)$,所以 $\varepsilon_r((x^*)^n)\approx n\cdot 2\%=0.02n$.

3. 下列各数都是经过四舍五入得到的近似数,即误差限不超过最后一位的半个单位,试指出它们是几位有效数字:

$$x_1^*=1.1021,\quad x_2^*=0.031,\quad x_3^*=385.6,\quad x_4^*=56.430,\quad x_5^*=7\times1.0.$$

解 由于近似数的误差限不超过最后一位的半个单位,所以

$x_1^*=1.1021$ 有 5 位有效数字;

$x_2^*=0.031$ 有 2 位有效数字;

$x_3^*=385.6$ 有 4 位有效数字;

$x_4^*=56.430$ 有 5 位有效数字;

$x_5^*=7\times1.0$ 有 2 位有效数字.

4. 利用公式(2.3)求下列各近似值的误差限:

(1) $x_1^*+x_2^*+x_4^*$;

(2) $x_1^*x_2^*x_3^*$;

(3) x_2^*/x_4^*.

其中 x_1^*,x_2^*,x_3^*,x_4^* 均为第 3 题所给的数.

解 因为

$$\varepsilon(x_1^*)=\frac{1}{2}\times10^{-4},\quad \varepsilon(x_2^*)=\frac{1}{2}\times10^{-3},$$

$$\varepsilon(x_3^*)=\frac{1}{2}\times10^{-1},\quad \varepsilon(x_4^*)=\frac{1}{2}\times10^{-3},$$

所以

$$\varepsilon(x_1^*+x_2^*+x_4^*)=\varepsilon(x_1^*)+\varepsilon(x_2^*)+\varepsilon(x_4^*)$$

$$= \frac{1}{2}\times 10^{-4} + \frac{1}{2}\times 10^{-3} + \frac{1}{2}\times 10^{-3}$$
$$= 1.05\times 10^{-3}.$$

$$\varepsilon(x_1^* x_2^* x_3^*) = |x_1^* x_2^*|\varepsilon(x_3^*) + |x_2^* x_3^*|\varepsilon(x_1^*) + |x_1^* x_3^*|\varepsilon(x_2^*)$$
$$= |1.1021\times 0.031|\times\frac{1}{2}\times 10^{-1} + |0.031\times 385.6|$$
$$\times\frac{1}{2}\times 10^{-4} + |1.1021\times 385.6|\times\frac{1}{2}\times 10^{-3}$$
$$\approx 0.215.$$

$$\varepsilon(x_2^*/x_4^*) \approx \frac{|x_2^*|\varepsilon(x_4^*) + |x_4^*|\varepsilon(x_2^*)}{|x_4^*|^2}$$
$$= \frac{0.031\times\frac{1}{2}\times 10^{-3} + 56.430\times\frac{1}{2}\times 10^{-3}}{56.430\times 56.430}$$
$$\approx 0.9\times 10^{-5}.$$

5. 计算球体积要使相对误差限为 1%，问度量半径 R 时允许的相对误差限是多少？

解 球体体积公式为 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$，体积计算的条件数

$$C_p = \left|\frac{R\cdot V'}{V}\right| = \left|\frac{R\cdot 4\pi R^2}{\frac{4}{3}\pi R^3}\right| = 3,$$

所以，$\varepsilon_r(V^*)\approx C_p\cdot\varepsilon_r(R^*)=3\varepsilon_r(R^*)$.

又因为 $\varepsilon_r(V^*)=1\%$，所以度量半径 R 时允许的相对误差限

$$\varepsilon_r(R^*) = \frac{1}{3}\varepsilon_r(V^*) = \frac{1}{3}\times 1\% \approx 0.0033.$$

6. 设 $Y_0=28$，按递推公式

$$Y_n = Y_{n-1} - \frac{1}{100}\sqrt{783},\quad n=1,2,\cdots$$

计算到 Y_{100}. 若取 $\sqrt{783}\approx 27.982$(5 位有效数字)，试问计算 Y_{100} 将有多大误差？

解 因为 $Y_n=Y_{n-1}-\frac{1}{100}\sqrt{783}$，所以

$$Y_{100} = Y_{99} - \frac{1}{100}\sqrt{783},\quad Y_{99} = Y_{98} - \frac{1}{100}\sqrt{783},$$
$$Y_{98} = Y_{97} - \frac{1}{100}\sqrt{783},\quad \cdots,\quad Y_1 = Y_0 - \frac{1}{100}\sqrt{783},$$

依次代入，有

$$Y_{100} = Y_0 - 100\times\frac{1}{100}\sqrt{783},$$

即

$$Y_{100} = Y_0 - \sqrt{783}.$$

若取 $\sqrt{783} \approx 27.982$，则 $\varepsilon(27.982) = \frac{1}{2} \times 10^{-3}$，于是 $Y_{100}^* = Y_0 - 27.982$，这时

$$\varepsilon(Y_{100}^*) = \varepsilon(Y_0^*) + \varepsilon(27.982) = 0 + \frac{1}{2} \times 10^{-3} = \frac{1}{2} \times 10^{-3},$$

即 Y_{100} 的误差限为 $\frac{1}{2} \times 10^{-3}$.

7. 求方程 $x^2 - 56x + 1 = 0$ 的两个根，使它至少具有 4 位有效数字（$\sqrt{783} \approx 27.982$）.

解　由求根公式

$$x_{1,2} = 28 \pm \sqrt{783},$$

于是

$$x_1 = 28 + \sqrt{783} \approx 28 + 27.982 = 55.982$$

具有 5 位有效数字.

$$x_2 = 28 - \sqrt{783} = \frac{1}{28 + \sqrt{783}} \approx \frac{1}{28 + 27.982} = \frac{1}{55.982} \approx 0.017\,863$$

具有 5 位有效数字.

8. 当 $x \approx y$ 时计算 $\ln x - \ln y$ 有效位数会损失. 改用 $\ln x - \ln y = \ln \frac{x}{y}$ 是否就能减少舍入误差？（提示：考虑对数函数何时出现病态.）

解　当 $x \approx y$ 时，直接计算 $\ln x - \ln y$ 会出现两相近数相减，从而引起有效位数的损失. 若改用 $\ln x - \ln y = \ln \frac{x}{y}$ 进行计算，则首先应考虑对数函数的病态性问题. 设 $f(x) = \ln x$，则计算对数函数值的条件数为

$$C_p = \left| \frac{x f'(x)}{f(x)} \right| = \left| \frac{x \cdot \frac{1}{x}}{\ln x} \right| = \left| \frac{1}{\ln x} \right|,$$

可见当 $x \approx 1$ 时，C_p 充分大，问题为病态的，而当 $x \approx y$ 时，$\frac{x}{y} \approx 1$，故用 $\ln x - \ln y = \ln \frac{x}{y}$ 不能减少舍入误差.

9. 正方形的边长大约为 100 cm，应怎样测量才能使其面积误差不超过 1 cm^2？

解　正方形的面积函数为 $A(x) = x^2$，所以 $\varepsilon(A^*) = 2x^* \cdot \varepsilon(x^*)$.

当 $x^* = 100$ 时，则 $\varepsilon(A^*) = 2x^* \cdot \varepsilon(x^*) = 200 \cdot \varepsilon(x^*)$. 若 $\varepsilon(A^*) \leqslant 1$，则

$$\varepsilon(x^*) \leqslant \frac{1}{200} = \frac{1}{2} \times 10^{-2},$$

即测量中边长误差限不超过 0.005 cm 时，才能使面积误差不超过 1 cm^2.

10. 设 $S = \frac{1}{2} g t^2$，假定 g 是准确的，而对 t 的测量有 ± 0.1 s 的误差，证明当 t 增加时 S 的

绝对误差增加,而相对误差却减少.

证明 因为 $S=\frac{1}{2}gt^2$,所以 $\varepsilon(S)=gt\cdot\varepsilon(t)=0.1gt$. 又

$$\varepsilon_r(S)=\frac{\varepsilon(S)}{|S|}=\frac{gt\cdot\varepsilon(t)}{\frac{1}{2}gt^2}=2\frac{\varepsilon(t)}{t}=\frac{0.2}{t},$$

所以当 t 增加时 S 的绝对误差增加,相对误差减少.

11. 序列 $\{y_n\}$ 满足递推关系

$$y_n=10y_{n-1}-1,\quad n=1,2,\cdots,$$

若 $y_0=\sqrt{2}\approx1.41$(三位有效数字),计算到 y_{10} 时误差有多大?这个计算过程稳定吗?

解 由递推关系式

$$\begin{aligned}y_n&=10y_{n-1}-1=10(10y_{n-2}-1)-1\\&=10^2y_{n-2}-[1+10^1]\\&=10^2(10y_{n-3}-1)-[1+10^1]\\&=10^3y_{n-3}-[1+10^1+10^2]\\&=\cdots\\&=10^ny_0-\sum_{i=0}^{n-1}10^i\\&=10^ny_0-\frac{1}{9}(10^n-1)\\&=10^n\left(\sqrt{2}-\frac{1}{9}\right)+\frac{1}{9},\end{aligned}$$

于是

$$y_{10}=10^{10}\left(\sqrt{2}-\frac{1}{9}\right)+\frac{1}{9},\quad y_{10}^*=10^{10}\left(1.41-\frac{1}{9}\right)+\frac{1}{9},$$

$$\varepsilon(y_{10}^*)=10^{10}\varepsilon(y_0^*)=10^{10}\times\frac{1}{2}\times10^{-2}=\frac{1}{2}\times10^8,$$

由于 y_{10} 的误差限是 y_0 误差限的 10^{10} 倍,所以这个计算过程不稳定.

12. 计算 $f=(\sqrt{2}-1)^6$,取 $\sqrt{2}\approx1.4$,利用下列等式计算,哪一个得到的结果最好?

$$\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^6},\quad(3-2\sqrt{2})^3,$$

$$\frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3},\quad 99-70\sqrt{2}.$$

解 设 $y=(x-1)^6$,若 $x=\sqrt{2}$,$x^*=1.4$,则 $\varepsilon(x^*)=\frac{1}{2}\times10^{-1}$.

若通过 $\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^6}$ 计算 y 值,即计算函数 $f(x)=(x+1)^{-6}$ 在 $x^*=\sqrt{2}$ 处的值. 由于 $f'(x)=-6(x+1)^{-7}$,故由 $\varepsilon(f(x^*))\approx|f'(x^*)|\varepsilon(x^*)$,得

$$\varepsilon(y^*) = \left|-6 \times \frac{1}{(x^*+1)^7}\right| \cdot \varepsilon(x^*) = \frac{6}{x^*+1} y^* \varepsilon(x^*) = 2.5 y^* \varepsilon(x^*).$$

若通过$(3-2\sqrt{2})^3$ 计算 y 值，即计算函数 $f(x)=(3-2x)^3$ 在 $x^*=\sqrt{2}$处的值. 由于 $f'(x)=-6(3-2x)^2$，故得

$$\varepsilon(y^*) = |-6(3-2x^*)^2| \cdot \varepsilon(x^*) = \frac{6}{3-2x^*} y^* \varepsilon(x^*) = 30 y^* \varepsilon(x^*).$$

若通过$\dfrac{1}{(3+2\sqrt{2})^3}$计算 y 值，即计算函数 $f(x)=(3+2x)^{-3}$在 $x^*=\sqrt{2}$处的值. 由于 $f'(x)=-6(3+2x)^{-4}$，故得

$$\varepsilon(y^*) = \left|\frac{-6}{(3+2x^*)^4}\right| \cdot \varepsilon(x^*) = 6 \times \frac{1}{3+2x^*} y^* \varepsilon(x^*) \approx 1.0345 y^* \varepsilon(x^*).$$

若通过 $99-70\sqrt{2}$计算 y 值，即计算函数 $f(x)=99-70x$ 在 $x^*=\sqrt{2}$处的值. 由于 $f'(x)=-70$，故得

$$\varepsilon^*(y) = |-70| \cdot \varepsilon(x^*) = 70\varepsilon(x^*).$$

比较 4 个结果并注意 $y^*<1$ 知，通过$\dfrac{1}{(3+2\sqrt{2})^3}$计算得到的结果最好.

13. $f(x)=\ln(x-\sqrt{x^2-1})$，求 $f(30)$的值. 若开平方用 6 位函数表，问求对数时误差有多大？若改用另一等价公式

$$\ln(x-\sqrt{x^2-1}) = -\ln(x+\sqrt{x^2-1})$$

计算，求对数时误差有多大？

解　因为 $f(x)=\ln(x-\sqrt{x^2-1})$，所以 $f(30)=\ln(30-\sqrt{899})$.

设 $u=\sqrt{899}$，$y=f(30)$，则由 6 位函数表 $u^*=29.9833$，因而

$$\varepsilon(u^*) = \frac{1}{2} \times 10^{-4}.$$

对于 $f(u)=\ln(30-u)$，有 $f'(u)=\dfrac{-1}{30-u}$. 由 $\varepsilon(f(u^*)) \approx |f'(u^*)|\varepsilon(u^*)$，得

$$\varepsilon(y^*) \approx \frac{1}{|30-u^*|} \cdot \varepsilon(u^*) = \frac{1}{0.0167} \cdot \varepsilon(u^*) \approx 3 \times 10^{-3}.$$

若改用另一等价公式

$$\ln(x-\sqrt{x^2-1}) = -\ln(x+\sqrt{x^2-1}),$$

则 $f(30)=-\ln(30+\sqrt{899})$. 此时 $f(u)=-\ln(30+u)$，故 $f'(u)=-\dfrac{1}{30+u}$. 于是

$$\varepsilon(y^*) = \left|-\frac{1}{30+u^*}\right| \cdot \varepsilon(u^*) = \frac{1}{59.9833} \cdot \varepsilon(u^*) \approx 8 \times 10^{-7}.$$

所以用等价公式 $\ln(x-\sqrt{x^2-1}) = -\ln(x+\sqrt{x^2-1})$计算误差较小.

14. 用秦九韶算法求多项式 $p(x)=3x^5-2x^3+x+7$ 在 $x=3$ 处的值.

解　由秦九韶算法，有

$$p(x)=3x^5-2x^3+x+7=((3x^2-2)x^2+1)x+7.$$

当 $x=3$ 时

$$p(3)=((3\times 3^2-2)\times 3^2+1)\times 3+7=685.$$

15. 用迭代法 $x_{k+1}=\frac{1}{1+x_k}(k=0,1,\cdots)$ 求方程 $x^2+x-1=0$ 的正根 $x^*=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$,取 $x_0=1$,计算到 x_5,问 x_5 有几位有效数字.

解 取 $x_0=1$,利用迭代公式 $x_{k+1}=\frac{1}{1+x_k}(k=0,1,\cdots)$,有

$$x_1=0.5,\quad x_2=0.666\,667,\quad x_3=0.6,\quad x_4=0.625,\quad x_5=0.615\,384.$$

由于

$$x^*=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=0.618\,033\cdots,$$

$$|x^*-x_5|=0.002\,65\cdots<\frac{1}{2}\times 10^{-2},$$

所以 x_5 有 2 位有效数字.

16. 用不同的方法计算积分 $\int_0^{1/2}e^x dx$:

(1) 用原函数计算到 6 位小数.

(2) 用复合梯形公式(4.7),取步长 $h=\frac{1}{4}$.

(3) 利用 T_1 及 T_2 的松弛法(4.8)求 S_1.

解 (1) 被积函数 e^x 的原函数仍为 e^x,故由牛顿—莱布尼茨公式

$$\int_0^{1/2}e^x dx=e^{1/2}-e^0\approx 0.648\,721.$$

(2) 由复合梯形公式

$$\int_0^{1/2}e^x dx=\sum_{i=1}^{2}\frac{h}{2}[f(x_{i-1})+f(x_i)]=\frac{1}{8}[e^0+2e^{1/4}+e^{1/2}]\approx 0.652\,096.$$

(3) 由梯形公式

$$T_1=\frac{1}{4}[e^0+e^{1/2}]\approx 0.662\,180,$$

$$T_2=\frac{1}{8}[e^0+2e^{1/4}+e^{1/2}]\approx 0.652\,096,$$

代入松弛法公式,得

$$S_1=\frac{4}{3}T_2-\frac{1}{3}T_1\approx 0.648\,735.$$

17. 将 15 题迭代前后的值加权平均构成迭代公式

$$x_{k+1}=\omega x_k+(1-\omega)\frac{1}{1+x_k}.$$

验证若取 $\omega=\frac{7}{25}$,则上述公式比 15 题迭代收敛快.

解　取 $x_0=1,\omega=\frac{7}{25}$,将 15 题及本题的加权平均迭代公式计算结果列表如下：

k	$x_{k+1}=\frac{1}{1+x_k}$	有效数位	$x_{k+1}=\omega x_k+(1-\omega)\frac{1}{1+x_k}$	有效数位
0	1		1	
1	0.5		0.64	1
2	0.666 667	1	0.618 024	4
3	0.6	1	0.618 034	5
4	0.625	1		
5	0.615 384	2		

可见加权平均迭代公式的收敛速度大大加快.

第 2 章　插　值　法

复习与思考题解答

1. 什么是拉格朗日插值基函数？它们是如何构造的？有何重要性质？

答　若 n 次多项式 $l_j(x)(j=0,1,\cdots,n)$ 在 $n+1$ 个节点 $x_0<x_1<\cdots<x_n$ 上满足条件

$$l_j(x_k)=\begin{cases}1, & k=j,\\ 0, & k\neq j,\end{cases}\quad j,k=0,1,\cdots,n,$$

则称这 $n+1$ 个 n 次多项式 $l_0(x),l_1(x),\cdots,l_n(x)$ 为节点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 上的 n 次拉格朗日插值基函数.

以 $l_k(x)$ 为例，由 $l_k(x)$ 所满足的条件知 $l_k(x)$ 以 $x_0,\cdots,x_{k-1},x_{k+1},\cdots,x_n$ 为零点，再考虑到 $l_k(x)$ 为 n 次多项式，故可设

$$l_k(x)=A(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n),$$

其中 A 为常数，利用 $l_k(x_k)=1$ 得

$$1=A(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n),$$

故

$$A=\frac{1}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)},$$

即

$$l_k(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}.$$

对于 $l_i(x)(i=0,1,\cdots,n)$，有 $\sum\limits_{i=0}^{n}x_i^k l_i(x)=x^k(k=0,1,\cdots,n)$，特别当 $k=0$ 时，有

$$\sum_{i=0}^{n}l_i(x)=1.$$

2. 什么是牛顿基函数？它与单项式基 $\{1,x,\cdots,x^n\}$ 有何不同？

答　称 $\{1,x-x_0,(x-x_0)(x-x_1),\cdots,(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})\}$ 为节点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 上的牛顿基函数，利用牛顿基函数，节点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 上函数 $f(x)$ 的 n 次牛顿插值多项式 $P_n(x)$ 可以表示为

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1}),$$

其中 $a_k=f[x_0,x_1,\cdots,x_k](k=0,1,\cdots,n)$. 与拉格朗日插值多项式不同，牛顿插值基函数在增加节点时可以通过递推逐步得到高次的插值多项式，例如

$$P_{k+1}(x)=P_k(x)+a_{k+1}(x-x_0)\cdots(x-x_k),$$

其中 a_{k+1} 是节点 $x_0,x_1,\cdots,x_{k+1}$ 上的 $k+1$ 阶差商，这一点要比使用单项式基 $\{1,x,\cdots,x^n\}$ 方便得多.

3. 什么是函数的 n 阶均差？它有何重要性质？

答 称 $f[x_0,x_k]=\dfrac{f(x_k)-f(x_0)}{x_k-x_0}$ 为函数 $f(x)$ 关于点 x_0,x_k 的一阶均差，称 $f[x_0,x_1,x_k]=\dfrac{f[x_0,x_k]-f[x_0,x_1]}{x_k-x_1}$ 为 $f(x)$ 关于点 x_0,x_1,x_k 的二阶均差. 一般地，称

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\frac{f[x_0,\cdots,x_{n-2},x_n]-f[x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}]}{x_n-x_{n-1}}$$

为 $f(x)$ 关于点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 的 n 阶均差.

均差具有如下基本性质：

(1) n 阶均差可以表示为函数值 $f(x_0),f(x_1),\cdots,f(x_n)$ 的线性组合，即

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\sum_{j=0}^{n}\frac{f(x_j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)},$$

该性质说明均差与节点的排列次序无关，即均差具有对称性.

(2) $f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\dfrac{f[x_1,x_2,\cdots,x_n]-f[x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}]}{x_n-x_0}$.

(3) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在 n 阶导数，且节点 $x_0,x_1,\cdots,x_n\in[a,b]$，则 n 阶均差与 n 阶导数的关系为

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!},\quad \xi\in[a,b].$$

4. 写出 $n+1$ 个点的拉格朗日插值多项式与牛顿均差插值多项式，它们有何异同？

答 给定区间 $[a,b]$ 上 $n+1$ 个点

$$a\leqslant x_0<x_1<\cdots<x_n\leqslant b$$

上的函数值 $y_i=f(x_i)(i=0,1,\cdots,n)$，则这 $n+1$ 个节点上的拉格朗日插值多项式为

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}y_kl_k(x),$$

其中

$$l_k(x)=\prod_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n}\left(\frac{x-x_j}{x_k-x_j}\right),\quad k=0,1,\cdots,n.$$

这 $n+1$ 个节点上的牛顿插值多项式为

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1}),$$

其中 $a_k=f[x_0,x_1,\cdots,x_k](k=0,1,\cdots,n)$ 为 $f(x)$ 在点 $x_0,x_1,\cdots,x_k$ 上的 k 阶均差.

由插值多项式的唯一性，$L_n(x)$ 与 $P_n(x)$ 是相同的多项式，其差别只是使用的基底不同，牛顿插值多项式具有承袭性，当增加节点时只需增加一项，前面的工作依然有效，因而牛顿插值比较方便计算，而拉格朗日插值没有这个优点.

5. 插值多项式的确定相当于求解线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$，其中系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与使用的基函数有关. $\boldsymbol{y}$ 包含的是要满足的函数值 $(y_0,y_1,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$. 用下列基底作多项式插值时，试描述矩阵