



现代认知逻辑的 理论与应用

唐晓嘉 郭美云◎主编



科学出版社
www.sciencep.com

国家社会科学基金项目成果

项目名称：现代逻辑在人工智能中的应用研究

项目批准号：04BZX046

现代认知逻辑的 理论与应用

唐晓嘉 郭美云◎主编

科学出版社

北京

图书在版编目(CIP)数据

现代认知逻辑的理论与应用 / 唐晓嘉, 郭美云主编—北京: 科学出版社, 2010

ISBN 978-7-03-028746-5

I. ①现… II. ①唐… ②郭… III. ①认知逻辑 IV. ①B815.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 163821 号

责任编辑: 侯俊琳 郭勇斌 王国华 / 责任校对: 李 影

责任印制: 赵德静 / 封面设计: 无极书装

编辑部电话: 010-64035853

E-mail: houjunlin@mail.sciencep.com

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

新蕾印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010 年 10 月第 一 版 开本: B5 (720 × 1000)

2010 年 10 月第一次印刷 印张: 16 1/2

印数: 1—3 000 字数: 332 000

定价: 45.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前 言

人工智能是研究模拟人类认知智能行为及其规律的重要学科，基本任务是研制智能系统或机器来模仿、延伸和扩展人的认知能力，实现智能行为。认知智能行为的典型特征是逻辑推演，因此现代逻辑一直是人工智能的基础理论之一。智能系统中主体知识库的表达、主体推理模式的建立就充分地运用了一阶逻辑、直觉逻辑、模态逻辑、多值逻辑和模糊逻辑等。逻辑理论的发展推动了人工智能研究的深入，而人工智能研究的深化也不断提出新的逻辑课题，促进了现代逻辑理论的发展。在今天，与人的认知智能相关的各种问题已成为哲学逻辑、计算机科学、数学等理论的共同研究内容，而人工智能的逻辑应用则是逻辑学的一个交叉边缘性部门理论，它的研究不仅是对现有逻辑理论成果的运用和总结，并且它不断地提出新的理论问题，推动着逻辑理论的发展，同时也推动了哲学认识论研究的深化。认知逻辑是将现代逻辑理论应用于人工智能及人的认知活动研究而形成的一个专门逻辑领域，从某种意义上讲，它涵盖了现代逻辑应用于人工智能研究的许多重要而核心的内容。

本书分为八章。

第1章是认知逻辑的基础理论。现代认知逻辑的奠基人辛提卡（J. Hintikka）从分析认知概念的逻辑性质入手建立起第一个认知逻辑形式系统。在该系统中，认知概念的处理与逻辑模态词“必然”与“可能”的处理方法相类似，这样的认知逻辑因此被称做认知模态逻辑。认知模态逻辑刚开始是单主体的，对单主体系统进行扩展可得到多主体认知模态逻辑。认知模态逻辑是基本的认知逻辑系统。本章就从讨论基本模态逻辑理论入手，重点分析介绍早期经典认知逻辑系统，这些系统被认为是现代认知逻辑的基础。本章还对现代认知逻辑的一些基本概念和范畴进行非形式的描述，这也是形式化理论分析的一个必要环节。

第2章是时态认知逻辑。计算机科学中对程序执行进程的描述自然而然地会涉及时间渐变中的推理，从语义模型检测到纯粹的语形推理，时态逻辑技术都被广泛应用。此外，人工智能对设计便于计算的时态公式和时态表示方法也很感兴趣，因为这一领域经常涉及在不断变化的环境中制订合理的行动、为机器人构建常识推理机制等一些智能任务。因此，在智能设计中具有时态知识并能做出时态预言是基本的要求。本章从三个方面讨论时态认知逻辑：首先讨论基本时态逻辑

K_t , 它刻画的基本时态算子是 PA 和 FA , PA 表示“在过去的某个时间 A 是真的”。 FA 表示“在将来的某个时间 A 是真的”, 对公理化系统 K_t 的语形与语义、系统的可靠性和完全性进行了分析。然后讨论 S, U 时态逻辑系统, S (Since) 和 U (Until) 是二元时态算子, S, U 系统是 K_t 系统的扩张。本章最后采用将认知逻辑系统时态化的一般性方法, 将时态逻辑和认知逻辑结合起来, 建立一个时态认知逻辑系统, 并讨论了它的系统性质。

第3章是群体知识和多主体认知逻辑。主体之间的影响和互动很多是建立在群体知识的基础之上的, 这使得考虑各种群体知识一直是多主体认知逻辑研究中的一个热点问题。在多主体认知逻辑的基础上加入群体知识, 表明研究已经深入到了多主体系统, 与实际的社会性交流更为接近。本章主要考察如何将单主体的认知逻辑推广到多主体的情形。首先区分了群体知识中的分布式知识, 区分出分布式知识的两种直观意思——联合知识和群体隐含知识。形式化分析表明这两种知识有重要区别。符合完全交流原则的群体隐含知识和联合知识是一致的。有穷可分辨模型、紧密饱和模型、饱和和可分辨模型都符合完全交流原则。只有完全交流模型才真正完全地刻画了完全交流原则。这些结果还揭示出群体隐含知识和联合知识不一致的根本原因, 涉及语言对于可能世界的描述问题。然后在 van der Hoek 和 Meyer (1996) 建立的逻辑系统 $S5_m(C, D, E)$ 的基础上考虑 Kooi 和 van Benthem (2004) 提出的相对化公共知识 (relativized common knowledge), 并且把群体知识都推广到一般情形。考虑建立一个包含相对化公共知识和群体隐含知识的公理化系统 $S5_m^B(RC, D, E)$, 利用滤模型和拆开等手段对典范模型进行转换变形, 从而证明它是一个在强框架上完全的公理化系统。

第4章是公开宣告逻辑。动态认知过程中信息交流或知识交换的形式是多种多样的, 因此, 动态认知逻辑不能仅限于考虑一般的抽象认知活动, 而要研究具体的交流方式, 不同的交流方式有不同的逻辑特性。公开宣告是一种基本的交流方式, 很多其他交流方式可以在此基础上得到。公开宣告逻辑的产生使得动态认知逻辑有了真正的新发展, 公开宣告逻辑也成为动态认知逻辑的一类基础系统。本章在动态认知逻辑的基础系统——公开宣告逻辑基础上引进群体知识, 建立一个带有群体知识的公开宣告逻辑系统, 并且将其应用于一些交流活动中的知识表达和动态推理等方面问题的分析与解决。首先探讨了语言交流和动态认知逻辑的关系, 以实际交流活动中的提问和回答、泥孩难题、抛掷硬币等例子, 分析知识在这些活动中的更新和变化, 以及如何为之构建逻辑模型, 重点探讨公开宣告这种语言交流活动中的知识表达和模型变化。然后引入公开宣告逻辑, 这是交互性推理的基础, 包括公开宣告逻辑的语言和语义、公理化系统和完全性证明等几个方面。重点探讨如何对公开宣告这种认知行动进行逻辑表达和知识处理。紧接着

在公开宣告逻辑的基础上考虑群体隐含知识,引入相对化公共知识,建立了一个带有相对化公共知识和群体隐含知识的公开宣告逻辑系统 $PAL(RC, D, E)$ 。再通过归约的方法,将它归约到静态逻辑系统 $SS_m^B(RC, D, E)$,从而给出完全性证明。最后考察了该系统在处理泥孩难题、和积之谜以及意外考试难题等交流活动的知识表达和动态推理中的初步应用。

第5章是博弈逻辑。在博弈论中,“博弈”一词通常理解为明智的、理性的个人或群体间冲突与合作的情形。现代博弈论是研究决策主体的行为发生直接相互作用时的决策以及这种决策均衡问题的一个分析工具。研究中发现,仅用逻辑的方法刻画人的抽象认知活动有许多局限性,特别是涉及许多信息且存在信息的对称与不对称问题时,逻辑的刻画很麻烦或者说根本不够。为此,我们可以结合博弈理论来进行深入的分析。人的认知活动恰好也是一个多主体互动的博弈过程,它也有行动、行动的结果等。现实生活中各种各样的博弈活动为动态认知逻辑技术的应用提供了一个广阔的舞台。作为一个新的交叉研究领域,博弈逻辑主要运用现代认知逻辑的技术,对理性主体在互动过程中的策略选择、偏好与期望、相应的行动和结果进行推理及分析。本章首先介绍一些相关的博弈论基本概念并讨论逻辑与博弈的相互关系;由于主体决策时不仅依赖于他们自身的偏好,而且也依赖于自己对其他主体偏好的了解,5.2节讨论了一个带有偏好的博弈逻辑 GLP,从而使得一个主体(或主体联盟)可以对其他主体(或主体联盟)关于博弈结果的偏好进行推理;5.3节则进一步考虑 GLP 的一个扩展,对扩展式博弈逻辑做一个系统的分析阐述,它可以对完美信息博弈中子博弈精炼均衡进行更进一步的逻辑刻画;本章最后讨论了第4章公开宣告逻辑在博弈中的一个重要应用,指出完全信息静态博弈中重复剔除严格劣策略的算法这一求解过程可以看做是一个重复宣告某种恰当的“理性”的断言过程,从而为该算法提供了一种动态逻辑的解释。

第6章是信念修正的动态逻辑。世界充满着变化,人的知识和信念也随之变化。在逻辑学中,处理“变化”的代表性方法是动态认知逻辑和信念修正理论。动态认知逻辑是形式化的认知系统,其模型通常是建立在可能世界语义学基础上的克里普克(Kripke)模型,对于动作或程序产生的变化,也给出相应的语义解释。而信念修正理论面对新的信息,首先提出一些理性的假设来应对变化,再将一个演绎封闭的公式集变为另一个演绎封闭的公式集。动态认知逻辑的优势在于能处理多主体,也能处理主体间的相互作用。实际上,将行动模型在认知逻辑中的执行作为动态模态算子引入到逻辑语言中,也可以建立动态认知逻辑系统来刻画信念变化。目前,国际上的一个趋势是“建立动态认知逻辑来处理信念修正”,而本章研究的主要目的在于将这两种理论进行融合,建立一个既能刻画知

识变化又能刻画信念变化的动态认知系统。而如何给出可能世界之间的可及关系，则是关键之所在。知道逻辑系统中的可及关系是等价关系（自返、传递、对称），其中自返关系对应的是知道公理 $K\varphi \rightarrow \varphi$ ；而信念逻辑系统中的可及关系不应具有自返性，因为 $B\varphi \rightarrow \varphi$ 明显地不合常理。在本章中，针对知识和信念的关系虽然只有等价关系一种，但为了刻画主体的程度性信念，给出了一个 κ 算子，对可能世界进行排序，从而对信念有了一种新的语义定义。本章主要以 κ -ranking 为主线，结合 Aucher 的一些最新研究成果，对可能世界进行量化，基于可能世界的合理性等级，建立了一个动态的信念逻辑系统 S_{DBR} 。在系统中，行动算子与知道算子、信念算子共存并且能相互作用，与信念修正类似，也能处理信念变化。首先介绍经典的信念逻辑系统 S_{KD45} 和信念修正的代表性理论——AGM 理论；然后给出静态的信念逻辑系统 S_{SBR} 以及完全性的证明；最后在静态的信念逻辑系统 S_{SBR} 的基础上，提出动态的信念逻辑系统 S_{DBR} ，并给出完全性的证明。

第 7 章是非逻辑全知主体的逻辑。经典认知逻辑是处理知识表达和知识推理的有力工具，但是它对于主体推理能力的要求却是理想意义上的，即主体知道所有的有效式并且知道其知识的逻辑后承。Hintikka 称这样的主体是逻辑全知（logical omniscience）的主体。然而，对于现实中的认知主体而言，无论是人类自身还是人工智能主体，都不可能是逻辑全知的。例如，人作为资源有限的主体，没有足够的时间和记忆能力推出自己知识的所有后承结果。即使人们并不缺乏计算知识后承的能力，但是他们仍可能做出错误的推理或者拒绝相信自己的知识后承。因此，逻辑全知问题成了经典认知逻辑的一个重要缺陷。近年来，许多学者针对逻辑全知问题做了大量的工作，构建了一些非逻辑全知的系统。本章对目前提出的几种典型解决方法进行对比性的研究，重点考察了几种不同的避免或削弱逻辑全知的一些常见方法。除了 MS（Montague-Scott）领域语义模型方法之外，其他所有的方法都是在尽可能保留可能世界语义优势的同时，消除或减弱主体的全知问题。但并不存在一种完美的能够解决所有全知的方法。每一种方法都是在解决了某些（或全部）全知问题的同时，却又不可避免地存在另外一些不足和缺点，然而，由于这些方法模型主体缺乏全知的侧重点不同，因此，在实际应用中，我们可以根据模型知识目的的不同而选择不同的方法和逻辑系统。

第 8 章是非单调逻辑和缺省逻辑。以知识为基础的专家系统（expert systems, ES）作为一个新的研究领域，取得了巨大成功。专家系统 DENDRAL 能根据质谱仪的数据推知物质的分子结构，可达到化学博士水平。MYCIN 医疗诊断专家系统，只要输入患者的症状、病史和化验结果，系统就可以根据专家知识判断出是什么病菌引起的感染并提出治疗方案。PROSPECTOR 地质勘探专家系统，可用于勘探评价、区域资源评价和井位选择。这些专家系统都说明，认知推理研

究中人们必须面对的是常识的形式化以及常识推理 (commonsense reasoning)。而常识推理具有非单调性。本章从分析推理的单调性与非单调性入手, 讨论了常识与缺省推理规则、缺省逻辑的语形及语义、缺省逻辑的扩张、有穷扩张特征, 以及特殊缺省理论类和任意缺省理论。

本书对现代认知逻辑理论中最有代表性的公开宣告逻辑、博弈逻辑、动态信念修正逻辑、非逻辑全知主体的逻辑以及非单调逻辑和缺省逻辑进行了全面而系统的研究, 在带有群体知识的公开宣告逻辑、动态信念修正逻辑以及博弈逻辑应用方面得到了一些初步结果。尽管如此, 本书还存在一些不足, 例如, 第2章建立的时态认知逻辑不能描述主体过去或将来知道什么或不知道什么, 即不能够描述关于过去和未来主体的知识状态。这是一个重要的缺憾。如果说由于未来的不确定性, 主体无法准确把握将来会发生什么, 从而主体不能拥有关于未来的知识, 那么在我们的系统中不描述关于未来主体知道什么似乎是合情合理的。但是过去是已经发生了一段历史, 一个理性主体, 即使不能把握世界的历史变化, 也应对其自身的经历有所把握, 也就是说, 他应该知道自己过去知道什么或不知道什么。这一问题的根源在于我们采取的是时态化认知逻辑系统的一般性方法, 从而使得时态认知逻辑系统中的时态算子不能出现在认知算子的辖域内。如何突破这个限制, 探索出其他结合时态逻辑和认知逻辑的一般性方法, 从而建立起表达力更强的时态认知逻辑, 有待于进一步研究。还有第6章建立的动态信念修正逻辑系统 S_{DBR} 还没有把群体知识 (信念) 考虑进去, 想要发挥群体知识 (信念) 在多主体互动过程中的作用, 还需对原系统做进一步的扩充。此外, 由于不同的主体在收到相同的外来信息后, 会做出不同的回应, 如何引入新的参数来刻画主体的多样性, 值得进一步研究。

总体来看, 本书尽管充分考虑到了与人的认知智能相关的各种问题的复杂性, 对能够处理智能主体的时态性、动态性、非逻辑全能、非单调等重要特征的逻辑进行了系统研究, 并试图把它们结合起来, 建立起了时态认知逻辑、动态认知逻辑、动态信念逻辑以及带有偏好的博弈逻辑等能够同时处理时间变化和 Information 变化的逻辑系统, 但是还没有和认知主体的非逻辑全能、非单调等其他重要特征紧密结合起来。最近新兴发展起来的非单调模态逻辑、时态动态认知逻辑为这些问题的解决又提出了一些新的思路, 希望将来有机会进一步深入研究。

本书是国家社会科学基金项目“现代逻辑在人工智能中的应用”(项目批准号: 04BZX046) 的最终成果。课题组成员搜集查阅国内外相关研究文献 200 余篇 (本), 特别是追踪国际相关研究的最新动态, 举办学术研讨攻关会 20 余次。本书是课题组成员共同努力的成果, 各章执笔分工如下: 第1章认知逻辑的基础理论和附录由唐晓嘉撰写; 第2章时态认知逻辑由蒋军利撰写; 第3章群体知识

和多主体认知逻辑由郭美云撰写；第4章动态认知逻辑的基础系统——公开宣告逻辑由郭美云撰写；第5章博弈逻辑由崔建英、张木春和杨长福共同撰写；第6章信念修正的动态逻辑由萧瑶撰写；第7章非逻辑全知主体的逻辑由崔建英撰写；第8章非单调逻辑和缺省逻辑由邓辉文撰写。全书最后由唐晓嘉、郭美云统稿。

北京大学周北海教授曾审阅过第3章和第4章等相关章节，并提出不少具体的改进意见，在此表示感谢。

西南大学哲学系和逻辑与智能中心对本书出版给予了资助，科学出版社科学人文出版中心胡升华主任和郭勇斌编辑为本书的出版付出了艰辛劳动，在此一并表示感谢。

由于时间和水平所限，书中难免有不足之处，尚祈专家、读者不吝赐教。

唐晓嘉 郭美云

2010年3月27日

《现代认知逻辑的理论与应用》编委会

主 编 唐晓嘉 郭美云

编 委 邓辉文 崔建英 蒋军利

萧 瑶 张木春 杨长福

目 录

前言

1 认知逻辑的基础理论	1
1.1 基本的模态逻辑系统	1
1.1.1 基本模态语言 $\mathcal{L}_{\Box}$	1
1.1.2 基本模态语言的解释——框架与模型	3
1.1.3 正规模态逻辑	6
1.2 单主体的认知模态逻辑 PK 与 PB	12
1.2.1 单主体的认知模态语言 $\mathcal{L}_{KB}$	12
1.2.2 认知逻辑系统 PK 和 PB	16
1.2.3 PK 与 PB 系统的可靠性和完全性	18
1.3 多主体的认知逻辑初步	24
1.3.1 由单主体系统向多主体系统的扩展	24
1.3.2 普遍知识、公共知识与分布式知识	26
1.3.3 举例——泥孩难题	28
2 时态认知逻辑	30
2.1 时态逻辑	31
2.1.1 基本时态命题逻辑	31
2.1.2 S, U 时态命题逻辑系统	34
2.2 时态化逻辑系统的方法	38
2.2.1 时态化任意一个正规逻辑系统	38
2.2.2 $T(L)$ 的完全性	40
2.2.3 $T(L)$ 的可判定性	44
2.3 时态认知逻辑系统 $Kt(S5)$	45

3 群体知识和多主体认知逻辑	49
3.1 多主体认知逻辑概述	50
3.2 分布式知识	54
3.2.1 分布式知识概念的提出	54
3.2.2 联合知识与隐含知识——分布式知识的形式化分析	56
3.2.3 完全交流原则与完全交流模型	59
3.2.4 互模拟和群体知识	62
3.3 带有群体知识的多主体认知逻辑 $S5_m^B(RC, D, E)$	65
3.3.1 相对化公共知识	65
3.3.2 语言和语义	66
3.3.3 公理系统	67
3.3.4 完全性证明	70
4 动态认知逻辑的基础系统——公开宣告逻辑	77
4.1 公开宣告与逻辑模型	79
4.1.1 从过程看推理	79
4.1.2 公开宣告和信息流动	80
4.1.3 公开宣告和模型变化	82
4.2 公开宣告逻辑 PAL	85
4.2.1 语言和语义	85
4.2.2 公理系统	90
4.2.3 完全性证明	91
4.2.4 关于公开宣告逻辑 PAL	92
4.3 带有群体知识的公开宣告逻辑 PAL (RC, D, E)	93
4.3.1 语言和语义	93
4.3.2 公理系统	96
4.3.3 完全性证明	97
4.4 应用分析	101
4.4.1 泥孩难题再分析	101
4.4.2 和积之谜	103
4.4.3 意外考试难题	105
5 博弈逻辑	109
5.1 逻辑与博弈	109

5.1.1 博弈论的基本概念	109
5.1.2 逻辑与博弈的关系	115
5.2 带有偏好的博弈逻辑	119
5.2.1 形式定义	120
5.2.2 语形与语义	122
5.2.3 公理系统及其可靠性	124
5.3 扩展式博弈逻辑	127
5.3.1 具有完美信息的扩展式博弈	128
5.3.2 扩展式博弈逻辑系统	133
5.3.3 纳什均衡的 PDL 刻画	141
5.4 公开宣告逻辑在博弈中的应用	145
5.4.1 重复剔除的占优均衡	145
5.4.2 重复剔除严格劣策略算法的逻辑刻画	148
6 信念修正的动态逻辑	156
6.1 经典的信念逻辑	157
6.1.1 信念逻辑系统 S_{KD45}	157
6.1.2 信念修正的 AGM 理论	159
6.2 静态的信念修正逻辑系统 S_{SBR}	161
6.2.1 顺序条件函数	162
6.2.2 系统 S_{SBR} 的语言及语义	166
6.2.3 系统 S_{SBR} 的证明系统	167
6.2.4 S_{SBR} 系统的可靠性和完全性	169
6.3 动态的信念修正逻辑系统 S_{DBR}	172
6.3.1 更新模型	172
6.3.2 S_{DBR} 的系统	175
6.3.3 S_{DBR} 系统完全性的证明	177
6.3.4 与 AGM 理论作比较	178
7 非逻辑全知主体的逻辑	180
7.1 逻辑全知问题概述	180
7.1.1 逻辑全知的不同表现形式	180
7.1.2 逻辑全知问题的解决途径	181
7.2 非标准语义结构	183

7.3 不可能世界模型	185
7.3.1 不可能世界	185
7.3.2 Lévesque 的隐性和显性信念逻辑	187
7.4 觉知逻辑	190
7.5 Montague-Scott 邻域语义	192
7.5.1 Montague-Scott 语义模型	192
7.5.2 局部推理模型	194
7.6 动态认知的方法	195
8 非单调逻辑和缺省逻辑	200
8.1 知识与常识	200
8.2 推理的单调性与非单调性	202
8.3 非单调逻辑	205
8.3.1 非单调逻辑及其研究方法	205
8.3.2 非单调逻辑的元理论性质	209
8.4 常识与缺省规则	210
8.5 缺省逻辑的语形	214
8.6 缺省理论及其扩张	218
8.6.1 缺省理论扩张的定义	218
8.6.2 缺省理论扩张的性质	225
8.7 缺省逻辑的语义	228
8.8 对缺省逻辑的进一步认识	230
参考文献	233
附录 命题逻辑与一阶谓词逻辑	242
附录 1 命题语言 $\mathcal{L}_p$ 与一阶谓词语言 $\mathcal{L}_q$	242
附录 2 语义理论	244
附录 3 一阶逻辑演算系统 Q	246

1 认知逻辑的基础理论

本章从讨论基本模态逻辑入手，重点分析介绍早期经典认知逻辑系统，这些系统被认为是现代认知逻辑的基础。本章还将对现代认知逻辑的一些基本概念和范畴进行非形式的描述，这是形式化理论分析的一个必要环节。

1.1 基本的模态逻辑系统

辛提卡 (J. Hintikka) 从分析认知概念的逻辑性质入手，建立了第一个认知逻辑形式系统。在该系统中，认知概念的处理与逻辑模态词“必然”与“可能”的处理方法相类似，这样的认知逻辑因此被称做认知模态逻辑。认知模态逻辑刚开始是单主体的，对单主体系统进行扩展可得到多主体认知模态逻辑。认知模态逻辑是基本的认知逻辑系统。本节首先讨论基本模态逻辑，然后是基本认知模态逻辑。

1.1.1 基本模态语言 $\mathcal{L}_\Box$

模态逻辑所研究的是涉及模态词的推理。最典型的逻辑模态词是“必然”和“可能”。模态词在命题中起着逻辑算子的作用，命题的逻辑值将随模态词发生变化。例如，“太阳系有五颗行星”是假命题，增添模态词“可能”后得到的“可能太阳系有五颗行星”则是一个真命题。对模态算子逻辑特征的分析刻画构成了模态逻辑理论的主要内容。

我们将讨论的重心放在模态命题语言上，以避免由量化产生的一些复杂问题。

定义 1.1.1 (模态语言 $\mathcal{L}_\Box$) 令 P 是命题变元符号集，基本模态语言 $\mathcal{L}_\Box$ 的合式公式 φ 归纳定义如下：

$$\varphi ::= p \mid \perp \mid \neg \varphi \mid \varphi \vee \psi \mid \Box \varphi \quad \text{其中 } p \in P.$$

这表示一个基本模态公式要么是命题变元，要么是否定式，要么是析取式，要么是其前缀有 $\Box$ 的公式。

由定义引入 $\Diamond$, $\wedge$, $\rightarrow$, 和 $\top$ ：

$$\begin{aligned}\diamond\varphi &: = \neg \Box \neg \varphi; \\ \varphi \wedge \psi &: = \neg(\neg \varphi \vee \neg \psi); \\ \varphi \rightarrow \psi &: = \neg \varphi \vee \psi; \\ \top &: = \neg \perp.\end{aligned}$$

定义中的 $\Box$ 和 $\diamond$ 在基本模态语言中分别读作“必然”和“可能”。

对 $\Box$ 的不同的读法形成不同的模态语言。在认知逻辑中，我们用 $\Box\varphi$ 表示“主体 a 知道 φ ”，写作“ $K_a\varphi$ ”；我们也可以用 $\Box\varphi$ 表示“主体 a 相信 φ ”，写作“ $B_a\varphi$ ”。认知逻辑的研究是围绕对“ K_a ”和“ B_a ”等认知算子的逻辑特征展开的。例如，知道就没有真知与假知的区别，主体真正知道一定是事实，因此形如 $K_a\varphi \rightarrow \varphi$ 的公式被看做真的，而主体相信的未必如此， $B_a\varphi \rightarrow \varphi$ 是假的。

模态语言以一个模态词集（在基本模态语言中是 $\{\Box, \diamond\}$ ）加上命题变元集 P 为基础构建。模态词的不同决定了模态语言的相互区别。定义 1.1.1 描述的形成规则规定，基本模态语言的模态词只适用于一个变元，我们称其为一元模态词。一般地，能适用于 n ($0 \leq n$) 个命题变元的称为 n 元模态词。我们后面的讨论将涉及多元模态词。

如果一个模态词集有两个元素 $\otimes$ 和 $\oplus$ ，使得“ $\otimes\varphi: = \neg \oplus \neg \varphi$ ”，则称 $\otimes$ 和 $\oplus$ 互为对偶。显然， $\Box$ 和 $\diamond$ 互为对偶，而 K_a 和 B_a 之间没有对偶关系。

基本模态语言还可以进行其他扩展，这里有必要提到的是时态语言和动态命题语言，我们后面要用这两种语言。有用一元模态词集 $\{G, H\}$ 构建的基本时态语言。公式 $G\varphi$ 表示“ φ 将总是真的”，而 $H\varphi$ 的解释是“ φ 在过去一直是真的”。 G 和 H 的对偶分别为 F 和 P ， $F\varphi$ 与 $P\varphi$ 的含义分别是“ φ 在将来某时刻为真”和“ φ 在过去某时刻为真”。后面我们也用二元模态词 $\{S, U\}$ 构建时态语言。

动态命题逻辑（propositional dynamic logic, PDL）是模态逻辑的一个重要分支。PDL的语言也只涉及一元模态，但它有一个无穷的模态算子集，每个算子有形式 $[\pi]$ ，代表一个（非确定的）行动，称为程序（program）。 $[\pi]\varphi$ 的直观意思是“在当下状态每一次执行程序 π 后都进入承载信息 φ 的状态”；其对偶表达式 $\langle\pi\rangle\varphi$ 的直观意思是“在当下状态某一次执行程序 π 后进入承载信息 φ 的状态”。

动态语言的特殊之处在于它的模态算子也是有内部结构的。令 PDL 有基本模态算子 $\langle\pi_1\rangle, \langle\pi_2\rangle, \dots$ ，则 PDL 算子的结构定义是：如果 $\langle\pi_1\rangle$ 和 $\langle\pi_2\rangle$ 是模态算子，则 $\langle\pi_1 \cap \pi_2\rangle, \langle\pi_1 \cup \pi_2\rangle, \langle\pi_1; \pi_2\rangle, \langle\pi^*\rangle$ 和 $\langle\varphi?\rangle$ 也是。 $\langle\pi_1 \cap \pi_2\rangle$ 表示 π_1 和 π_2 被同时执行； $\langle\pi_1 \cup \pi_2\rangle$ 表示（不确定地）执行 π_1 或 π_2 ； $\langle\pi_1; \pi_2\rangle$ 表示先执行 π_1 然后执行 π_2 ； $\langle\pi^*\rangle$ 表示有穷次（可能是 0 次）执行 π ； $\langle\varphi?\rangle$ 表示检验程序，检验 φ 是否成立，如果成立则继续，不成立则中止。

根据上述定义,公式 $\langle \pi^* \rangle \varphi \leftrightarrow \varphi \vee \langle \pi; \pi^* \rangle \varphi$ 说的是:通过有穷次执行 π 到达承载信息 φ 的状态,当且仅当,或者目前已经是承载信息 φ 的状态,或者是我们能够执行一次 π 然后有穷次执行 π 后到达承载信息 φ 的状态。

动态模态词的引入大大增强了模态语言的表达力。对此我们将在动态认知逻辑中讨论。

1.1.2 基本模态语言的解释——框架与模型

模态语言的语义可以用可能世界语义学解释,如此构建的语义理论称为克里普克 (Kripke) 语义学,它有两个层面的解释:框架的和模型的。两个层面的解释都很重要:我们需要模型来定义满足概念,用框架来刻画系统有效性概念,而满足和有效是两个非常重要的语义概念。

定义 1.1.2 基本模态语言 $\mathcal{S}_\square$ 的框架是二元组 $F = (W, R)$, 其中的 W 是个非空集合, R 是 W 上的一个二元关系。

在可能世界语义学中, W 被看做是可能世界的集合。它的元素可以由一个非空原子命题集 I 来描述,这些原子命题代表相关世界的基本事实,由此我们可以把任一可能世界 $w \in W$ 看做一个非空的原子公式集。根据模态逻辑具体应用领域的不同, W 中的元素还有一些不同的名称:状态 (state)、节点 (node)、情景 (situation)、点 (point) 等。关系 R 是 W 上的关系,对基本模态语言而言, R 是二元的,描述可能世界之间的可及关系。如果我们假定 R 至少包含一种关系,框架就是一个关系结构, W 则是这个关系结构的域。

模型以框架为基础,它由一个框架 F 加上赋值函数 V 构成。

定义 1.1.3 基本模态语言的模型是一个二元组 $M = (F, V)$, 其中的 F 是一个基本模态语言的框架, V 是一个函数,它指派给每个命题符号 p 一个 W 的子集 $V(p)$ (其中 $p \in P$)。形式地讲, V 是映射: $P \rightarrow \wp(W)$, $\wp(W)$ 表示 W 的幂集。函数 V 被称为一个赋值。

给定模型 $M = (F, V)$, 称 M 是以框架 F 为基础的模型,或者 F 是模型 M 所依据的框架。

非形式地讲, $V(p)$ 可看做是使得 p 在其中为真的那些可能世界的集合,即 $V(p)$ 是可能世界集 W 的一个子集,因此, $V(p)$ 是 W 上的一个一元关系。从这个角度看,模型比框架结构只多了一些由 V 给定的一元关系。因此,模型也可以看做是一种关系结构,即 $(W, R, V(p), V(q), V(r), \dots)$ 。

从纯结构方面看,模型似乎不过是增添了一个一元关系类的框架,但框架和模型在应用上有很大区别。框架相当于对世界本体模式做精确描述,如时间世界