高等学校教材

数学分析习题课讲义

上册

江兆林　等编

南海出版公司

数学分析习题课讲义

上册

主　编　江兆林　韩振来　张乐中　陶　洁
副主编　王守信　刘良臣　姜凤山　杨　莉
　　　　孙书荣　白宝钢
编　委　杨丽宁

南海出版公司
1995・海口

琼新登字 01 号

数学分析习题课讲义
江兆林　等编

总 经 理　霍宝珍
责任编辑　原式溶
封面设计　刘金廷

南海出版公司出版发行
新 华 书 店 经 销
费县第二印刷厂印刷

850×1168 毫米　32 开　19.5 印张　490 千字
1995 年 9 月第 1 版　1995 年 9 月第 1 次印刷
印数 1～3000

ISBN7—80570—485—6/G・171

（上、下册）　定价：18.00 元

前　言

鉴于目前许多学校，数学分析习题课没有教材，我们组织全国部分高等师范院校中多年来一直从事数学分析教学，有丰富教学实践经验的教师编写了这本书。

本书分为上、下册，共 17 章，分别与《数学分析》教材相对应。上册包括：第一章函数；第二章极限；第三章连续函数；第四章导数与微分；第五章中值定理与导数应用；第六章极限与连续性（续）；第七章不定积分；第八章定积分；第九章定积分的应用；下册包括：第十章数值级数；第十一章函数级数；第十二章广义积分与含参变量积分；第十三章多元函数及其连续性；第十四章多元函数微分学；第十五章隐函数；第十六章重积分；第十七章曲线积分与曲面积分、场论和 8 套各类试题及解答。每章又包括：一、本章重点；二、内容提要；三、典型例题分析；四、复习参考题。并且在书末配了答案或提示。

本章重点　各章的重点是根据各章的内容重点、目的要求和教材所处的地位所确定的，主要目的是使读者在教与学的过程中较好地把握好教材的重点。

内容提要　教材的各章都有主次之分，对于主要内容，老师要讲好，学生要学好，书应该越读越薄，每一章中真正应该牢记住，并成为您解题武器的内容其实并不多，这一部分就是为这方面准备的。

典型例题分析　每章典型例题的选取，系统性强，采用由浅入深，逐步介绍各种方法与技巧的方式，一般包括：(1)是非题；(2)证明题；(3)计算题；(4)综合题；(5)经济生活中的实际应用例题。所选例题难易适度，联系实际，较客观地反映了学习数学分析应掌握的基础知识，编者从多年数学分析习题课教学的经验出发，在许多例题上加了思路“分析”，“说明”，只要读者重视这两个方面，就

可达到举一反三，触类旁通的目的。

复习参考题　我们考虑到目前教材中所配习题一般较少，特补充部分难易适中的习题供读者练习之用。

与同类教材相比，本教材突出体现三大特点：第一，淡化某些繁杂形式，注重核心内容；第二，增加了社会经济生活中的实际应用问题；第三，采用现代数学符号系统，渗透现代数学的思想与方法。

本教材可作为师专、教育学院、电大、函大等数学系学生《数学分析》习题课教材或参考书。

另外，需要说明的是，本书第 13 章由河南安阳教育学院姜凤山老师编写。

在本书编写过程中，得到各参编院校有关领导的大力支持和帮助，在此表示衷心的感谢！

由于作者水平所限，时间又紧迫，教材中出现的缺点和错误在所难免，恳请读者批评指正，以便今后修订再版。

编　者

1995 年 9 月

目　录

第一章　函数

一、本章重点

1. 实数集及其性质，绝对值不等式，区间、邻域与确界.

2. 深刻理解函数、反函数、复合函数、基本初等函数与初等函数的概念.

3. 函数的几种表示法.

4. 函数的四则运算、复合运算.

5. 几种特殊类型的函数(有界函数、单调函数、奇偶函数、周期函数).

二、内容提要

1. 实数概述

凡能写成无限十进小数形式的数叫做实数. 若它是循环的则为有理数(可表示为形如$\frac{p}{q}$，p、q 为整数且 $q \neq 0$)，若它是不循环的，则为无理数.

(1) 实数的性质

1° 实数对加、减、乘、除(除数不得为 0) 四则运算是封闭的.

2° 实数是有序的.

3° 实数全体具有稠密性.

4° 实数具有阿基米德性，即对任意两个实数 a 与 b，且 $b > a >$

0，必存在正整数 N，使得 $Na > b$.

5° 全体实数与数轴上的点具有一一对应的关系.

(2) 绝对值与不等式

实数 a 的绝对值定义为

$$|a| = \begin{cases} a, a \geqslant 0, \\ -a, a < 0. \end{cases}$$

从数轴上看，$|a|$ 是点 a 到原点 O 的距离.

关于绝对值有如下性质：

1° $|a| = |-a| \geqslant 0$，当且仅当 $a = 0$ 时，$|a| = 0$.

2° $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$. 当且仅当 $a = 0$ 时，等式成立

3° $|a| < h \Leftrightarrow -h < a < h$；$|a| \leqslant h \Leftrightarrow -h \leqslant a \leqslant h$.

4° $\forall\, a$、$b \in \boldsymbol{R}$，有 $|a| - |b| \leqslant |a \pm b| \leqslant |a| + |b|$.

5° $|ab| = |a||b|$.

6° $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|} (b \neq 0)$.

伯努利不等式：设 $h > -1$，n 为自然数，则有

$$(1+h)^n \geqslant 1 + nh.$$

平均值不等式：设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为 n 个正实数，则有

$$\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}.$$

(3) 区间与邻域

$(a,b) = \{x | a < x < b, x \in \boldsymbol{R}\}$ 称为开区间；

$[a,b] = \{x | a \leqslant x \leqslant b, x \in \boldsymbol{R}\}$ 称为闭区间；

类似地可定义 $(a, +\infty)$、$[a, +\infty)$、$(-\infty, a)$、$(-\infty, a]$、$(a,b]$、$[a,b)$ 等等，一般地 $\boldsymbol{R} = (-\infty, +\infty)$.

$U(a,\delta) = \{x \,|\, |x-a| < \delta, x \in \boldsymbol{R}\}$ 称为点 a 的 δ 邻域；

$U^{\circ}(a,\delta) = \{x \,|\, 0 < |x-a| < \delta, x \in \boldsymbol{R}\}$ 称为点 a 的空心 δ 邻域；

$U_+(a,\delta) = \{x \,|\, 0 \leqslant x - a < \delta_1, x \in \boldsymbol{R}\}$ 称为点 a 的 δ 右邻

域；

$U_{-}(a,\delta)=\{x\mid -\delta<x-a\leqslant 0, x\in R\}$ 称为点 a 的 δ 左邻域；

$\forall M>0, U(+\infty,M)=\{x\mid M<x<+\infty, x\in \boldsymbol{R}\}$ 称为 $+\infty$ 的 M 邻域，简记为 $U(+\infty)$；$U(-\infty,M)=\{x\mid -\infty<x<-M, x\in \boldsymbol{R}\}$ 称为 $-\infty$ 的 M 邻域，简记为 $U(-\infty)$.

（4）有界集、确界原理

设 $S=\{x\}$ 为 $\boldsymbol{R}$ 中的一个数集，若 $\exists M(L)$，使得对 $\forall x\in S$，都有 $x\leqslant M(x\geqslant L)$，则称 S 为有上（下）界的数集，数 $M(L)$ 称为 S 的一个上（下）界. 若数集 S 既有上界又有下界，则称 S 为有界集，否则称为无界集.

定义 1.1 对于给定数集 $S=\{x\}$，若数 η 满足下述条件：

(i) η 是 S 的上界（即对 $\forall x\in S$，有 $x\leqslant\eta$）；

(ii) 对 $\forall \varepsilon>0$，必 $\exists x_0\in S$，使得 $x_0>\eta-\varepsilon$（即 η 是 S 的最小上界），则称数 η 为数集 S 的上确界，记作

$$\eta=\sup S \text{ 或 } \eta=\sup_{x\in S}\{x\}.$$

定义 1.2 对于给定数集 $S=\{x\}$，若数 ξ 满足下述条件：

(i) ξ 是 S 的下界（即对 $\forall x\in S$，有 $x\geqslant\xi$）；

(ii) 对 $\forall \varepsilon>0$，必 $\exists x_0\in S$，使得 $x_0<\xi+\varepsilon$（即 ξ 是 S 的最大下界），则称数 ξ 为数集 S 的下确界，记作 $\xi=\inf S$ 或 $\xi=\inf\limits_{x\in S}\{x\}$.

定理 1.1 （确界存在原理）非空有上（下）界数集，必有上（下）确界.

定理 1.2 （推广的确界存在原理）任一非空数集必有正常上（下）确界或非正常上（下）确界.

2. 函数

定义 1.3 设 $D\neq\varnothing, D\subset R$（即 D 是实数集 $\boldsymbol{R}$ 的非空子集，若对 $\forall x\in D$，按照对应法则 f，有唯一确定的 $y\in\boldsymbol{R}$ 与之对应，则

称 f 为定义在 D 上的函数. 记为

$$f:D \to \mathbf{R}(x \to y = f(x))$$

数集 D 称为函数 f 的定义域, y 称为 x 所对应的函数值, 记为 $y = f(x)$, 函数值的集合称为 f 的值域, 记为 $f(D)$. 即

$$f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\} \subset \mathbf{R}.$$

说明 1° 定义域 D 和对应法则 f 为函数的两个主要内容. 在数学分析中, 所谓两个函数相同, 是指它们的定义域和对应法则分别相同, 两者缺一不可.

2° 函数"$f:D \to R$"中 D 到 R 的对应只能是单值的.

3° 函数 f 给出了 x 轴上的点集 D 到 y 轴上点集 $\mathbf{R}$ 之间的单值对应, 亦称映射. 我们称 $f(a) \in \mathbf{R}$ 为映射 f 下 $a \in D$ 的象. a 则称为 $f(a)$ 的原象.

(1) 函数的表示法　主要有三种. 1° 解析法; 2° 列表法; 3° 图象法. 而在数学分析中, 侧重研究解析法.

(2) 几种特殊类型的函数

1° 有界函数: 若 $\exists$ 常数 k, 对 $\forall x \in D$, 有 $f(x) \leqslant k(f(x \geqslant k)$, 则称 $f(x)$ 在 D 上有上(下)界, k 称为 $f(x)$ 的上(下)界. 若 $\forall x \in D$, 总有 $|f(x)| \leqslant M, (M > 0)$, 则称 $f(x)$ 为 D 上的有界函数.

2° 单调函数: $\forall x_1、x_2 \in D$ 且 $x_1 < x_2$. 若 $f(x_1) \leqslant f(x_2)(f(x_1) \geqslant f(x_2))$, 则称 $f(x)$ 在 D 上单调递增(递减); 若 $f(x_1) < f(x_2)(f(x_1) > f(x_2))$, 则称 $f(x)$ 在 D 上严格单调递增(递减). 单调递增(递减)或严格单调递增(递减)的函数, 统称为单调函数. 而严格递增(递减)函数统称为严格单调函数.

3° 奇函数、偶函数:

奇函数: $\forall x \in D$(D 对称于原点 O), 有 $f(-x) = -f(x)$.

偶函数: $\forall x \in D$(D 对称于原点 O), 有 $f(-x) = f(x)$.

4° 周期函数:

设 $f(x)$ 在 D 上有定义, 若 $\exists l > 0$, 对 $\forall x \in D$, 且 $x \pm l \in$

D，有 $f(x \pm l) = f(x)$，称 $f(x)$ 为周期函数，l 称为 $f(x)$ 的周期.

由 $\forall\, x \in D$，且 $x \pm l \in D$ 表明，$\forall\, n \in N$，有 $x \pm 2l \in D$，$x \pm 3l \in D$，…，$x \pm nl \in D$，… 即数集 D 既无上界也无下界. 若 $l > 0$ 是 $f(x)$ 的周期，则 nl 也是它的周期.

若函数 $f(x)$ 有最小正周期，则称这个最小正周期为 $f(x)$ 的基本周期，通常所说的函数的周期即是指基本周期.

说明 1° 说函数 $f(x)$ 单调时，必须指明函数所在的区间.

2° 存在没有最小正周期的非常值的周期函数.（见本章例 10）

3° 两个周期函数的和或积未必是周期函数. 只有当两个周期的商为正有理数时，它们的和或积才是周期函数.

(3) 反函数

定义 1.4 设函数 $y = f(x), x \in D, y \in f(D)$. 若 $\forall\, y_0 \in f(D)$，在 D 中有唯一确定的 x_0 使得 $y_0 = f(x_0)$，则在 $f(D)$ 上确定一个函数，称为函数 $y = f(x)$ 的反函数，记作

$$f^{-1}: f(D) \to D \text{ 或 } x = f^{-1}(y), y \in f(D).$$

说明 1° 若 $y = f(x), x \in D$ 存在反函数 $x = f^{-1}(y), y \in f(D)$，则 D 与 $f(D)$ 之间是一一对应，即 $\forall\, x_1, x_2 \in D$，且 $x_1 \neq x_2$，则必有 $f(x_1) \neq f(x_2)$.

2° 若 $x = f^{-1}(y)$ 为 $y = f(x)$ 的反函数，则 $y = f(x)$ 也是 $x = f^{-1}(y)$ 的反函数. 而反函数的定义域与值域分别是直接函数的值域与定义域. 因此有

$$f^{-1}[f(x)] = x, x \in D; f[f^{-1}(y)] = y, y \in f(D).$$

(4) 复合函数

定义 1.5 设 $y = f(u), u \in D; u = \varphi(x), x \in E$. 若

$$E^* = \{x \mid \varphi(x) \in D, x \in E\} \neq \varnothing,$$

则在 E^* 上确定了一个由 $y = f(u)$ 与 $u = \varphi(x)$ 经过复合运算所得到的 y 为 x 的复合函数，记作

$$y = f(\varphi(x)), x \in E^*,$$

其中 $y = f(u)$ 称为外函数，$u = \varphi(x)$ 为内函数，u 为中间变量.

(5) 初等函数

1° 常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数这六类函数统称为基本初等函数.

2° 由基本初等函数经过有限次四则运算与复合运算步骤所得到的函数称为初等函数.

(6) 几种特殊函数

1° 振荡函数(图 1－1)

$$y = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

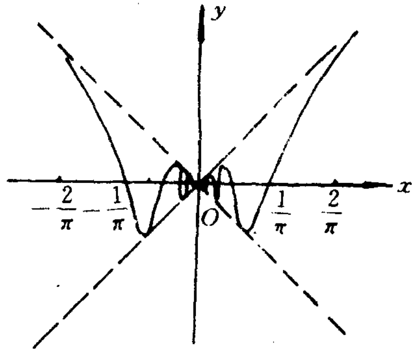

图 1－1

2° 符号函数(Kronecker)

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

由于 $\forall\, x \in \boldsymbol{R}$ 有 $|x| = x \cdot \operatorname{sgn} x$，所以 $\operatorname{sgn} x$ 起了符号的作用，这个函数称为符号函数．(图 1—2).

图 1－2

图 1－3

3° 狄利克雷(Dirichlet) 函数

$$y=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数}, \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数}.\end{cases}$$（图 1—3）.

4° 黎曼(Riemann) 函数

$$y=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & \text{当 } x=\dfrac{p}{q}\left(p、q \text{ 为正整数}, \dfrac{p}{q} \text{ 为既约分数}\right) \\ 0, & \text{当 } x=0 \text{ 及无理数}.\end{cases}$$

5° 整数部分函数

$\forall x\in \boldsymbol{R}$，对应的 y 是不超过 x 的最大整数记作

$y=[x]$，$x\in \boldsymbol{R}$，如图 1－4.

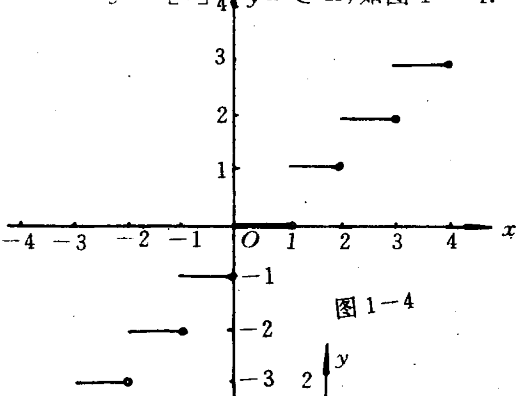

图 1－4

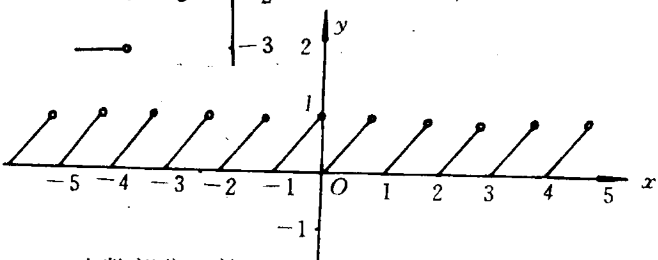

图 1—5

6° 小数部分函数

$y=x-[x]=(x)$，$x\in \boldsymbol{R}$. 如图 1－5.

三、典型例题分析

例 1　解不等式 $\left|\dfrac{x}{1+x}\right|>\dfrac{x}{1+x}$.

解 当$\frac{x}{1+x}\geqslant 0$时，显然无解.

当$\frac{x}{1+x}<0$时，$-\frac{x}{1+x}>\frac{x}{1+x}$，亦即$\frac{2x}{1+x}<0$，于是得不等式组$\begin{cases}2x>0\\1+x<0\end{cases}$①或$\begin{cases}2x<0\\1+x>0\end{cases}$②由组①得$\begin{cases}x>0\\x<-1\end{cases}$显然无解. 由组②得$\begin{cases}x<0\\x>-1\end{cases}$即$-1<x<0$，

所以原不等式的解为$-1<x<0$.

例 2 设a、b为任意实数，证明：

(1) $\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}$；

(2) $\max\{|a+b|,|a-b|,|1-b|\}\geqslant\frac{1}{2}$.

分析 (1) 右端$=\frac{|a|(1+|b|)+|b|(1+|a|)}{(1+|a|)(1+|b|)}$

$$=\frac{|a|+|b|+2|a|\cdot|b|}{1+|a|+|b|+|a|\cdot|b|},$$

对左端添加某些非负项放大，就能建立与右端的联系；(2) 应用关系式$\max\{|a|,|b|\}\geqslant\frac{1}{2}(|a|+|b|)$和三角不等式.

证 (1) $\because\ \frac{1}{1+|a+b|}\geqslant\frac{1}{1+|a|+|b|}$

$$\geqslant\frac{1}{1+|a|+|b|+|a|\cdot|b|}.$$

$$\therefore\ \frac{|a+b|}{1+|a+b|}=1-\frac{1}{1+|a+b|}$$

$$\leqslant 1-\frac{1}{1+|a|+|b|+|a|\cdot|b|}=\frac{|a|+|b|+|a||b|}{1+|a|+|b|+|a||b|}$$

$$\leqslant\frac{|a|+|b|+2|a||b|}{1+|a|+|b|+|a||b|}$$

$$=\frac{|a|(1+|b|)+|b|(1+|a|)}{(1+|a|)(1+|b|)}=\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.$$

(2) $\because\quad\max\{|a+b|,|a-b|\}\geqslant\frac{1}{2}(|a+b|+|b-a|)$

$$\geqslant \frac{1}{2}|a+b+b-a| = |b|,$$

$$\therefore \max\{|a+b|,|a-b|,|1-b|\} \geqslant \max\{|b|,|1-b|\}$$
$$\geqslant \frac{1}{2}(|b|+|1-b|) \geqslant \frac{1}{2}|b+1-b| = \frac{1}{2}.$$

例 3 证明:若数集 S 的上确界存在,则一定是唯一的.

证法一 设 $\eta=\sup S$. 若另有 $\eta'=\sup S$,则由上确界定义,η 为 S 的最小上界,η' 是 S 的一个上界,所以 $\eta\leqslant\eta'$;同理有 $\eta'\leqslant\eta$,故 $\eta'=\eta$. 即 S 的上确界是唯一的.

证法二 (反证法)设 η 与 η' 均为 S 的上确界,若 $\eta'\neq\eta$,不妨设 $\eta'<\eta$,由 $\eta=\sup S$ 及上确界定义,$\exists\, x_0\in S$,使 $x_0>\eta'$,这与 $\eta'=\sup S$ 矛盾,故 $\eta'=\eta$,即 S 的上确界是唯一的.

例 4 求下列函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$;　　(2) $y=\lg[\cos(\lg x)]$;

(3) $y=(x-|x|)\sqrt{-\sin^2\pi x}$;　(4) $y=\arcsin(2+3^x)$;

(5) $y=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}, x<0;\\ x,\quad 0<x<1;\\ 2,\quad 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$　　(6) $y=(2x)!$

分析:求函数的定义域,在不和具体问题结合的情况下,就是求使式子有意义的一切实数值,即存在域. 通常需考虑如下几点:(1) 分母不得为零;(2) 偶次根号下的式子非负;(3) 对数号后的真数为正;(4) 正(余)切函数符号后的值不等于 $k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\pi)(k=0,\pm 1,\cdots)$;(5) 反正、余弦符号后的值不大于 1;(6) 若函数由几项组成,取各项定义域的交集;(7) 分段函数取各段定义域的并.

解 (1) 欲使 $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$ 有意义,必须满足不等式组 $\begin{cases}1-x^2\neq 0\\ x+2\geqslant 0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x\neq\pm 1\\ x\geqslant -2\end{cases}$,因此,所求函数的定义域为

$[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

(2) 当 $\cos(\lg x)>0$ 即 $(2k-\frac{1}{2})\pi<\lg x<(2k+\frac{1}{2}\ \pi(k=0,\pm 1,\cdots)$ 时,函数有意义,所以原函数的定义域为

$$10^{(2k-\frac{1}{2})\pi}<x<10^{(2k+\frac{1}{2})\pi}(k=0,\pm 1,\cdots).$$

(3) 由于 $\sin^2\pi x\geqslant 0$,所以仅当 $\sin\pi x=0$ 时原函数才有意义,所以函数的定义域为 $x=k,(k=0,\pm 1,\cdots)$.

(4) 由于 $3^x>0$,即 $2+3^x>2$,不满足 $-1\leqslant 2+3^x\leqslant 1$,因此,原函数不存在定义域即无意义.

(5) 由于函数为分段表示的函数,所以定义为

$$(-\infty,0)\cup(0,2].$$

(6) 由于 $2x=n$,因而函数的定义域为 $x=\frac{n}{2}(n=0,1,2,\cdots)$,即 $x=0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},3,\cdots,\frac{n}{2},\cdots(n=0,1,2,\cdots)$.

例 5 设 $y=f(x)$ 的定义域是$[0,1]$,问(1)$f(x^2)$;

(2) $f(\sin x)$;(3)$f(x+a)+f(x-a)$,$(a>0)$ 的定义域是什么?

解 (1) $\because 0\leqslant x^2\leqslant 1$,$\therefore -1\leqslant x\leqslant 1$,
因此定义域为$[-1,1]$

(2) $\because 0\leqslant\sin x\leqslant 1$,$\therefore 2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi$,$(k=0,\pm 1,\cdots)$ 因此,函数的定义域为$[2k\pi,(2\kappa+1)\pi]$,(k 为整数).

(3) $\because\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1,\\0\leqslant x-a\leqslant 1;\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a,\\a\leqslant x\leqslant 1+a,\end{cases}$ $\quad(*)$

注意到 $a>0$,只能有两种情形:(i) 当 $1-a<a$ 时,即 $a>\frac{1}{2}$ 时,$(*)$ 无解,即定义域不存在;(ii) 当 $a\leqslant 1-a$ 时,即 $a\leqslant\frac{1}{2}$ 时,$(*)$ 的解为 $a\leqslant x\leqslant 1-a$,因此,定义域为$[a,1-a]$.

例 6 下列各题中,函数 $f(x)$,$g(x)$ 是否相同?为什么?在哪