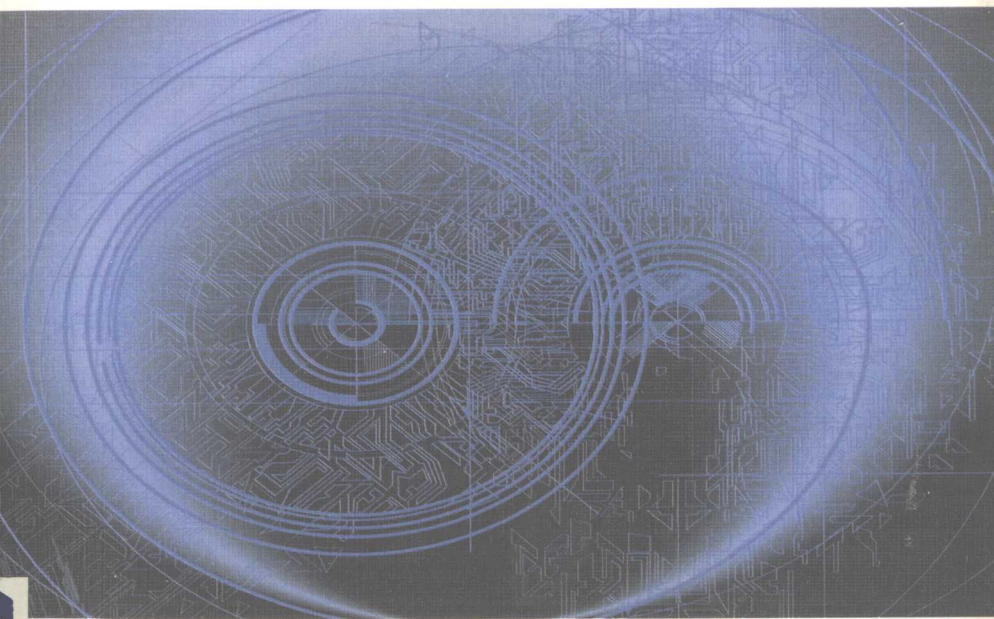


SHUXUE KONGZHILUN JIQI YINGYONG

数学控制论 及其应用

邓宗琦 肖冬梅 肖会敏



华中师范大学出版社

SHUXUE KONGZHILUN JIQI YINGYONG

数学控制论 及其应用

邓宗琦 肖冬梅 肖会敏

华中师范大学出版社

数 学 控 制 论 及 其 应 用

邓宗琦 肖冬梅 肖会敏

华中师范大学出版社

(鄂)新登字 11 号

图书在版编目(CIP)数据

数学控制论及其应用/邓宗琦 肖冬梅 肖会敏

—武汉:华中师范大学出版社,1997.8.

ISBN 7-5622-1750-5

I. 数…

II. ①邓… ②肖… ③肖…

III. 控制论-数学理论

N.O231

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 15377 号

数 学 控 制 论 及 其 应 用

© 邓宗琦 肖冬梅 肖会敏

华中师范大学出版社出版发行

(武昌桂子山 邮编:430079)

正佳彩色制作输出中心照排

新华书店湖北发行所经销

黄冈日报社印刷厂印刷

责任编辑:张小新

封面设计:罗明波

责任校对:张 钟

督 印:朱 虹

开本:850×1168 1/32

印张:8 字数:187千字

版次:1997年8月第1版

1997年8月第1次印刷

ISBN 7-5622-1750-5/O · 112

印数:1—1000

定价:14.00元

本书如有印装质量问题,可向承印厂调换。

前 言

数学控制论是研究控制问题的数学理论。自维纳(Wiener N)创立控制论以来,半个世纪过去了,控制论已渗透到工程、生物、经济、社会、教育等许多学科形成边缘交叉学科,从而控制论的理论基础——数学控制论,由于其丰富的物理内容与近代数学提供的方法相结合,出现了蓬勃发展的局面。大致说来它的研究内容有系统可控性、可观测性、稳定性和最优控制等,本书以这些为主体,介绍数学控制论的基本内容。

了解一门学科,知道它的发展历史是很重要的,控制论的产生及迅猛发展可谓是科学史上的一大奇迹,因创立控制论而名垂青史的维纳,也成了后人研究的热点。本书第一章介绍了控制论的产生、发展及维纳生平,希望读者能从中得到一些启迪。

系统是控制论研究的对象。本书考虑由微分方程(连续、离散、时滞)所描述的系统。如何将系统写成易研究的形式?在第二章介绍了一些处理方法。

可控性和可观测性是控制论研究的主要内容之一,也是困难的问题之一,所用数学知识有经典的常微理论也有现代的李群李代数。在第三章和第四章第一节介绍了这方面的基本结论和方法。

一般非线性系统研究,由于数学上处理非线性问题的困难,至今仍然是一个带挑战性的课题。在第四章我们讨论了非线性系统的线性化问题,这有利于研究非线性系统通过控制(状态反馈)达到我们希望的稳定性。由德国数学家Kamke在30年代初建立的比较原理,原本是讨论微分方程解的特性,这种借助于微分不等式讨论问题的方法,在渐近稳定性的分析上具独到之处,

在第四章我们用它研究了变系数控制系统的绝对稳定性。

最优控制是控制论的另一研究主体,第五章简单介绍用变分法处理最优控制问题,包括离散、时滞控制系统最优控制问题。

最优控制有广阔的应用背景,第六章讨论了最优控制的应用,如最优积累率、动态投入产出大系统的最优控制等,意在引起更多人注意现实生活中的实际问题,动手解决实际问题,为国民经济的发展和数学控制论的发展做贡献。

第七章介绍了近十年发展起来的研究领域——变结构控制理论。

考虑到本书的读者除数学专业研究生之外,还可能有可能有其它自然科学研究工作者,因此,在编写本书时我们力图做到深入浅出,通俗易懂,思想性和直观性相结合,使具有一定数学基础的读者都可以看懂本书所讨论的主要问题。

当然这些都只是作者的愿望。限于作者水平,加之出版时间仓促,本书还会存在不少缺点和错误,恳请读者批评指正。

数学控制论是培养运筹学与控制论硕士研究生的一门基础课程。本书是在“数学控制论讲义”的基础上修改而成,“讲义”的部分内容曾在本科生选修课和硕士研究生基础课上试用过多次。在历次教学中,微分方程教研室的同仁和研究生们均对“讲义”内容提出过不少有价值的意见,谨此表示感谢!

还要特别感谢湖北省自然科学基金委的有力支持。

邓宗琦

1997. 元旦

目 录

第一章 导论	1
§ 1.1 控制论的产生	1
§ 1.2 基本概念和问题	4
§ 1.3 控制论的发展及应用	8
第二章 状态空间与状态方程	14
§ 2.1 状态方程	14
§ 2.2 线性系统	30
§ 2.3 正线性系统	38
第三章 线性系统的可控性和可观测性	44
§ 3.1 基本概念	44
§ 3.2 可控性和可观测性的判定	47
第四章 非线性控制系统	68
§ 4.1 非线性控制系统的可控性和可观测性	68
§ 4.2 非线性系统的线性化	74
§ 4.3 控制系统的绝对稳定性	78
第五章 最优控制论初步	92
§ 5.1 最优控制问题的数学描述	92
§ 5.2 变分方法	98
§ 5.3 极小值原理	110
§ 5.4 控制无约束的最优控制问题	116
§ 5.5 线性系统最优控制	125
§ 5.6 离散系统最优控制	129
§ 5.7 时滞系统的最优控制	133
第六章 最优控制的应用	147
§ 6.1 最优控制在经济系统的应用	147
§ 6.2 饱和型最优控制	172

§ 6.3	自然资源的最优利用	180
§ 6.4	登月最优控制问题	184
§ 6.5	动态投入产出大系统的最优控制	187
第七章	变结构控制理论	200
§ 7.1	变结构系统理论的发展	200
§ 7.2	变结构控制的基本概念	202
§ 7.3	线性系统的变结构控制	216
§ 7.4	李雅普诺夫方法在变结构控制中的应用	236

第一章 导 论

控制论(Cybernetics)是美国数学家维纳(Wiener N, 1894~1964)于1947年创立的一门数学学科,半个世纪来它已经渗透到工程、机械的设计、生物、经济等众多学科,取得了巨大的发展,形成了从理论到应用丰富的体系.为了理解现今控制论的框架,回顾控制论产生的背景及发展是有意义的.本章简单介绍控制论产生的背景和维纳的生平,概述数学控制论的基本概念和研究问题,以及控制论在其它学科的应用.

§ 1.1 控制论的产生

控制论是在20世纪40年代末诞生的,它的思想可以追溯到遥远的古代社会.“控制论”的英文“Cybernetics”就是由希腊文 κυβερνητική 演变而来的,其原意是掌舵人,它还演化为拉丁文 governor,原意是调速器,古希腊的柏拉图就使用过这个词.在我国出现控制一词也很早,1060年(北宋嘉祐五年)成书的《新唐书·王忠嗣》就有“劲兵重地,控制万里”之说,这是驾驭、支配之意.但它作为一种理论提出,却到了20世纪.随着人类社会的发展,科学技术的进步,特别是20世纪80年代通讯的需要,人们研究信息的传递和变化规律,产生了信息论.另一方面人们试图模仿生物的活动,创造各种各样的机械自动化,通过对掌舵人掌舵、动物的神经活动过程的原理进行深入分析总结出反馈原理,这些奠定了产生控制理论的基础.在20世纪,科学理论的重要特征是科学一体化,即从不同角度研究同一对象,使科

学成为完整的体系.在这种一体化原理的指导下,描述数理科学、高级神经活动的生理学、社会科学和自动调节理论等共同规律的控制论应运而生.它的创立是以美国数学家维纳 1947 年 10 月完成定稿,1948 年出版的名著《控制论》(Cybernetics or Control and Communication in the Animal and the Machine)为标志的.它的问世轰动了世界,也给维纳带来了巨大声誉.

维纳 1894 年 11 月 26 日出生于美国密苏里的哥伦比亚市.维纳的父亲列奥·维纳(Leo Wiener)出生在沙俄的一个犹太人居住区.18 岁时列奥孤身一人移居美国,当过工人、中小学教师,经过刻苦攻读,终于成为哈佛大学的一位斯拉夫语言学教授.维纳从小就是一个胆小多虑的孩子,但却表现出非凡的才能,被誉为神童,成为美国心理学界研究神童的典型之一.在父亲的影响下,他从小就爱读各种科学著作.维纳认为,他的一生中,父亲给予的影响最大.他认为父亲“继承了德国的思想、犹太的智慧和美国的精神这三者中最优良的传统”.

维纳三岁就能读书,七岁学完了初等数学及解析几何,还学了物理学、化学、法文、德文、拉丁文.九岁时全家移居马萨诸塞州的哈佛,并被送到附近的爱友(Ayer)中学读书,十一岁毕业.1906 年就写了一篇题为《关于无知的理论》的哲学论文.接着上了杜芙茨(Tufts)学院,十四岁在该院数学系毕业.1909 年进入哈佛大学研究生院从事动物学的研究.但他缺乏从事这种研究工作所必需的技巧、目力和耐心,根据父亲的建议,不久即转入康乃尔大学学习哲学.由于年龄较小,离开家庭后显得无能为力,使得他无法适应学习生活.父亲看此情景,只好让他回到哈佛大学学习哲学.他的论文与数理逻辑相关,主要是论述哲学和数学的界限,于 1913 年获哈佛大学数理逻辑博士学位.在校方的资助下,维纳于 1913 年 6 月到英国剑桥大学跟罗素学习数学和哲学.在剑桥大学学习期间他听了哈代(Hardy)、李德伍德

(Littiewood)等人的数学课;研究过爱因斯坦 1905 年发表的三篇论文,其中关于布朗运动的论文对他以后的工作影响很大。

在罗素的建议下,维纳学习了电子理论.这时他已相当成熟,能独立处世了.1914 年罗素又送维纳到德国的哥廷根去跟当时世界上著名的数学大师希尔伯特等人学习数学.第一次世界大战爆发后的 1915 年,维纳回到了美国.不久,哈佛大学又给了他一笔资助,重访剑桥大学,但由于战争影响,剑桥大学停止了正常的研究活动.于是又到了牛津大学,不久还是回到了美国.1916 年他的研究完全转到了数学,受聘于缅因大学的数学教师职位.次年秋天又到了林城(Lynn)通用电气当实习工程师.不久又转到阿尔巴良(Albary)参加美国百科全书的编写直到 1918 年夏.然后到阿伯丁弹道实验室当数学教师,并认识了布里斯(Bliss),还参加了军队,直到战争结束.此后还当过几个月的波士顿先驱报记者.1919 年夏经奥斯古德(Osgood)教授推荐,维纳到了麻省理工学院数学系.此时这个系并不出名.在这里他每周都要教 20 小时的初等微积分.与此同时,他勤奋地学习了刚形成不久的数学分支泛函分析、勒贝格积分、测度论,还研究了湍流,考察了布朗运动,改进了吉布斯的统计力学.1924 年成为助理教授,1929 年任副教授,1932 年成为教授.他开始作出许多开创性工作,使他成为一位著名数学家.1933 年当选为美国科学院院士,1934 年当选为美国数学学会副主席.

1935 年 8 月 15 日,维纳带着全家来到中国清华大学受聘任教,担任数学系和机电系的教授,住清华大学刚盖好的新南院(即现在的新林院)63 号.1936 年 5 月 14 日先去南京上海等南方各大学访问、讲学,5 月 19 日从上海乘船经伦敦至挪威奥斯陆,出席 1936 年 7 月 13 日至 18 日举行的国际数学家大会,他是清华大学的代表,并是此次大会的主要演讲者.然后回到美国麻省理工学院任教授.

1940年~1941年间,维纳在研究火力控制问题中,发现操作人员总是设法使目标保持在望远镜的十字交叉点上,从而启示他去考察人的神经生理学,推动他开始研究通讯工程方面存在的反作用问题.发现了工程控制问题的反馈和稳定性概念对神经生理学也同样重要.1943年维纳和他的同事们发表了题为《行为、目的和目的论》的论文.这是控制论最早的一篇论文.文中根据随机活动的关键是反馈的思想,论证了目的性就是负反馈活动.1946年维纳组织了负反馈问题的讨论班.参加这个讨论班的有工程师比格劳、电工学家李郁荣、生理学家罗森勃吕特、麦卡洛克、数理逻辑学家皮茨、电子计算机专家埃克特、模拟计算机专家布什、心理学家克留弗、经济学家摩根斯顿,这些科学家每人都是自己领域中的专家,而且对附近的领域都有十分正确和熟悉的知识.维纳通过用类比方法沟通机器、生物体和社会等性质不同的系统,找到它们的共同点,把注意力集中到无人注意的交叉学科,并用各个学科已有成果去发展新学科的理论和方法.《控制论》就是这个讨论班的结晶.

1964年3月18日,维纳在瑞典斯德哥尔摩大学作学术访问时,因心脏病发作逝世.由于维纳“在纯粹数学和应用数学方面并且勇敢地深入到工程和生物科学中去的各种令人惊异的贡献及其在这些领域中具有深远意义的开创性工作”,1964年维纳逝世前两个月,美国总统约翰逊授予他美国科学勋章.

§ 1.2 基本概念和问题

系统是数学控制论中经常使用的术语,它是指由相互联系各元素构成的具有一定功能的总体,是研究对象之间的一个关系,记为 S .下面就直观例子说明这一概念.

例 1.1 如图 1.1,弹簧振动系统 S ,对应的元素是原动力

f , 弹簧、物体质量及缓冲器, 描述这些元素之间相互关联及相互作用的关系是

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + r \frac{dy}{dt} + ky = f \quad (1.1)$$

其中 m 、 r 和 k 对应于物体的质量、缓冲器的摩擦系数、弹性常数, y 和 t 对应于物体位移及时间。

例 1.2 人口增长系统 S .

我们将某国人口按相同年龄段分组, 如 0 岁~5 岁分成一组, 6 岁~10 岁分成一组, 等等. 这是一个离散时间的动态系统. 根据统计资料, 男女人口在分布上是基本相同的, 故可考虑女性人口. 用 $x_i(k)$ 表示在第 k 年 第 i 年龄组的女性人口. 于是若 $x_i(k)$ 在 $(k+1)$ 年时转移到第 $(i+1)$ 年龄组的转移率为 β_i (可由统计资料提供), 则有

$$x_{i+1}(k+1) = \beta_i x_i(k), \quad i=0, 1, \dots, n-1 \quad (1.2)$$

用 $x_0(k+1)$ 表示在 k 年出生的人口, 可表示为

$$x_0(k+1) = a_0 x_0(k) + a_1 x_1(k) + \dots + a_n x_n(k) \quad (1.3)$$

其中 $a_i (i=0, 1, \dots, n)$ 是第 i 年龄组的生育率, 可由统计资料确定.

从而关系 (1.2)、(1.3) 描述了人口增长系统.

例 1.3 羊、狼系统 S .

设某海岛生活着羊和狼, 羊吃草为生、狼吃羊为生. 这是一个生命系统. Volterra (1860~1940) 用如下方程组

$$\begin{cases} \frac{dN_1(t)}{dt} = aN_1^2(t) - bN_1(t)N_2(t) \\ \frac{dN_2(t)}{dt} = cN_2^2(t) - dN_1(t)N_2(t) \end{cases} \quad (1.4)$$

描述了所谓掠夺-牺牲系统. 这里 $N_1(t)$ 表示在 t 时刻羊的头数、

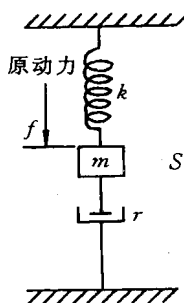


图 1.1

$N_2(t)$ 表示在 t 时刻狼的头数, a, b, c, d 均为正数.(1.4)的右端有明显的生物学的意义.

与系统密不可分的另一概念是状态,它是系统在指定时刻状况的概括,是把系统的过去行为与未来行为分离开来的一组必要且充分的信息,是关于系统的过去的现在信息的最小量.如在例1.1中系统的运动是由牛顿力学原理导出的微分方程所描述,物体 m 的位置和动量完全确定了系统的运动,它们描述着系统的状态.而我们把用于描述系统状态的变量称为状态变量.

在控制论中我们仅考虑控制系统.控制系统是指用来按某种方式调节和控制信息流、能量流、物质流等的任意一个系统,它一般由两个基本部分组成:主控系统(或称控制器)和受控系统(或称装置),如图1.2所示.

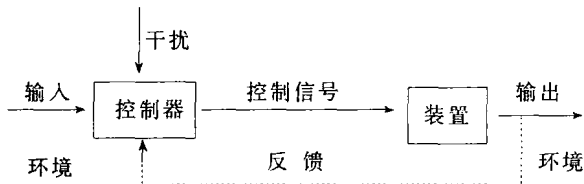


图 1.2

外部环境对控制系统的作用称为控制系统的输入,使控制系统达到预定目的的输入,称为控制输入;干扰系统达到预定目的的输入,称为干扰输入.将控制系统对输入所作出的特定反应,从而影响控制系统外部环境,称为控制系统的输出.

控制系统一般可看做由三个子系统组成的:即输入子系统、状态子系统、输出子系统,如图1.3所示.输入子系统是环境对控制系统的作用系统.输出子系统是控制系统对环境的影响系统.联系输入子系统和输出子系统的是状态子系统.状态子系统一般可由微分方程或差分方程来描述.

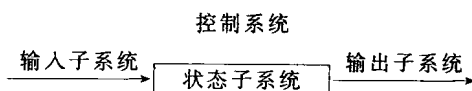


图 1.3

例 1.4 考虑由线性部分和一个非线性环节组成的非线性系统,经过适当的结构变换后,可设其框图如图 1.4 所示.描述该系统的方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ u = -\varphi(y) \\ y = c^T x \end{cases} \quad (1.5)$$

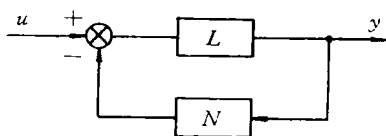


图 1.4

其中 A 是 $n \times n$ 实矩阵,

b 和 c 是 n 维实向量,

$\varphi(\cdot): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 是一未必

确知的非线性特性,一般归为一类函数.显然(1.5)式是控制系统,它依次由状态子系统,输入子系统,输出子系统构成.

对于一个控制系统而言,一定的输入都会有一定的输出;反之,任何输出都对应一定的输入.如果控制系统的某个元素或子系统的输出是另一个元素或子系统的输入,则称这两个元素或子系统之间的这种相互关系为“耦合”.简言之,控制系统各构成元素或子系统之间的因果关系称为“耦合”.“耦合”的基本形式有串联耦合、并联耦合和反馈耦合.

控制系统一般分为两类:开环控制系统和闭环控制系统.开环控制系统的输出不能以任何直接方式作用装置.闭环控制系统又称反馈控制系统,其输出可以直接作用装置.如图 1.2 所示,系统的输出与干扰均送入控制器,控制器使系统的输出与干扰相比较,并强迫或命令系统按照这两种信号之差(在某种意义下)为最小来作用.人和动物的器官功能是反馈过程的一个例子.例如人的眼睛,虹膜张开能使光线经过晶状体映入视网膜

上,当视网膜上光线太强时,这个信号反馈到虹膜,它就调节张开的程度以接收适量的光线。

数学控制论是控制论发展中的数学理论,它研究的基本问题是:

1. 数学模型. 即确定控制系统的一个适当的数学描述,本书仅讨论用微分(或差分)方程描述的系统。

2. 可控性. 确定是否可以用一个命令或控制变量来影响装置的所有状态变量。

3. 可观测性. 从易测定的输出,能否计算装置的所有状态变量。

4. 稳定性. 控制系统含有干扰输入,这是无法精确描述的(如例 1.4 中的函数 φ),控制系统的性态在干扰下是否稳定。

5. 最优控制. 对控制系统能否从允许控制中挑选出一种控制使得系统从某个初态“运动”到某个所要求的终态,而需要的指标(如最少时间,最短距离,最小能量或这些指标的组合)在某种意义下被满足。

本书以上述基本问题为主线,系统介绍数学控制论的理论和方法,还特别介绍了这些理论和方法在处理实际问题中的应用。

§ 1.3 控制论的发展及应用

自维纳创立控制论以来,控制论大体经历了经典控制论、现代控制论、大系统控制论这样三个阶段. 1947 年是经典控制论的起点,到 1957 年已发展成为一门独立的学科,相继产生了若干对分析实际控制系统卓有成效的方法,这一时期研究系统所采用的主要方法是频域法,即采用传递函数来研究设计自动化系统,其设计标准主要是系统的稳定性. 频域法的缺陷是当有三个自由度以上的相互作用时,要确定其稳定性很困难. 这就促

使控制论在认识上必须有一个飞跃,使其进入现代控制论的阶段.这个阶段最主要特征是找到了传递函数的基础——微分方程来考虑的基本构想,引入了状态、状态空间这些基本概念,并用状态空间来研究系统的稳定性,产生了用时域的一阶常微分方程组对线性系统的描述.从 50 年代中起还提出了“最优化”、“不确定性量化”等概念,并由此发展起来一套新的控制技术.到 1965 年可以说现代控制论已逐渐形成并得到广泛的应用.1973 年前后,由于控制的系统越来越大,有的甚至到达数千个可分“状态”,推动了对这些大系统进行分析和综合,这就使控制论发展逐步进入了大系统控制论阶段.这个阶段着重研究大系统的结构方案,总体设计中的“分解”方法和协调等问题,逐步解决大系统最佳设计、最佳控制、最佳管理.美国阿波罗计划的实现,就是大系统控制论应用的成功实例.

科学史上,也许没有任何学科比控制论发展得更为迅猛的了.控制论是从宏观方面将动物、人、通信和控制机器的控制功能加以类比,概括出一切控制对象都必须遵循的观点、法则和定律.它跨越了具体学科的界限,把控制的基本功能归结为信息的接收、交换、存储、处理、反馈和输出.因此,它能与一切学科结合,形成各种各样的控制论分支,如工程控制论、生物控制论、经济控制论、社会控制论、教育控制论等.这里,我们简单介绍这些分支.

工程控制论的奠基人是中国科学家钱学森,他的专著《工程控制论》(1954 年英文版,1956 年俄文版,1957 年德文版,1958 年中文版,1981 年修订中文版)为本学科奠定了理论基础.这是控制工程系统的总结,是从工程技术提炼到系统理论而形成的自动控制理论.工程控制论把设计稳定与制导系统这类工程实践作为主要研究对象.工程控制论的发展大致可分三个大的阶段,这和控制论的发展阶段相对应.40 年代至 50 年代在经典控