西安交大考研

2011版 数学考研

历年真题分类解析

数学三

主　编　武忠祥
副主编　吴云江　魏战线

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

1987～2010

2011版

数学考研

历年真题分类解析

(数学三)

西安交通大学出版社
·西安·

内 容 提 要

数学考试要考三门课程，点多面广难度大，准备考研的同学都会面临如何备考的问题. 如果按部就班地重新将三门课重学一遍，势必是复习效率低，水平提高有限；如果大量做题，盲目的题海战术，往往有的考点没有复习到，有的考点复习过了头，复习不得要领. "数学复习最好的辅导书莫过于历年真题"，最好的复习方法是"反复琢磨历年真题"，这是往届考生的经验和体会. 紧紧抓住历年真题，沿着真题提供的信息来指导复习，真正理解和掌握真题的内涵，就能把握住复习的主动权，这是有效、保险的复习方法和简捷、高效的复习途径.

本书内容分为四部分：第一部分，通过典型例题介绍、归纳客观题的解题方法和技巧；第二部分，汇集了1987年至2010年全部数学考研试题，并逐题分类给出详细解答，透彻分析每题所考的知识点，归纳总结出常考的题型；第三部分，在研究分析历年试题的基础上，精心设计了有针对性的自测练习题，同时附有答案与提示供考生复习之用；第四部分，在本书附录中，收录了近六年的考研试卷（每题均附有解答索引），可供最后综合检验复习效果之用.

本书适合考研读者使用，也可供大专院校师生参考.

西安交通大学出版社考研图书网：kaoyan. xjtupress. com

图书在版编目(CIP)数据

2011版数学考研历年真题分类解析. 数学三/武忠祥主编. —西安：西安交通大学出版社，2010.4

ISBN 978-7-5605-3498-5

Ⅰ.①2… Ⅱ.①武… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-解题 Ⅳ.①O13—44

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第060768号

书　　名 2011版数学考研历年真题分类解析(数学三)
主　　编 武忠祥
副 主 编 吴云江　魏战线
责任编辑 叶　涛

出版发行 西安交通大学出版社
(西安市兴庆南路10号　邮政编码710049)
网　　址 http://www. xjtupress. com
电　　话 (029)82668357　82667874(发行部)
(029)82668315　82669096(总编办)
传　　真 (029)82668280
印　　刷 西安市新城区兴庆印刷厂

开　　本 787mm×1 092mm　1/16　**印张** 24.125　**字数** 742千字
版次印次 2010年4月第4版　2010年4月第1次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5605-3498-5/O·328
定　　价 35.80元

读者购书、书店添货、如发现印装质量问题，请与本社发行中心联系、调换。
订购热线：(029)82665248　(029)82665249
投稿热线：(029)82664954
读者信箱：jdlgy@yahoo. cn

2011版前言

2010年考研数学试题有两大特点：一是卷中最难的试题又回归2008年以前的规律，考积分中值定理有关的证明题，而不是考定理的证明(2008和2009两年试卷中最难的题都是考高等数学教材中定理的证明)；二是长期不考的非重点内容也出了两道题(反常积分敛散性判定，二重积分定义求极限). 望读者给予足够的重视，本版也相应做了适当的调整.

回顾大纲变化及要求

2009年数学考试大纲做了较大的调整，将原来的数学三和数学四合并为数学三，并对考试内容和要求做了调整。2007年数学考试大纲对客观题由原来的14道题增加到16道题，客观题比例由原来的37%增加到43%. 时隔一年，2008年数学考试大纲又将客观题比例调整到原来的比例，即14道客观题，约占37%. 调回原来比例一个很重要的原因是客观题部分得分率低，比例越大，考试成绩越低. 事实上，长期以来考生在客观题部分得分率较低，直接影响了考生的数学总成绩. 本书自始至终对于客观题给予高度的重视，这是本书的主要特点之一，本书第1章通过历届考题中的典型试题，归纳总结了客观题的解题方法和技巧，并在后面的各章中对每道客观题的解题思路和方法都给出了详尽的分析和介绍，同时对很多客观题还给出了多种巧妙的解法，目的只有一个，使读者在解决客观题这个问题上有新的突破.

复习方法与途径

数学考试要考三门课程，点多面广难度大，准备考研的同学都会面临如何备考的问题. 如果按部就班地重新将三门课重学一遍，势必是复习效率低，水平提高有限；如果大量做题，盲目的题海战术，往往是有的考点没有复习到，有的考点复习过了头，复习不得要领. 关于复习方法，我们建议紧紧围绕考研真题来复习. 24年来积累的近两千道真题，是命题专家根据考试大纲精心设计出来的，综合反映了考研要求的全面信息. 如，从某考点历年考到的分数累计多少，反映出该考点的重要程度；从某题型历年出现的频度，反映出该题型的重要性；考核基本概念的方式和角度，考点综合性的形式等等，无一不体现在真题中. 所以，"数学复习最好的辅导书莫过于历年真题"，最好的复习方法是"反复琢磨历年真题"，这是往届考生的经验和体会. 紧紧抓住历年真题，沿着真题提供的信息来指导复习，真正理解和掌握真题的内涵，就能把握住复习的主动权，这是有效、保险的复习方法和简捷、高效的复习途径.

本书使用指南

1. 首先，根据各部分内容的"考点分析"，对考研大纲所要求的基本内容进行必要的复习. 一般可借助大学相应课程的教材进行复习，重点复习基本概念、基本理论、基本方法和基本公式.

2. 其次，动手试做历年试题(不要直接去看试题解答). 如果可以做出来，做完后再与后面的解答作对照分析：做法是否一样？若不一样，哪个方法好？好在什么地方；如果经过反复思考还是做不出来，这时带着问题去看解答. 不仅要看懂，而且要特别注意分析做不出来的原因，问题出在哪里？是概念？是题型？是技巧？还是根本没有头绪.

3. 然后，试题无论是否会做，试题解析部分的“注释”和“分析”都应该认真看看. “注释”主要归纳了本题的考点和解决方法，以及解答的关键和易出现的错误；“分析”主要指出解答此类问题从何处入手，如何破题.

4. 当一章的历届试题研究完后，要结合本书归纳的“本部分的重点”及“本部分常考的题型”，总结本章的考点、重点和常考题型的解题方法和技巧.

5. 为了适当地扩大复习面，检验和巩固已复习的内容，再做一做“自测练习题”. 我们为本书精心编写的自测练习题有很强的针对性，题型和考点都与考题十分接近，有些甚至几乎与考题完全一样. 我们对考生反映比较难的“线性代数”和“概率论与数理统计”部分的自测题，几乎给出了全部解答.

6. 最后，为了检验复习效果，将往年的试卷做一遍. 做全真试卷的另一目的是操练考试策略，即，在规定的时间内是否有把握地做完全部题目，如果来不及，应采取什么策略，以求取得最高的分数.

7. 另外，从历年阅卷反馈的信息得知，选择题和填空题(即，客观题)的得分率很低. 选择题主要考基本概念，填空题主要考基本运算. 两类题的共同点是概念性强，技巧性强，不管过程，只看结果. 不掌握这一特点，按部就班地去解题，很可能费时费力，还得不到正确的结果. 本书第 1 章专门归纳总结了客观题的解题方法和技巧，研究和掌握这些方法和技巧，可以达到事半功倍的复习效果.

数学复习归纳成一句话，就是反复琢磨历年真题. 愿本书能为考研同学助一臂之力，祝考研同学复习顺利，考试成功！

编者

2010 年 3 月于西安交大

第1版前言

(2010年修改)

任何事物的产生和发展都具有规律性，复习考试也不例外，对任何考试都要重视运用“**研究过去，找出规律；认识现在，掌握重点；预测未来，胸有成竹**”的思维方法. 1987年以来全国工学、经济学硕士研究生入学实行统一考试，对于数学考试，多年来的试题总是含有稳定的、普遍的、反复出现的共性. 事实上，每年的研究生入学考试数学试题(数学一，数学二，数学三)中都有许多试题是与往届考题完全类似或解题思路几乎完全一样的. 因此，为了准备新的研究生入学考试，我们应当认真分析研究历届试题，从中发现规律，归纳出每部分内容的重点、难点及常考的题型，进一步把握考题的特点以及命题的思路和规律.

本书汇集了1987年至今历届全国硕士研究生入学统一考试数学试题，这些试题是考研同学了解、分析和研究全国硕士研究生入学考试最直接、最宝贵的第一手资料. 考研题是命题组专家的智慧结晶，它不仅具体地反映了《考试大纲》所规定的对考生数学知识、能力和水平的测试要求，而且全面展现了考研试卷的结构，各部分试题分布，考研试题的特点，每部分内容的考点、重点和难点；同时还蕴含着命题的指导思想、基本原则和命题的趋势. 本书以历届考研试题为基本素材，对每一道试题进行了详细解答和分析，对考生关心的问题进行了深入的分析、研究和总结.

本书对历年考研试题逐题给出了详细解答，并尽量做到一题多解. 有很多题目的解法是我们几位作者长期从事教学和考研辅导研究总结出来的，具有独到之处，其中有些题目的解法比标准答案的解法更简捷，甚至可以节省解题时间一半以上. 另外，根据多年的考试分析，考生在客观题(即选择题和填空题)部分得分率较低. 客观题共56分，占整个试卷分数约37%，一旦这部分失分太多，考生成绩很难上去. 分析客观题得分率较低的原因，我们认为主要是考生没有很好掌握客观题特有的解法和技巧. 因为同样一种素材设计成客观题与设计成非客观题，在解法上往往有很大的差异. 出成客观题后，因为答题时只看结果不问过程，所以往往有独特的、巧妙的解法. 因此本书在第1章通过典型例题给读者归纳总结了客观题的解题方法和技巧，以提高读者求解客观题的能力. 在后面的各章中我们对历年考研客观题不仅给出了答案，而且给出了解答和分析，以便读者进一步看到第1章中介绍的客观题解题方法和技巧在每个具体问题中的灵活应用.

本书在对历年考研数学试题逐题解析的基础上，每题都给出了注释，不仅对每题所考的知识点和难点进行了分析，而且对试题的类型、每一种类型试题的解法进行了归纳总结，使考研同学能够举一反三，触类旁通；同时通过具体题目，对考生常犯的错误进行了分析，使考生引以为戒；另外针对考生普遍感到很多考研试题拿到后往往难以下手的问题，对于这样的试题在解答之前都有一个分析，通过分析解题思路和解题方法，以提高读者的破题能力.

本书把历年考研试题依据考试大纲的章节，按内容分章，每章给出一个统计表，通过这个

表可看到：本章内容历年所考分数，本章考点的重点、以及这些考点在历年考试中考到的次数和所占的分数. 我们在统计表的基础上对本章的考点、重点及常考的题型进行了归纳和总结，以利于读者在复习时抓住要害、突出重点. 另外，把历年同一章内容试题放在一起，我们不难从中发现近几年的考题中有许多与往年的试题类似，因此研究往年的考题对我们准备下一年的研究生考试是很有好处的.

本书每章后还编写了自测练习题，并附有答案与提示. 一方面读者读完每章后，可用这些题目作一个自我检查；另一方面在每章通过历年考题介绍了很多解题方法和技巧后，这些自测题又给读者提供了一个很好的练习和实践的机会. 通过这些练习不仅有利于读者尽快掌握这些解题方法和技巧，同时还有利于加深读者对每章内容的考点、重点及难点的理解.

另外，我们在编写自测练习题时也充分注意到近年来经管类数学试卷（数学三）中出现了不少与工学类（数学一，数学二）往年数学试卷中完全类似的题目，同样工学类试卷中也出现了与经管类往年数学试卷中类似的题目. 所以，我们在编写工学类自测练习题时，充分吸收了经管类往年考题中典型的和新颖的试题；同样在经管类的自测练习题中也充分吸收了工学类往年试题中的典型试题. 这也就是说，我们的自测练习题同时也是下一年考试的预测题.

本书共有三册（即数学一，数学二，数学三），书中的高等数学部分和客观题解题方法与技巧部分由武忠祥教授编写；线性代数部分由魏战线教授编写；概率论与数理统计部分由吴云江副教授编写.

关于书中的记号作两点说明：一个是在试题解析中，有的试题的解法或证明前标有记号“Δ”，表示本题的这种解法或证法是作者研究和总结出的独特的解法或证法；另一个是在考点分析的表格中，在同一个考点和同一个年份会出现类似于“3＋5”的数据，这表示在这一年，这个考点被两道题考到，其中一题 3 分，另一题 5 分.

限于作者水平，加之时间仓促，书中难免有不足之处，恳请读者批评指正.

编　者

2010 年 3 月修改于西安交大

目　录

2011 版前言

第 1 版前言(2010 年修改)

第 1 章　客观题解题方法与技巧

1.1　填空题的求解方法与技巧 …………………………………… (1)
　1　利用几何意义 …………………………………… (1)
　2　利用物理意义(重心、形心) …………………………………… (1)
　3　利用对称性和奇偶性 …………………………………… (2)
1.2　选择题的解题方法和技巧 …………………………………… (3)
　1　直接法 …………………………………… (3)
　2　排除法 …………………………………… (5)

第 2 章　微积分

1　函数 极限 连续

1.1　历年试题分类统计及考点分布 …………………………………… (10)
1.2　历年试题 …………………………………… (11)
1.3　试题解析 …………………………………… (13)
1.4　自测练习题 …………………………………… (19)
　　答案与提示 …………………………………… (21)

2　一元函数微分学

2.1　历年试题分类统计及考点分布 …………………………………… (23)
2.2　历年试题 …………………………………… (24)
2.3　试题解析 …………………………………… (29)
2.4　自测练习题 …………………………………… (49)
　　答案与提示 …………………………………… (52)

3　一元函数积分学

3.1　历年试题分类统计及考点分布 …………………………………… (54)
3.2　历年试题 …………………………………… (55)
3.3　试题解析 …………………………………… (60)
3.4　自测练习题 …………………………………… (79)
　　答案与提示 …………………………………… (81)

4 多元函数微积分学
4.1 历年试题分类统计及考点分布 …… (83)
4.2 历年试题 …… (84)
4.3 试题解析 …… (88)
4.4 自测练习题 …… (105)
答案与提示 …… (108)
5 无穷级数
5.1 历年试题分类统计及考点分布 …… (110)
5.2 历年试题 …… (111)
5.3 试题解析 …… (113)
5.4 自测练习题 …… (123)
答案与提示 …… (126)
6 常微分方程与差分方程
6.1 历年试题分类统计及考点分布 …… (128)
6.2 历年试题 …… (128)
6.3 试题解析 …… (130)
6.4 自测练习题 …… (138)
答案与提示 …… (139)

第3章 线性代数
1 行列式
1.1 历年试题分类统计及考点分布 …… (141)
1.2 历年试题 …… (141)
1.3 试题解析 …… (141)
1.4 自测练习题 …… (142)
答案与提示 …… (144)
2 矩阵
2.1 历年试题分类统计及考点分布 …… (145)
2.2 历年试题 …… (146)
2.3 试题解析 …… (149)
2.4 自测练习题 …… (160)
答案与提示 …… (164)
3 向量
3.1 历年试题分类统计及考点分布 …… (169)
3.2 历年试题 …… (170)
3.3 试题解析 …… (171)
3.4 自测练习题 …… (179)
答案与提示 …… (181)

4 线性方程组

4.1 历年试题分类统计及考点分布 …… (185)
4.2 历年试题 …… (186)
4.3 试题解析 …… (190)
4.4 自测练习题 …… (208)
答案与提示 …… (212)

5 矩阵的特征值和特征向量

5.1 历年试题分类统计及考点分布 …… (219)
5.2 历年试题 …… (220)
5.3 试题解析 …… (223)
5.4 自测练习题 …… (240)
答案与提示 …… (243)

6 二次型

6.1 历年试题分类统计及考点分布 …… (250)
6.2 历年试题 …… (251)
6.3 试题解析 …… (252)
6.4 自测练习题 …… (260)
答案与提示 …… (262)

第4章 概率论与数理统计

1 随机事件和概率

1.1 历年试题分类统计及考点分布 …… (268)
1.2 历年试题 …… (268)
1.3 试题解析 …… (270)
1.4 自测练习题 …… (275)
答案与提示 …… (277)

2 随机变量及其概率分布

2.1 历年试题分类统计及考点分布 …… (280)
2.2 历年试题 …… (280)
2.3 试题解析 …… (285)
2.4 自测练习题 …… (303)
答案与提示 …… (305)

3 随机变量的数字特征

3.1 历年试题分类统计及考点分布 …… (311)
3.2 历年试题 …… (311)
3.3 试题解析 …… (314)
3.4 自测练习题 …… (328)
答案与提示 …… (329)

4 大数定律和中心极限定理
4.1 历年试题分类统计及考点分布 …………………………………… (334)
4.2 历年试题 …………………………………… (334)
4.3 试题解析 …………………………………… (335)
4.4 自测练习题 …………………………………… (337)
答案与提示 …………………………………… (337)
5 数理统计的基本概念
5.1 历年试题分类统计及考点分布 …………………………………… (339)
5.2 历年试题 …………………………………… (339)
5.3 试题解析 …………………………………… (340)
5.4 自测练习题 …………………………………… (343)
答案与提示 …………………………………… (344)
6 参数估计
6.1 历年试题分类统计及考点分布 …………………………………… (346)
6.2 历年试题 …………………………………… (346)
6.3 试题解析 …………………………………… (348)
6.4 自测练习题 …………………………………… (354)
答案与提示 …………………………………… (355)
7 假设检验
7.1 历年试题分类统计及考点分布 …………………………………… (358)
7.2 历年试题 …………………………………… (358)
7.3 试题解析 …………………………………… (358)
7.4 自测练习题 …………………………………… (358)
答案与提示 …………………………………… (359)
附录 2005年～2010年全国硕士研究生入学统一考试数学(三)试题 …………………… (360)

第1章　客观题解题方法与技巧

硕士研究生入学考试数学试题中的客观题有两种：一种是填空题，另一种是选择题. 客观题在研究生入学考试中占56分，占总分的37.4%. 从目前情况看，考生在客观题部分得分率很低，正是由于这部分得分率很低，所以总分就很难上去. 分析其原因主要是两方面：一方面是考生做计算题的准确率较低，基本概念和基本理论没有吃透；另一方面是考生对求解客观题的解题方法和解题技巧掌握得不好.

填空题绝大部分是计算题，但填空题不像一般计算题，它只看结果，不看过程. 所以，若做计算题的准确率不高，填空题很容易失分. 选择题大部分主要考查基本概念和基本理论，如果基本概念和基本理论没有吃透，选择题部分也就很容易丢分. 另一个方面，一道题出成客观题后往往会有更巧妙更简单的方法. 当然客观题用我们平时求解主观题的方法也能求解，但这种一般方法和简单方法从解题时间上看有时相差几倍，甚至十来倍. 因此，要提高客观题部分的得分率，一方面要提高做计算题的准确率，吃透基本概念和基本理论；另外一个很重要的方面，就是要掌握一定的客观题的解题方法和技巧. 本章主要是通过一些典型例题，归纳总结客观题解题方法和技巧. 以提高考生求解客观题的能力.

1.1　填空题的求解方法与技巧

填空题绝大部分是计算题，常用的技巧有三种：一种是利用几何意义；另一种是利用物理意义（重心、形心）；第三种是利用对称性和奇偶性.

1. 利用几何意义

例 1　(00年，数学一) $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x =$ ________.

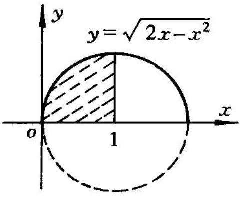

图 1.1

解　本题应填$\frac{\pi}{4}$. 本题常规的求解方法是先把$\sqrt{2x-x^2}$根号里面配方，再用三角代换，但计算量较大. 实际上，本题根据定积分几何意义立刻知道应填$\frac{\pi}{4}$. 事实上，该积分在几何上表示单位圆$(x-1)^2+y^2\leqslant 1$面积的$\frac{1}{4}$，如图1.1.

例 2　(91年，数学一) 若随机变量X服从均值为2，方差为σ^2的正态分布，且$P\{2<X<4\}=0.3$，则$P\{X<0\}=$ ________.

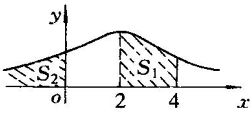

图 1.2

解　应填0.2. 由于正态分布的密度函数是关于均值$x=2$对称. 由图1.2易知

$$P\{X<0\}=S_2=0.5-S_1=0.5-0.3=0.2$$

例 3　$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$ ________.

解　应填$\frac{2}{3}\pi a^3$. 事实上，在几何上原题中积分应等于球体$x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$的体积的一半，因此应为$\frac{2}{3}\pi a^3$

2. 利用物理意义(重心，形心)

例 4　(94年，数学三) 设$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant x+y+1\}$，则$\iint\limits_D (x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________.

解 应填$\frac{3}{2}\pi$. 积分域 D 实际上是圆域 $(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2\leqslant\frac{3}{2}$.

由形心公式知：$\bar{x}=\dfrac{\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{S_D}$，$\bar{y}=\dfrac{\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{S_D}$

其中 $\bar{x}$，$\bar{y}$ 分别表示区域 D 形心的 x 坐标和 y 坐标，S_D 表示区域 D 的面积. 本题中的圆域 $(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2\leqslant\frac{3}{2}$ 形心显然是圆心 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，则 $\bar{x}=\bar{y}=\frac{1}{2}$，而 $S_D=\pi\times\frac{3}{2}=\frac{3}{2}\pi$

则 $\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=S_D\cdot\bar{x}=\frac{3}{2}\pi\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}\pi$，$\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{3}{4}\pi$

故
$$\iint\limits_D(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{3}{2}\pi$$

注 本题原题是计算题.

例 5 （99 年，数学三、数学四）设 D 是由直线 $x=-2$，$y=0$，$y=2$ 以及曲线 $x=-\sqrt{2y-y^2}$ 所围成的平面域，则 $\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________.

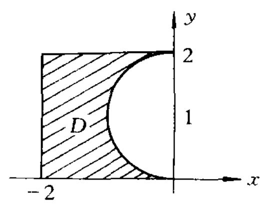

图 1.3

解 应填 $4-\frac{\pi}{2}$. 积分域 D 如图 1.3 所示，由图 1.3 不难看出 $\bar{y}=1$，积分域 D 的面积 S_D 应为正方形面积减去半圆面积，即

$$S_D=4-\frac{\pi}{2}$$

因此，$\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\bar{y}\cdot S_D=4-\frac{\pi}{2}$.

注 本题原题是计算题，事实上数学三和数学四中有 5 年的试题都可用此技巧求解.

3. 利用对称性和奇偶性

例 6 （87 年，数学三、数学四）$\int_{-\pi}^{\pi}x^4\sin x\mathrm{d}x=$ ________.

解 应填 0. 由于 $x^4\sin x$ 为奇函数，且积分区间 $[-\pi,\pi]$ 关于原点对称.

例 7 （94 年，数学三、数学四）$\int_{-2}^{2}\frac{x+|x|}{2+x^2}\mathrm{d}x$ ________.

解 应填 ln3

原式$=\int_{-2}^{2}\frac{x}{2+x^2}\mathrm{d}x+\int_{-2}^{2}\frac{|x|}{2+x^2}\mathrm{d}x=0+2\int_0^2\frac{x}{2+x^2}\mathrm{d}x=\ln(2+x^2)\Big|_0^2=\ln3$

例 8 （01 年，数学二）$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^3+\sin^2x)\cos^2x\mathrm{d}x=$ ________.

解 应填$\frac{\pi}{8}$.

$$\begin{aligned}原式&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x^3\cos^2x\mathrm{d}x+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\cos^2x\mathrm{d}x=0+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\cos^2x\mathrm{d}x\\&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x(1-\sin^2x)\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\mathrm{d}x-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4x\mathrm{d}x\\&=2\left[\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\right]=\frac{\pi}{8}\end{aligned}$$

注 本题中用到基本公式 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^nx\mathrm{d}x=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$，（$n$ 为偶数）.

例 9 （94 年，数学一、数学二）设区域 D 为 $x^2+y^2\leqslant R^2$，则 $\iint\limits_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________.

解　应填$\frac{\pi}{4}R^4\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)$. 由于本题积分域为$x^2+y^2\leqslant R^2$，由$x$和$y$的对称性知

$$\iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

因此

$$\begin{aligned}\iint_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\iint_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R r^3\mathrm{d}r\\&=\frac{\pi}{4}R^4\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\end{aligned}$$

例 10　（01年，数学三、数学四）设平面域D由直线$y=x$，$y=-1$及$X=1$所围成. 则$\iint_D y[1+xe^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________.

解　本题应填$-\frac{2}{3}$. 先画出积分域D如图1.4△ABC. 用$y=-x$将D分为两部分D_1（△ABO）和D_2（△BOC）

$$\iint_D y[1+xe^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D xye^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中　$\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^1\mathrm{d}y\int_y^1 y\mathrm{d}x=-\frac{2}{3}$

$$\iint_D xye^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_1}xye^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2}xye^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

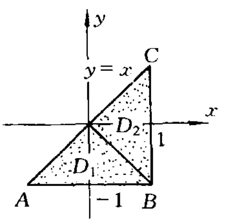

图 1.4

由于$xye^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$是$x$的奇函数，$D_1$关于$y$轴左右对称. 则

$$\iint_{D_1}xye^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

同理，$xye^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$是$y$的奇函数，$D_2$关于$X$轴上下对称. 则

$$\iint_{D_2}xye^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

故原式$=-\frac{2}{3}$.

1.2　选择题的解题方法和技巧

研究生入学考试数学试卷中的选择题是单项选择题. 所谓单项选择题也就是四个选项中有且仅有一个选项是正确的. 因此，常用的解题方法是两大类：一种是直接验证某个选项正确，则其余选项必定不正确（不必验证）. 这种方法通常称为**直接法**；另一种方法是验证其中三个选项不正确，则剩下的一个选项必定正确（也不必验证），这种方法通常称作**排除法**.

1. 直接法

直接法就是直接验证某个选项正确，通常有两种途径，一种是通过直接计算或推演得出某个选项正确，这种方法通常称为推演法；另一种方法是借助几何分析得出正确选项. 这种方法叫几何法. 以下举例说明推演法和几何法的应用.

1）推演法

例 1　（91年，数学一、数学二）曲线$y=\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$

(A) 没有渐近线. (B) 仅有水平渐近线.

(C) 仅有铅直渐近线 (D) 既有水平渐近线也有铅直渐近线.

解 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}=1$，则原曲线有水平渐近线 $y=1$，又 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}=\infty$，则原曲线有铅直渐近线 $x=0$，所以应选(D).

例 2 (93 年，数学一、数学二) 设 $f(x)=\int_0^{\sin x}\sin(t^2)\mathrm{d}t$，$g(x)=x^3+x^4$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的

(A) 等价无穷小. (B) 同阶但非等价无穷小.

(C) 高阶无穷小. (D) 低阶无穷小.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin x}\sin(t^2)\mathrm{d}t}{x^3+x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin^2x)\cos x}{3x^2+4x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{3x^2+4x^3}=\dfrac{1}{3}$

则应选(B).

例 3 (98 年，数学三、数学四) 设周期函数 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内可导，周期为 4，又 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点$(5,f(5))$处的切线斜率为

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) 0 (C) -1 (D) -2

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-x)-f(1)}{-x}=\dfrac{1}{2}f'(1)=-1$

则 $f'(1)=-2$，由 $f'(x)$ 周期性知，$f'(5)=f'(1)=-2$. 故应选 (D).

2) 几何法

例 4 (97 年，数学一、数学二) 设在区间$[a,b]$上 $f(x)>0$，$f'(x)<0$，$f''(x)>0$，令 $S_1=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，$S_2=f(b)(b-a)$，$S_3=\dfrac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)$ 则

(A) $S_1<S_2<S_3$ (B) $S_2<S_1<S_3$

(C) $S_3<S_1<S_2$ (D) $S_2<S_3<S_1$

解 由题设可知，在$[a,b]$上，$f(x)>0$ 单调减，曲线 $y=f(x)$ 上凹，如图1.5. S_1 表示 $y=f(x)$ 和 $x=a$，$x=b$ 及 x 轴围成曲边梯形面积，S_2 表示矩形 $abBC$ 的面积，S_3 表示梯形 $AabB$ 的面积. 由图 1.5 可知，$S_2<S_1<S_3$. 故应选(B).

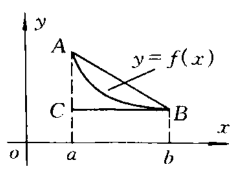

图 1.5

例 5 (97 年，数学三、数学四) 若 $f(-x)=f(x)$，$(-\infty<x<+\infty)$，在$(-\infty,0)$内 $f'(x)>0$，且 $f''(x)<0$，则在$(0,+\infty)$内

(A) $f'(x)>0$，$f''(x)<0$ (B) $f'(x)>0$，$f''(x)>0$

(C) $f'(x)<0$，$f''(x)<0$ (D) $f'(x)<0$，$f''(x)>0$

解 由 $f(-x)=f(x)$ 知，$f(x)$ 为偶函数，而由在$(-\infty,0)$内 $f'(x)>0$，且 $f''(x)<0$ 知在$(-\infty,0)$内，$y=f(x)$ 的图形下凹单调增，则 $f(x)$ 由图 1.6 图形可知，在$(0,+\infty)$内，$f'(x)<0$，$f''(x)<0$，则应选(C).

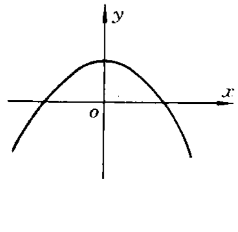

图 1.6

例 6 (93 年，数学三) 设随机变量 X 的密度函数是 $\varphi(x)$，且 $\varphi(-x)=\varphi(x)$，$F(x)$ 是 X 的分布函数，则对任意实数 a，有

(A) $F(-a)=1-\int_0^a\varphi(x)\mathrm{d}x$ (B) $F(-a)=\dfrac{1}{2}-\int_0^a\varphi(x)\mathrm{d}x$

(C) $F(-a)=F(a)$ (D) $F(-a)=2F(a)-1$

解 由 $\varphi(-x)=\varphi(x)$ 知，$\varphi(x)$ 为偶函数，其图形关于 y 轴对称，如图 1.7 由

几何意义可知，$F(-a) = S_1$

$$\int_0^a \varphi(x)\mathrm{d}x = S_2$$

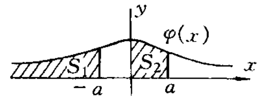

图 1.7

则 $S_1 = \frac{1}{2} - S_2$，即 $F(-a) = \frac{1}{2} - \int_0^a \varphi(x)\mathrm{d}x$. 故应选(B).

例 7 (99 年，数学一）设两个相互独立的随机变量 X 和 Y 分别服从正态分布 $N(0,1)$ 和 $N(1,1)$，则

(A) $P\{X+Y\leqslant 0\} = \frac{1}{2}$　　(B) $P\{X+Y\leqslant 1\} = \frac{1}{2}$

(C) $P\{X-Y\leqslant 0\} = \frac{1}{2}$　　(D) $P\{X-Y\leqslant 1\} = \frac{1}{2}$

解 由于独立正态分布的随机变量的线性组合仍服从正态，则 $X+Y \sim N(1, \sqrt{2}^2)$. $X-Y \sim N(-1, \sqrt{2}^2)$

由正态分布的几何意义知，正态分布的密度函数关于均值左右对称，则其小于均值的概率为$\frac{1}{2}$，则

$$P\{X+Y<1\} = \frac{1}{2}$$

故应选(B).

2. 排除法

所谓排除法就是说明原题四个选项中某三个均不正确，则剩余一个选项必然正确；这种方法在使用时通常是举反例。

例 8 (06 年，数学一、数学二、数学三、数学四）设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数，且 $f'(x)>0, f''(x)>0$，Δx 为自变量 x 在点 x_0 处的增量，Δy 与 $\mathrm{d}y$ 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分，若 $\Delta x>0$，则

(A) $0<\mathrm{d}y<\Delta y$.　　(B) $0<\Delta y<\mathrm{d}y$.

(C) $\Delta y<\mathrm{d}y<0$.　　(D) $\mathrm{d}y<\Delta y<0$.

解 令 $f(x)=x^2$，在 $(0,+\infty)$ 上，$f'(x)=2x>0, f''(x)=2>0$，取 $x_0=1$，则

$$\mathrm{d}y = 2\Delta x$$

$$\Delta y = f(1+\Delta x) - f(1) = (1+\Delta x)^2 - 1^2 = 2\Delta x + (\Delta x)^2$$

由于 $\Delta x>0$，则 $0<\mathrm{d}y<\Delta y$，从而(B)(C)(D) 均不正确，故应选(A).

例 9 (06 年，数学三、数学四）设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h^2)}{h^2}=1$，则

(A) $f(0)=0$ 且 $f'_-(0)$ 存在.　　(B) $f(0)=1$ 且 $f'_-(0)$ 存在.

(C) $f(0)=0$ 且 $f'_+(0)$ 存在.　　(D) $f(0)=1$ 且 $f'_+(0)$ 存在.

解 令 $f(x)=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ x^{\frac{1}{3}}, & x<0 \end{cases}$，显然 $f(x)$ 满足原题设条件，而 $f(0)=0, f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x^{\frac{1}{3}}-0}{x}=\infty$（不存在），则(A)(B)(D) 均不正确，故应选(C).

例 10 (05 年，数学三、数学四）以下四个命题中正确的是

(A) 若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界.

(B) 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界.

(C) 若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界.

(D) 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界，则 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界.

解 令 $f(x)=\frac{1}{x}$，显然 $f(x), f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ 都在 $(0,1)$ 内连续，但 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无界，则(A)(B)不正确.

若令 $f(x)=\sqrt{x}$，显然 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界，但 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ 在 $(0,1)$ 内无界，则(D)不正确，故应选(C).

例 11 (05年，数学三) 设 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛，则下列结论正确的是

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散. (B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$ 发散.

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n+1}+a_{2n})$ 收敛. (D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})$ 收敛.

解 令 $a_n=\frac{1}{n}$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 收敛，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 发散. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n})\geqslant\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散. 则(A)(B)(C)均不正确，故应选(D).

例 12 (96年，数学二) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\delta,\delta)$ 内有定义，若当 $x\in(-\delta,\delta)$ 时，恒有 $|f(x)|\leqslant x^2$，则 $x=0$ 必是 $f(x)$

(A) 间断点. (B) 连续而不可导的点.

(C) 可导的点，且 $f'(0)=0$. (D) 可导的点，且 $f'(0)\neq 0$.

解 令 $f(x)=x^3$，显然 $x\in(-\delta,\delta)$ 时，$|f(x)|=|x^3|\leqslant x^2$. 且 $f'(x)=3x^2$，$f'(0)=0$，则(A)(B)(D)均不正确，故应选(C).

例 13 (90年，数学一、数学二) 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 某邻域内连续，且 $f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=2$，则在点 $x=0$ 处 $f(x)$

(A) 不可导. (B) 可导且 $f'(x)\neq 0$. (C) 取得极大值. (D) 取得极小值.

解 由于当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，所以令 $f(x)=x^2$，则 $f(x)$ 符合原题设条件. 而 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，$f'(0)=0$，取极小值，则(A)(B)(C)均不正确，故应选(D).

例 14 (01年，数学三、数学四) 设 $f(x)$ 的导数在 $x=a$ 处连续，又 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{x-a}=-1$，则

(A) $x=a$ 是 $f(x)$ 的极小值点. (B) $x=a$ 是 $f(x)$ 的极大值点.

(C) $(a,f(a))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(D) $x=a$ 不是 $f(x)$ 的极值点，$(a,f(a))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

解 若取 $f'(x)=-(x-a)$，即令 $f(x)=-\frac{1}{2}(x-a)^2$，则显然 $f(x)$ 符合原题条件，$f(x)=-\frac{1}{2}(x-a)^2$ 在 $x=0$ 取极大值，且 $(a,f(a))$ 也不是 $y=-\frac{1}{2}(x-a)^2$ 的拐点，则(A)(C)(D)均不正确，故应选(B).

例 15 (99年，数学一、数学二、数学三、数学四) 设 $f(x)$ 是连续函数，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则

(A) 当 $f(x)$ 是奇函数时，$F(x)$ 必是偶函数.

(B) 当 $f(x)$ 是偶函数时，$F(x)$ 必是奇函数.

(C) 当 $f(x)$ 是周期函数时，$F(x)$ 必是周期函数.

(D) 当 $f(x)$ 是单调增函数时，$F(x)$ 必是单调增函数.

解 令 $f(x)=\cos x+1$，$F(x)=\sin x+x+1$.

显然 $f(x)$ 是偶函数，周期函数，但 $F(x)$ 不是奇函数，也不是周期函数，则(B)(C)均不正确.

若令 $f(x)=x$，$F(x)=\frac{1}{2}x^2$，则 $f(x)$ 单调增，但 $F(x)$ 不单调增，因此，(D)也不正确，故应选(A).

例 16 (96年，数学四) 设 $f(x)$ 处处可导，则