LINEAR ALGEBRA

线性代数

薛国宾◎著

東南大學出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

线性代数

Linear Algebra

薛国宾 著

东南大学出版社
·南京·

内容提要

本书提供了全新的、独一无二的教材体系，“易教易学”是本教材的最大特色。本书包含现有通用教材的全部知识点，能解决现有通用教材中的全部问题，但作者对教材进行了新的诠释，提出了一系列新的视角，从而大大减轻了教与学的负担。作者从事工科数学教学四十多年的经验和不懈的探索，使本书既能调动学习有困难同学的积极性，又能保证要考研同学之需。本书主要供非研究型大学的工、财、管类专业使用。如果选讲部分内容，也适合专科和职业技术学院使用。本书对一本学生有很好的参考价值，同时也很值得不讲授线性代数的数学教师们一读，因为创新是永恒的主题。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/薛国宾著. —南京：东南大学出版社，2010.6

ISBN 978-7-5641-2286-7

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①薛… Ⅲ. ①线性代数—高等学校—教材 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 107182 号

出版发行	东南大学出版社
社　　址	南京市四牌楼 2 号(邮编：210096)
出 版 人	江　汉
责任编辑	杨小军(025—83790586；bioyangxj@126.com)
经　　销	江苏省新华书店
印　　刷	南京京新印刷厂
开　　本	700 mm×1000 mm　1/16
印　　张	11.5
字　　数	232 千字
版　　次	2010 年 6 月第 1 版　2010 年 7 月第 1 次印刷
印　　数	1－4 000 册
书　　号	ISBN 978-7-5641-2286-7
定　　价	18.00 元

前言 Preface

“易教易学易及格”是本书写作的宗旨；特别重视对学生科技素质的培养，是本书另一特色。

创新是实现宗旨的基本手段。本书提供的是一个全新的独一无二的教材体系，和一系列新颖的视角。书中包含常见教材的几乎全部内容，能解决常见教材的几乎全部问题。

作者用这个体系已讲授过十几遍，效果很好。比如

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\0 & -3 & -6\\0 & -6 & -12\end{pmatrix}$$

即第一行不变；把第一行乘以-4的结果加到第二行；

把第一行乘以-7的结果加到第三行。

本书中说，第一行中的元素1被培养成了基础元素，它就是本书中所说的“线性代数基本技能”的核心内容。在本书的前四章中，**“加头”＋线性代数基本技能＋“续尾”**，一技独挺，辅之以本书倡导的素质培养，就能够解决除矩阵乘法和复杂行列式计算两类问题之外的几乎全部十几类问题：方程组类型的各类问题，续尾时主要关注自由未知数；向量组类型的各类问题，续尾时主要关注全0行；秩、最大无关组等类型的各类问题，续尾时主要关注基础元素个数和位置。

这就大大减轻了教和学的负担，让学生能比较轻松地学习并轻松地应对考试中的大分值题目。对试卷中现在流行的小分题的可能命题范围，书中则加了边框，以便于记忆和考前应急翻阅。编书到这种地步，不就易教易学了吗？

一位著名的代数学家曾经说过，(教学中)“线性相关线性无关，实在是一关”，足见此处教学之难。本书中轻而易举地解决了这一难题：写成矩阵(加头)；施行线性代数基本技能；能变换出全0行，线性相关，不能变换出全0行，线性无关(续尾)。

若变换出了全0行，比如$\mathbf{0}=-2\boldsymbol{\alpha}_1+5\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，稍一引伸即为传统的定义。

这是使用本教材体系在教学中最精彩的一幕。

作者希望大多数同学在学过本书之后，不是“考完就忘光”，而是在若干年后依

然对本书主线能有较清晰的记忆；希望有人会把学习《线性代数》视为大学生活中的快乐时光。

本书作者从上世纪60年代即开始研究工科数学教学，曾阅读过某专业所有各门课程的教材，调查过毕业生的工作场所和工作内容，分析过他们将来的发展方向，较深刻地感受到工科培养目标与理科有很大的差异，但理科毕业的工科数学教师却常常把自己受到的理科训练照搬到工科的课堂上，部分地背离了目标而不自知。对非重点高校的学生，热衷于“曲径通幽”的习题和考题、热衷于奇妙解法，就是典型的表现。在此提请各位老师注意。

本书中包含足够的内容以照顾考研同学之需，所以本书也能为这些同学提供良好的服务：他们可以轻松地完成讲授内容的学习，也就可以更仔细地阅读本书，相信本书可以给他们许多智慧的启迪。

本书是线性代数教材中的仿“下里巴人”之作。数学原本是“科学的女王”，当然是极品的“阳春白雪”了，但是，随着高等教育的逐步大众化，昔日尽享尊荣的“女王”，现在也要走向大众。本书给走向大众的“女王”一个仿“下里巴人”的包装，这需要“下里巴人”式的视角和“下里巴人”式的智慧。本书作者认为，“易教易学”是应用型教学的“硬道理”，理由就是“走向大众”。

讲授全部内容而又易教易学，难！非常难！但本书做到了，目前独一无二地做到了，虽然是以仿“下里巴人”的方式。

本书初稿写作时，未从任何书籍资料中抄过一句话，也请后到达人不要抄袭我的书。

本书第五、六章有管志强参与编写。

本书得到宿迁学院各级领导的关爱和大力支持，得到系内系外同仁的诸多帮助，责编杨小军先生更使本书增色多多，作者在此一并深致谢意。

许立春先生为网站的开通和运行提供了热情的帮助，谨此致谢。

高金荣女士对本书出版给予了许多技术支持，谨此致谢。

作者学浅识薄，如蒙指教，烦告 gaorong0527@163.com，不胜感激。

作　者

2010年2月

目录 Contents

第四章 行列式

第五章 线性空间

第六章　相似矩阵与二次型

第七章　应用线性代数开创的杰出理论

第一章　线性方程组与矩阵

§1　线性代数基本技能

【例 1.1.1】
$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+\ \ x_4=0 \cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ 2x_1+\ \ x_2-2x_3-2x_4=0 \cdots\cdots\cdots\cdots ② \\ x_1-\ \ x_2-4x_3-3x_4=0 \cdots\cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$$

这是一个线性方程组，且等号右边的常数全是 0，这样的方程组叫做**齐次线性方程组**.

值得一提的是，用 x_1、x_2、x_3、x_4 来表示未知数，实在是一项前人的巧妙创造，它不但可以轻易地表示不管多少个未知数，还可以一般性地进行讨论 ——用 x_1、x_2、…、x_n 来表示"n 个未知数".

书写方程组时，把各个 x_1、x_2、x_3、…、x_n 均上下对齐是一个非常重要的好习惯.

这个方程组的求解过程是(本书不使用代入法)：

第一步：选取一个方程，比如①；然后在①中选取一个未知数，比如 x_1. 方程①不变，并且写下面的方程组时先写①. 利用①，消去其他方程中的 x_1：

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+x_4=0 \cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ (0x_1\ ) \\ (0x_1\ ) \end{cases}$$

(书写方程组时本应在各方程均写完后再写左端的联立号，本书此处这样写是为了凸显"方程①不变".)

为了消去方程②中的 x_1，把①乘以 -2 的结果加到方程②上，即①$\times(-2)+$②，作为新方程组的第二个方程：

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+\ \ x_4=0 \cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ \quad -3x_2-6x_3-4x_4=0 \cdots\cdots\cdots\cdots ② \\ (0x_1\ ) \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} -2x_1-4x_2-4x_3-2x_4=0\cdots ①\times(-2) \\ +)\ 2x_1+x_2-2x_3-2x_4=0\cdots ② \\ \hline -3x_2-6x_3-4x_4=0\cdots ④ \end{array}$$

为了消去方程③中的 x_1，把①乘以 -1 的结果加到方程③上，即①×(−1)+③，作为新方程组的第三个方程：

$$\begin{cases} \boxed{x_1}+2x_2+2x_3+\ x_4=0 \cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ \quad -3x_2-6x_3-4x_4=0 \cdots\cdots\cdots\cdots ④ \\ \quad -3x_2-6x_3-4x_4=0 \cdots\cdots\cdots\cdots ⑤ \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl} & -x_1-2x_2-2x_3-\ x_4=0\cdots ①\times(-1) \\ +) & \ \ x_1-\ x_2-4x_3-3x_4=0\cdots ③ \\ \hline & \quad -3x_2-6x_3-4x_4=0\cdots ⑤ \end{array}$$

所得到的新的方程组与原方程组同解.

在这个新的方程组中，只有第一个方程中有 x_1，其余方程中都没有 x_1，此时我们说：

x_1 是方程①的基础未知数.

并把上述变换过程称之为

把方程①中的 x_1 培养成基础未知数.

基础未知数是一个方程的"标志"，是一个方程的"一面旗帜". 看一个方程组首先要看的就是，它的各个方程有没有自己的基础未知数. 求解一个方程组，首先要做的就是，给尚没有基础未知数的诸方程依次培养出各自的基础未知数来.

其实，前面的第一步，就是在看到三个方程都没有自己的基础未知数之后，决定先给方程①培养基础未知数的. 之后，决定培养方程①中的 x_1.

第二步：(尽可能多地培养基础未知数)在尚没有基础未知数的方程④、⑤中选取一个方程，比如④；在④中选取一个未知数，比如 x_2. 把④中的 x_2 培养成基础未知数：方程④不变，并且写下面的方程组时先写④；利用④消去其余方程中的 x_2.

$$\begin{cases} (0x_2) \\ -3x_2-6x_3-4x_4=0 \cdots\cdots\cdots\cdots ④ \\ (0x_2) \end{cases}$$

把④×$\frac{2}{3}$加到①上，即④×$\frac{2}{3}$+①；把④×(−1)加到⑤上，即④×(−1)+⑤，得到

$$\begin{cases} x_1 \qquad\quad -2x_3-\frac{5}{3}x_4=0 \cdots\cdots\cdots\cdots ⑥ \\ \quad -3x_2\ -6x_3-\ 4x_4=0 \cdots\cdots\cdots\cdots ④ \\ \qquad\qquad \mathbf{0} \qquad\quad =0 \cdots\cdots\cdots\cdots ⑦ \end{cases}$$

这个方程组与原方程组同解.

方程⑤变成了方程⑦：$0x_1+0x_2+0x_3+0x_4=0$. 我们用大一点的"$\mathbf{0}$"表示 $0x_1+0x_2+0x_3+0x_4$，而把这个方程写作 $\mathbf{0}=0$. 一个方程本来是诸未知数之间相互关系的一个表达、一个限制、一个约束，方程⑦完全没有这种作用，故可称这一类的方程

为"**无用方程**". 方程⑦是由③一路变换形成的，我们说③是原方程组内的"**不独立方程**"——如果从原方程组中删去③，对这个方程组的解将毫无影响. 当然，这是就功用而言的，在解方程组的实施过程中不要删除它，也不要变动各方程的上下次序.

称原方程组中的方程①、②为**独立方程**. 基础未知数的个数等于独立方程的个数.

下面的内容称为线性代数基本技能：

培养基础未知数. 尽可能多地培养基础未知数. 注意基础未知数的个数.

(培养基础未知数，直到剩余的没有基础未知数的方程，都成了 **0**= 0 为止.)

本例中，现在方程组内的每个独立方程都有了自己的基础未知数，其个数为 2.

之后，我们把其余的未知数称作"**自由未知数**"，自由未知数是可以任意取值的未知数.

第三步："续尾"(见本书开头的"前言")：令 $x_3=c_3$、$x_4=c_4$. 这里的 c_3、c_4 是任意常数，且二者互无关系、互不相扰. 接下来求出方程组的解：

$$\begin{cases} x_1 = \ \ 2c_3+\dfrac{5}{3}c_4 & \text{(注：由⑥)} \\ x_2=-2c_3-\dfrac{4}{3}c_4 & \text{(注：由④)} \\ x_3= \quad c_3 & \\ x_4= \qquad\quad c_4 & \end{cases}$$

这一类解称为通解，在这里是全部解的意思. 给出 c_3、c_4 各一个值，就得到一组解.

在书写通解的时候，让 c_3、c_4 分别上下对齐是一个好习惯.

最后顺便说一句，一个方程只能有一个基础未知数. 如果一个方程中有不止一个未知数符合条件，我们只能任择其一，其余的当作自由未知数. 而且，通解中等于任意常数的，一般是自由未知数.

方程组类型的问题，"续尾"时主要关注自由未知数.

一般的，有 n 个未知数 m 个方程的齐次线性方程组具有下面的形式：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$

其中，第 i 个方程中未知数 x_j 的系数是 a_{ij}.

(1) 齐次线性方程组肯定有解. 至少 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 是它的一组解，称为

零解.

(2) 求解 n 个未知数 m 个方程的齐次线性方程组时,施行线性代数基本技能,当每个独立方程都有了自己的基础未知数之后,如果 $m \geqslant n$ 且方程组没有自由未知数,方程组只有唯一解——零解.

也就是说,不失一般性,假设方程组变换成了下面的形式($m>n$ 时另有 $\mathbf{0}=0$):

$$\begin{cases} \lambda_1 x_1 & & & =0 \\ & \lambda_2 x_2 & & =0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda_n x_n =0 \end{cases}$$

则方程组只有唯一解.

(3) 如果独立方程个数 r 小于未知数的个数 n,就有自由未知数,方程组就有无穷多组解(有非零解).

齐次线性方程组解的个数之类的题目,使用下面的结论来"续尾":

> 若方程组有 r 个独立方程($r \leqslant n$ 且 $r \leqslant m$),则基础未知数的个数为 r,自由未知数个数为 $n-r$,不独立方程的个数是 $m-r$.
>
> 有自由未知数,齐次线性方程组有无穷多组解;无自由未知数,齐次线性方程组只有唯一解.

有的题目常使用"有非零解".其实在这里,"有非零解"、"有自由未知数"、"有无穷多组解"是一致的.

一般来说,有 n 个未知数、m 个方程且最多能培养出 r 个基础未知数的齐次线性方程组,其 m 、n 、r 之间有下述关系(表 1.1.1):

表 1.1.1

	自由未知数个数	解的个数	不独立方程的个数
$r<n$	$n-r$	无穷多	?
$r=n$	0	唯一解	?
$r<m$	?	?	$m-r$
$r=m$	?	?	0
$r=m=n$	0	唯一解	0

§2 矩阵和线性代数基本技能

在例 1.1.1 中,当原方程组经同解变换变成另一个(与之同解的)方程组时,有两点应该引起我们的注意:

(1) 因为是齐次线性方程组,所以等号右边的常数永远是0.

(2) 在同解变换中,改变的只不过是未知数的系数.

于是,我们可以用下面的形式来"简记"三个方程组,并称之为方程组的系数矩阵:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 1\\ 2 & 1 & -2 & -2\\ 1 & -1 & -4 & -3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 1\\ 0 & -3 & -6 & -4\\ 0 & -3 & -6 & -4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & -\frac{5}{3}\\ 0 & -3 & -6 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

三个方程组之间的关系是同解,三个矩阵之间的关系称为"等价",并把前面使用基本技能的过程简记为

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 1\\ 2 & 1 & -2 & -2\\ 1 & -1 & -4 & -3\end{pmatrix}\xrightarrow[-r_1+r_3]{-2r_1+r_2}\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 1\\ 0 & -3 & -6 & -4\\ 0 & -3 & -6 & -4\end{pmatrix}\xrightarrow[-r_2+r_3]{\frac{2}{3}r_2+r_1}\begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & -\frac{5}{3}\\ 0 & -3 & -6 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

注意:不能用等号.

在矩阵中,把上面的行变形称为矩阵的第三类初等行变换.本书中简记为(Ⅲ),并把第一行**基础元素** 1 所在的列和第二行的基础元素 −3 所在的列称为基础列.

※ ※ ※

线性代数基本技能就是:(在矩阵中,利用**第三类初等行变换**)

> 培养基础元素.
> 尽可能多地培养基础元素.
> 注意基础元素个数 r.

尽可能多地培养基础元素,就要给每个非全0行都培养出自己的基础元素.

> 基础元素个数 r,称为这个矩阵的行秩.

后面会知道,矩阵的行秩就等于秩 $R(\boldsymbol{A})$.求矩阵的秩一类的问题,常使用这个结论来"续尾":$R(\boldsymbol{A})=r$.

与方程组类似,每一个非全0行只能有一个基础元素.

※ ※ ※

【例 1.2.1】 求解齐次线性方程组.

$$\begin{cases}x_1+\ x_2-3x_3-\ x_4=0\\ 3x_1-\ x_2-3x_3+4x_4=0\\ x_1+5x_2-8x_3-6x_4=0\end{cases}$$

解 $\begin{pmatrix}1&1&-3&-1\\3&-1&-3&4\\1&5&-8&-6\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&-3&-1\\0&-4&6&7\\0&4&-5&-5\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-\frac{3}{2}&\frac{3}{4}\\0&-4&6&7\\0&0&1&2\end{pmatrix}$

$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{15}{4}\\0&-4&0&-5\\0&0&1&2\end{pmatrix}$

$\therefore\begin{cases}x_1 \quad\quad\quad +\frac{15}{4}x_4=0\\ \quad -4x_2 \quad - \ 5x_4=0\\ \quad\quad\quad x_3+\ 2x_4=0\end{cases}$ 令 $x_4=c$ $\therefore\begin{cases}x_1=-\frac{15}{4}c\\x_2=-\frac{5}{4}c\\x_3=-2\ c\\x_4=\quad c\end{cases}$

(4 个未知数；3 个基础未知数；1 个自由未知数；0 个不独立方程)

【例 1.2.2】 判断下面方程组解的个数：

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=0\\4x_1+5x_2+6x_3=0\\7x_1+8x_2+10x_3=0\\a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0\end{cases}$$

解 $\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&10\\a_1&a_2&a_3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&-6&-11\\a_1&a_2&a_3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&-3&-6\\0&0&1\\a_1&a_2&a_3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-3&0\\0&0&1\\a_1&a_2&a_3\end{pmatrix}$

$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-3&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

$r=3=n$，方程组有唯一解.

※ ※ ※

矩阵的初等行变换有三类，但本书主要使用第三类：

(Ⅲ) 某一行本身不变，把这一行乘以 k 的结果加到另一行上.

今后就将它简称为“初等行变换”或“变换”，简记为(Ⅲ).

§3 关于齐次线性方程组的解

一个齐次线性方程组，如果独立方程个数 r 小于未知数的个数 n，就有自由未知数，方程组就有无穷多组解（有非零解）. 这时就有个问题：由于对基础未知数的不同选取，同样是这个题的无穷多组解，解会表现为不同的形式. 以例 1.1.1 为例，它又可如下求解：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\therefore \begin{cases} -3x_1-3x_2 \qquad +x_4=0 \\ 4x_1+5x_2+2x_3 \qquad =0 \\ \mathbf{0} \qquad =0 \end{cases} \quad 令 x_1=c_1 \quad x_2=c_2$$

$$\therefore \begin{cases} x_1= c_1 \\ x_2= c_2 \\ x_3=-2c_1-\dfrac{5}{2}c_2 \\ x_4= 3c_1+3c_2 \end{cases} \qquad （下称解二）$$

前面的解（下称解一）是 $\begin{cases} x_1= 2c_3+\dfrac{5}{3}c_4 \\ x_2=-2c_3-\dfrac{4}{3}c_4 \\ x_3= c_3 \\ x_4= c_4 \end{cases}$.

这两组解之间有联系吗？答案是肯定的. 并且这两组解是“互通”的，因为它们都是此方程组的全部解. 所谓互通是指它们之间可以相互表达.

事实上，由解一中 x_1、x_2 的表达式，若令 $\begin{cases} c_1=2x_3+\dfrac{5}{3}x_4 \\ c_2=-2x_3-\dfrac{4}{3}x_4 \end{cases}$，

求解出的 x_3、x_4 一定是解二中 x_3、x_4 的表达式. 反之亦然.

在第二章 §5 中会对此问题有更深入的探讨.

※ ※ ※

从哪个方程中选取未知数进行“培养”，这个方程就成了独立方程. 一个有不独立方程的方程组，比如例 1.1.1，在不同的解法中，由于基础未知数选取的不同，哪个方程是独立方程，哪个方程是不独立方程，情况一般也是不一样的.

在解法一和解法二中，我们培养的基础未知数均来自上面的两个方程. 所以最下面的一个方程成了不独立方程. 但若换个解法(解法三)：

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 1\\ 2 & 1 & -2 & -2\\ 1 & -1 & -4 & -3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}-3 & 0 & 6 & 5\\ 2 & 1 & -2 & -2\\ 3 & 0 & -6 & -5\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3}\\ 3 & 0 & -6 & -5\end{pmatrix},$$

则其解(解三)和解一并无不同，但现在，下面两个方程是独立方程，最上面一个成了不独立方程. 因此，培养基础未知数的过程，也是挑选独立方程的过程和淘汰不独立方程(如果有)的过程.

> 因为全部解是固定的，因此，不论通解的表现形式如何(比如例 1.1.1 的解一和解二)，任意常数的个数是相同的($n-r$).
>
> 于是，自由未知数的个数是相同的($n-r$)，基础未知数的个数是相同的(r).
>
> [独立方程的个数是相同的(r). 不独立方程的个数也是相同的($m-r$)].

§4 非齐次线性方程组的求解

有 n 个未知数 m 个方程的非齐次线性方程组，其一般形式为

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \qquad\vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$$

其中，b_1、b_2、…、b_m不全为零.

非齐次线性方程组的求解过程与齐次线性方程组类似.

【例 1.4.1】 求解非齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2-3x_3-x_4=1\\ 3x_1-x_2-3x_3+4x_4=4\\ x_1+5x_2-8x_3-6x_4=0\end{cases}$$

这个方程组与例 1.2.1 的区别只在等号右边的常数上. 因诸常数不全为 0，在同解变换中这些常数又通常会有变化，故求解方程组时应将这些常数写入矩阵；又因常数与未知数系数毕竟有质的区别，故在矩阵中应将它们相互隔离. 称此矩阵为**增广矩阵**. 增广矩阵最多能培养出的基础元素个数，本书中记为 r'.

解 $$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & -3 & -1 & 1\\ 3 & -1 & -3 & 4 & 4\\ 1 & 5 & -8 & -6 & 0\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & -3 & -1 & 1\\ 0 & -4 & 6 & 7 & 1\\ 0 & 4 & -5 & -5 & -1\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{cccc:c}1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{4} & \frac{5}{4}\\ 0 & -4 & 6 & 7 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{cccc:c}1 & 0 & 0 & \frac{15}{4} & \frac{5}{4}\\ 0 & -4 & 0 & -5 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0\end{array}\right)(r'=r=3)$$

$$\therefore\begin{cases}x_1 \qquad\qquad +\frac{15}{4}x_4=\frac{5}{4}\\ \quad -4x_2 \qquad -5x_4=1\\ \qquad\qquad x_3+2x_4=0\end{cases}\quad 令\ x_4=c$$

$$\therefore\begin{cases}x_1=-\frac{15}{4}c+\frac{5}{4}\\ x_2=-\frac{5}{4}c-\frac{1}{4}.\\ x_3=-2c\\ x_4=c\end{cases}$$

令 $x_4=c$ 及由此所得的解，是求解非齐次线性方程组的"续尾".

这个通解的等号右边部分，可以看作是下面两个解

$$\begin{cases}x_1=-\frac{15}{4}c\\ x_2=-\frac{5}{4}c\\ x_3=-2c\\ x_4=c\end{cases}\quad 和 \quad\begin{cases}x_1=+\frac{5}{4}\\ x_2=-\frac{1}{4}\\ x_3=0\\ x_4=0\end{cases}$$ 等号右边部分对应相加之和.

前者是这个非齐次线性方程组对应的齐次线性方程组的通解(见例 1.1.1)；后者是这个非齐次线性方程组的一个解($x_4=0$ 时)，称为特解；因此有下面的结论(第二、三章中都有进一步的探讨)：

非齐通解＝对应的齐次通解＋非齐特解

注意：对这句话不宜过度解读.

【例 1.4.2】 求解非齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2-3x_3-x_4=1\\ 3x_1-x_2-3x_3+4x_4=4\\ x_1+5x_2-9x_3-8x_4=5\end{cases}$$

解 $\left(\begin{array}{cccc:c}1 & 1 & -3 & -1 & 1\\ 3 & -1 & -3 & 4 & 4\\ 1 & 5 & -9 & -8 & 5\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{cccc:c}1 & 1 & -3 & -1 & 1\\ 0 & -4 & 6 & 7 & 1\\ 0 & 4 & -6 & -7 & 4\end{array}\right)$