广西自然科学基金资助立项课题

JIANJIN FANGFA DAOYIN

渐近方法导引

邹凤梧　宋志生　徐柳苏　编　著

陈庆益　主　审

江西科学技术出版社

广西自然科学基金资助立项课题

渐近方法导引

JIANJIN FANGFA DAOYIN

江西科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

渐近方法导引/邹凤梧,宋志生,徐柳苏编著.—南昌:江西科学技术出版社,2004.5

ISBN 7-5390-2421-6

Ⅰ.渐… Ⅱ.①邹…②宋…③徐… Ⅲ.渐近方法 Ⅳ.O175.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 012536 号

国际互联网(Internet)地址:

HTTP://WWW.NCU.EDU.CN:800/

渐近方法导引 邹凤梧 宋志生 徐柳苏编著

出版发行	江西科学技术出版社
社址	南昌市新魏路 17 号 邮编:330002 电话:(0791)8513294 8513098
印刷	江西科佳图书印装有限责任公司
经销	各地新华书店
开本	850mm×1168mm 1/32
字数	126 千字
印张	5
版次	2004 年 5 月第 1 版 2004 年 5 月第 1 次印刷
书号	ISBN 7-5390-2421-6/O·11
定价	15.00 元

内 容 提 要

本书简明扼要地介绍了应用数学中的一种重要方法.第1章阐述渐近分析的基本概念与运算;第2章导出一些重要的含参变量积分的渐近表示;第3及第4章分别介绍正则摄动及奇摄动,它们是寻求微分方程解析近似解的有力工具.

本书可作为应用数学专业、物理学专业及工科有关专业高年级学生与研究生的选课教材,也可供广大应用数学工作者及工程技术工作者作参考书用.

序

自从变量数学于17世纪以解析几何与微积分的形式出现以来,微分方程几乎一直是整个数学科学的主流,它保持兴盛不衰并将继续发展.这首先是因为世界是以微分方程作为表述语言的.也就是说,事物的变化发展或相对平衡稳定是由微分方程来刻画的.随着人们对客观存在的认识与理解不断提高与深入,这种观点愈益得到加强.例如,早在17世纪末,就得出描绘质点动力学的常微分方程组,18世纪初又引出表述刚体动力学的常微分方程组,随后出现了刻画流体运动的拟线性偏微分方程;19世纪初,得到表征一般线性弹性介质的线性偏微分方程组;19世纪后期总结出反映电磁现象的Maxwell方程组,并由此预言电磁波的存在.这些微分方程的研究对工程技术的巨大促进作用是无可置疑的.20世纪初,先后得到相对论中的运动方程组、引力场方程组以及量子力学中的Schrödinger方程及Dirac方程组,后者还预言正电子的存在.这些方程对原子能及核能的开发利用所起的促进作用也是无可置疑的.20世纪50年代以来,在过去很少涉及微分方程的一些科学技术领域里,例如化学、生物学、医学甚至经济学中,也引出了许多新的微分方程.可以预料,当人们对自然界及人类社会的探索进一步深化时,还会出现一些新的微分方程.

微分方程的重要性尽管如上所述,但必须指出,寻求微分方程及其各种定解问题(初值问题、边值问题、初边值混合问题及其他问题)的准确解一般是困难的,甚至是不可能的,于是不得不退而寻求近似解.近似解分为两类:数值近似解与解析近似解.由于电子计算机的出现,多年来已能迅速地并相当精确地求出许多微分

方程定解问题的数值近似解.但是,数值近似解不便于甚至不可能看清变量间的相互变化规律及参变量的作用,尤其是存在多个自变量时,情况变得更加不利.因此,即便是在电子计算机威力日增的今天,寻求解的近似表达式的解析近似方法仍然是十分有用的.

解析近似方法是多种多样的,例如经典的幂级数解法、三角级数解法以及各种变分方法,包括 Ritz 方法、Galerkin 方法与加权余量法等.本书只介绍渐近方法,主要是摄动法(微扰法).渐近方法是由 Poincaré 于 19 世纪 80 年代末在讨论天体力学中的三体问题时系统地建立起来的,后来在纯粹数学及应用数学中得到多方面的推广与发展,更加得到人们的重视.

渐近方法主要是用来处理发散级数的,在 Cauchy 于 19 世纪初提出收敛性概念之前,人们并不考虑收敛或发散的问题,因而得到一些不正确的结果.收敛性的讨论澄清了一些模糊的观点,使数学科学得到健康发展.但实际问题常引出一些不收敛的级数,这就导致两方面的考虑:一方面是引进各种广义的求和法(例如可参看 G.H.Hardy 的 *Divergent Series* 一书,Oxford,1949);另一方面则是在渐近分析的意义下理解这些发散的展式.这就是本书所介绍的内容.值得强调的是:这两方面的研究在实际问题中都有所应用.

本书论证简明扼要,内容概括全面,既侧重方法,又兼顾有关理论,这一点在中外同类书籍中颇具特色.

陈庆益

2003 年 2 月 17 日于武汉喻家山

目　录

第 1 章　渐近级数

本章介绍渐近分析的一些基本概念以及渐近级数的运算法则，这些都是以后各章中会经常涉及的.偏重于应用的读者可以略去所有的证明.

§1.1　阶序关系

为了定义渐近序列与渐近级数，先沿用 20 世纪初由 Landau 引进的两个阶序记号：大 O 与小 o.使用这种记号有很多优点.

以后若无特别说明，自变量 x 可以取实值，也可以取复值；函数 $f(x)$、$g(x)$等也可取实值或复值.

对于给定的两个函数 $f(x)$ 与 $g(x)$，如果存在常数 $A>0$，使得

$$|f(x)|\leq A|g(x)|,\forall\ x\in R\ \text{或}\forall\ x\in \mathbb{C}$$

就记作

$$f=O(g)$$

这里 R 表示整个实数轴，$\mathbb{C}$ 表示整个复平面，$\forall$ 为**遍有量符**，$\forall x\in R$ 表示“对于 R 中的每个 x”.

如果对于某个固定的点 x_0 存在某个邻域

$$\bigcup_\delta=\{x:|x-x_0|<\delta\},$$

δ 为某个正数，且同时存在常数 $A>0$，使得

$$|f(x)|\leq A|g(x)|,\forall\ x\in\bigcup_\delta\ \text{或}\forall\ x\in\bigcup_\delta\setminus x_0,$$

$\bigcup_\delta\setminus x_0$ 表示由 $\bigcup_\delta$ 去掉点 x_0，就记成

$$f=O(g),(\text{当 } x\to x_0).$$

当 $x_0=\infty$ 时，则取

$$\bigcup_{\delta}=\{x:|x|>\delta,\delta>0\text{ 充分大}\}.$$

类似地，如果对任意的 $\varepsilon>0$，存在点 x_0 的邻域 $\bigcup_{\delta}$，使得

$$|f(x)|\leq\varepsilon|g(x)|,\forall\, x\in\bigcup_{\delta}\text{ 或}\forall\, x\in\bigcup_{\delta}\setminus x_0,$$

就记

$$f=o(g)(\text{当 } x\to x_0).$$

特别当 $g(x)$ 在所论定义域 D 中不取零值时，上面的三种情况可以更简明地表述如下：

$$f=O(g),\forall\, x\in D\Leftrightarrow\frac{f}{g}\text{有界},\forall\, x\in D;$$

$$f=O(g),(x\to x_0)\Leftrightarrow\frac{f}{g}\text{有界},(x\to x_0);$$

$$f=o(g),(x\to x_0)\Leftrightarrow\frac{f}{g}\to 0,(x\to x_0).$$

记号 $\Leftrightarrow$ 表示等价性或充分必要性.

关系 $f=O(g_1),f=o(g_2)$ 统称为**阶序关系**.

在渐近方法中，经常用作比较基准函数 $g(x)$ 的是小参数 $\varepsilon>0$ 的整数幂 $\varepsilon^n(n=0,\pm1,\pm2\cdots)$，它们被称为度规函数(gauge functions).

下面举几个比较一般的例子，以便加深理解. 对固定的实数 $\Delta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，引进扇域 S_Δ 如下：

$$S_\Delta=\left\{x\in\mathbb{C}:0<|x|<\infty,|\arg x|<\frac{\pi}{2}-\Delta\right\}.$$

例 1.1.1 对任意的实数或复数 α，当 $\Delta>0$ 时在 S_Δ 中令 $x\to\infty$，都有 $e^{-x}=O(x^\alpha)$ 及 $e^{-x}=o(x^\alpha)$；但当 $\Delta\leq0$ 时，上述阶序关系不再成立.

例 1.1.2 当在 S_0 中令 $x\to\infty$ 时，仅对满足条件 $\mathrm{Re}\alpha\geq0$ 的 α，才有 $e^{-x}=O(x^\alpha)$；而当 $\mathrm{Re}\alpha<0$ 时，上述序阶关系不成立.

例 1.1.3　当 $\Delta>0$ 且 $\mathrm{Re}\alpha\leq 0$ 或当 $\Delta=0$ 且 $\mathrm{Re}\alpha=0$ 时，都有 $e^{-x}=O(x^{\alpha})$.

读者最好自己验证这三个例子.

如果出现于阶序关系中的函数还与某些参变量有关，那么，一般地说，阶序关系定义中所涉及的常数 A 及邻域 $\cup_{\delta}$ 也都与这些参数有关. 如果 A 及 $\cup_{\delta}$ 都能不依赖于参变量，则称相应的阶序关系关于这些参变量是**一致**成立的.

下面考察阶序关系的运算法则. 为确定起见，我们只对大 O 进行叙述，相应的法则对小 o 关系也是成立的. 这时函数的定义域 D 及点 x_0 都已取定，且 x_0 不必属于 D，只要它是域 D 的一个极限点即可. 我们还略去“当 $x\to x_0$”的叙述.

(1)若 $f=O(g)$，$\alpha>0$，则有

$$|f|^{\alpha}=O(|g|^{\alpha}) \tag{1.1.1}$$

(2)若 $f_j=O(g_j)$，$j=1\cdots k$，且 α_j 都是常数，则有

$$\sum_{j=1}^{k}\alpha_j f_j = O\left(\sum_{j=1}^{k}|\alpha_j g_j|\right) \tag{1.1.2}$$

若 $f_j=O(g_j)$关于 j 一致成立，则阶序关系(1.1.2)当使 $k\to\infty$ 时仍成立：若级数 $\sum|\alpha_j g_j|$ 收敛，则级数 $\sum\alpha_j f_j$ 也收敛，且关系(1.1.2)成立；若级数 $\sum|\alpha_j g_j|$ 发散，级数 $\sum\alpha_j f_j$ 可能收敛，也可能发散，但 $\sum\alpha_j f_j/(\sum|\alpha_j g_j|)$ 保持有界.

(3)若 $f_j=O(g_j)$，$j=1\cdots k$，且 α_j 都是常数，则当

$$|g_j(x)|\leq g(x),\ j=1\cdots k,\ \forall\, x\in D\cap\cup$$

这里$\cup$为 x_0 的某个邻域，$x\in D\cap\cup$表示 x 同时属于D 与$\cup$，即有

$$\sum_{j=1}^{k}\alpha_j f_j = O(g) \tag{1.1.3}$$

当 $f_j=O(g_j)$关于 j 一致成立且 $\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_j|<\infty$ 时，阶序关系(1.1.3)当 $k\to\infty$ 时仍旧成立.

(4)若 $f_j = O(g_j)$, $j = 1\cdots k$,则有

$$\prod_{j=1}^{k} f_j = O(\prod_{j=1}^{k} g_j) \tag{1.1.4}$$

阶序关系(1.1.1)的证明是显然的.为了证明阶序关系(1.1.2),设对应于函数 f_j 的常数为 A_j,邻域为 $\cup_j$.当 k 为有限数时,只需取 A 为 $A_1\cdots A_k$ 中最大的一个,取 $\cup$ 为交集 $\bigcap\limits_{j=1}^{k} \cup_j$,即有

$$|\sum \alpha_j f_j| \leq \sum |\alpha_j A_j g_j| \leq A\sum |\alpha_j g_j|, \forall x \in D \cap \cup$$

故关系(1.1.2)成立.当 $k = \infty$ 时,则 A 与 $\cup$ 的存在性可由阶序关系关于 j 的一致性推出.阶序关系(1.1.3)是关系(1.1.2)的推论,因为在所作假定下存在邻域 $\cup' \subset \cup$,使得

$$A\sum |\alpha_j g_j| \leq A\sum |\alpha_j| g = A_1 g, \forall x \in \cup'$$

其中 $A_1 = A\sum |\alpha_j|$.关系(1.1.4)的证明是类似的.

阶序关系可以对自变量进行不定积分,也可以对参变量积分.为了简单起见,这里只考虑 Riemann 积分并对实变量情形进行证明,但所得结果对复变量情形也是成立的.

设 x 为实变量,D 为区间 (a,b),且当 $x \to b$ 时 $f = O(g)$.如果函数 f 及 g 在 D 中都是可积的,则有

$$\int_x^b f(s)ds = O(\int_x^b g(s)ds), x \to b \tag{1.1.5}$$

证明 如果 $\int_x^b |g(s)| ds = \infty$,则断言显然成立.如果对某个 x_0 有 $\int_{x_0}^b |g(s)| ds < \infty$,则存在数 $A > 0$ 及 $c \in (a,b)$,使得

$$\int_x^b |g(s)| ds < \infty; |f(x)| \leq A|g(x)|, \forall x \in (c,b).$$

于是

$$|\int_x^b f(s)ds| \leq \int_x^b |f(s)| ds \leq A\int_x^b |g(s)| ds, \forall x \in (c,b).$$

故阶序关系(1.1.5)成立.

再考虑对参变量的积分.设 x 为 D 中的实变量, y 为参变量, $\alpha \leq y \leq \beta$,且 $f(x,y)=O(g(x,y))$ 当 $x \to x_0$ 时关于 $y \in (\alpha,\beta)$ 一致成立.如果对 D 中任一个固定的点 x,函数 f 及 g 关于 y 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上是可积的,则有

$$\int_\alpha^\beta f(x,y)\,dy = O\left(\int_\alpha^\beta g(x,y)\,dy\right), x \to x_0 \qquad (1.1.6)$$

其证明类似于阶序关系(1.1.5)的证明.利用关系 $f=O(g)$ 关于 y 的一致性,得知存在不依赖于 y 的 A 及 $\cup$,使 $|f| \leq A|g|$. 把这个不等式关于 y 积分,即得阶序关系(1.1.6).

一般说来,不论是对自变量,还是对参变量,阶序关系不允许微分运算.但在解析函数情形,可得到关于阶序关系微分运算的某些一般结果(参看后面的§1.3).

下面列出涉及阶序关系组合的一些结果:

$$O(O(f))=O(f) \qquad (1.1.7)$$

$$O(o(f))=o(O(f))=o(o(f))=o(f) \qquad (1.1.8)$$

$$O(f)o(g)=o(f)o(g)=o(fg) \qquad (1.1.9)$$

$$O(f)+O(f)=O(f)+o(f)=O(f) \qquad (1.1.10)$$

$$o(f)+o(f)=o(f) \qquad (1.1.11)$$

这些显然的结果可推广到任意有限个大 O 及小 o 的类似组合.

以后引用本节的结果时,也可以指关于小 o 的相应法则.例如引用关系(1.1.1)时,可以理解为法则"由 $f=O(g)$ 及 $\alpha>0$,有 $|f|^\alpha = O(|g|^\alpha)$";也可以理解为法则"由 $f=o(g)$ 及 $\alpha>0$,有 $|f^\alpha| = o(|g|^\alpha)$".

§1.2 渐近序列与展式

有限或无限序列 $f_1, f_2\cdots$ 都简记为 $\{f_n\}$.

定义 1.2.1 给定函数序列 $\{f_n\}$. 如果所有的 f_n 都在 D 中定义且当 $x \to x_0 (x \in D)$ 时有 $f_{n+1} = o(f_n), n = 1, 2\cdots$, 就称 $\{f_n\}$ 当 $x \to x_0 (x \in D)$ 时为**渐近序列**.

定义 1.2.2 如果 $\{f_n\}$ 是无限序列且阶序关系 $f_{n+1} = o(f_n)$ 关于 n 一致成立, 就称 $\{f_n\}$ 为**关于 n 一致的渐近序列**. 如果每个 f_n 都依赖于参变量且阶序关系关于参变量一致成立, 就称 $\{f_n\}$ 是**关于参变量一致的渐近序列**.

下面举几个例子, 其中 x 为复变量, D 除特别说明外是整个复平面, S_Δ 是 §1.1 中定义的扇域.

例 1.2.1 $\{(x - x_0)^n\}, x \to x_0$.

例 1.2.2 $\{x^{-n}\}, x \to \infty$.

例 1.2.3 $\{x^{-\lambda_n}\}, x \to \infty (x \in S_\Delta), \mathrm{Re}\lambda_{n+1} > \mathrm{Re}\lambda_n$.

例 1.2.4 $\{x^{-\lambda_n}\}, x \to \infty, \lambda_n$ 都是实数且 $\lambda_{n+1} > \lambda_n$.

例 1.2.5 $\{e^x x^{-\lambda_n}\}, x$ 及 λ_n 如例 1.2.3 或例 1.2.4 所述.

例 1.2.6 $\{e^{-nx} x^{-\lambda_n}\}, x \to \infty (x \in S_\Delta)$, 或是 $\Delta \geq 0$ 且 $\mathrm{Re}\lambda_{n+1} > \mathrm{Re}\lambda_n$, 或是 $\Delta > 0$ 且 λ_n 为任意的.

例 1.2.7 $\{\Gamma(x)/\Gamma(x+n)\}, x \to \infty (x \in S_\Delta), \Delta > \dfrac{-\pi}{2}$.

读者最好自己验证, 并阐明对 Δ 及 λ_n 所加限制的意义. 例如, 说明为什么对任意的 $\mathrm{Im}x$ 当在复平面中令 $x \to \infty$ 时例 1.2.3 中的序列不是渐近序列, 而在 S_Δ 中却是渐近序列; 当在含实轴无限部分的任何域中令 $x \to \infty$ 时, $\{\Gamma(x-n)/\Gamma(x+n)\}$ 不是渐近序列, 而在连边界全部位于上半或下半平面的任一域中令 $x \to \infty$ 时, 它却是渐近序列; 另一方面, 有限序列 $\{\Gamma(x-n)/\Gamma(x+n)\}(n = 1, 2$

$\cdots N$)在任何域中当 $x \to \infty$ 时是渐近序列.

给定一个渐近序列,可以用 § 1.1 中所列对大 O 及小 o 的运算法则得出新的渐近序列.在叙述这种构造时,我们只考虑实变量情形,但它们可以推广到复变量情形.有时我们还略去 x_0 及 D,认为它们是给定的.

命题 1.2.1　渐近序列的任一子列是渐近序列.

证明直接由法则 § 1.1(1.1.8)推出.

命题 1.2.2　如果$\{f_n\}$是渐近序列且 $\alpha > 0$,则$\{|f_n|^\alpha\}$也是渐近序列.

证明用到法则 § 1.1(1.1.1).

给定两个序列$\{f_n\}$及$\{g_n\}$.如果对所有的 n 同时有 $f_n = O(g_n)$及 $g_n = O(f_n)$,就称它们是等价序列.

命题 1.2.3　设$\{f_n\}$及$\{g_n\}$是等价序列且$\{f_n\}$是渐近序列,则$\{g_n\}$也是渐近序列.

在证明时只需注意,由于法则 § 1.1(8),有

$$g_{n+1} = O(f_{n+1}) = O(o(f_n)) = o(f_n) + o(O(f_n)) = o(g_n)$$

命题 1.2.4　设$\{f_n\}$及$\{g_n\}$都是渐近序列,则$\{f_n g_n\}$也是渐近序列.

证明由法则 § 1.1(1.1.9)推出.

命题 1.2.5　设$\{f_n\}$($n = 1,2\cdots N$)为渐近序列且 $\alpha_{n,i}$($n = 1\cdots N; i = 0,1\cdots k; k < N$)为一组正数,使得对所有的 n 及 i 有 $\alpha_{n+1,i} \le \alpha_{n,i}$.如果

$$g_n = \sum_{i=0}^{k} \alpha_{n,i} \, | f_{n+i} | , n = 1,2\cdots N - k \qquad (1.2.1)$$

则$\{f_n\}$也是渐近序列.这里 N 可以是 ∞,而 k 则为有限数.

为了证明命题 1.2.5,只需注意,由于 k 为有限数,对于任意的 N 及 $\varepsilon > 0$,总可找到点 x_0 的邻域 $\cup_\varepsilon$,使得当 $m = n, n + 1\cdots n + k$ 时,在 $\cup_\varepsilon \cap D$ 中有

$$|f_{m+1}\leq\varepsilon|f_m|$$

由此即得表征序列$\{g_n\}$的渐近性的不等式

$$g_{n+1} = \sum_{i=0}^{k}\alpha_{n+1,i}|f_{n+i+1}|\leq \varepsilon\sum_{i=0}^{k}\alpha_{n,i}|f_{n+i}| = \varepsilon g_n \tag{1.2.2}$$

下面的定理把命题 1.2.5 推广到无穷级数情形.

定理 1.2.1 设$\{f_n\}(n=1\cdots N)$为关于 n 一致的渐近序列,$\alpha_{n,i}(n=1,2\cdots;i=0,1\cdots)$为正数序列,对所有的 n 及 i 满足不等式$\alpha_{n+1,i}\leq\alpha_{n,1}$.令

$$g_n = \sum_{i=0}^{\infty}\alpha_{n,i}|f_{n+i}|, n = 1,2\cdots \tag{1.2.3}$$

若定义 g_1 的无穷级数在 x_0 的某个邻域中收敛,则存在 D 的子集 D_0,使 x_0 为 D_0 的极限点,且级数(1.2.3)在 D_0 中收敛,而当 x 在 D 中趋近x_0 时,$\{f_n\}$为关于 n 一致的渐近序列.

证明 因$\{f_n\}$是关于 n 一致的渐近序列,故存在 D 的子集 D_1,使 x_0 为 D_1 的极限点,且

$$|f_{n+1}|\leq|f_n|,\forall x\in D_1,\forall n\in Z^+,$$

这里 $Z^+=\{1,2\cdots\}$为正整数集合.当 $x\in D_1$ 时有

$$\sum_i\alpha_{n+1,i}|f_{n+i+1}|\leq\sum_i\alpha_{n,i}|f_{n+i}|\leq\cdots\leq\sum_i\alpha_{1,i}|f_{i+1}|.$$

故对应于 g_1 的级数是级数(1.2.3)的强级数.根据假定,这个强级数在点 x_0 的某个邻域 D_2 中收敛.现在取 $D_0=D_1\cap D_2$,即知对应于所有 g_n 的级数都在D_0 中收敛,且 x_0 为 D_0 的极限点.既然$\{f_n\}$是关于 n 一致的渐近序列,故估式(1.2.2)当 $k\to\infty$时也关于 n 一致成立.这表明$\{f_n\}$是关于 n 一致的渐近序列.定理证毕.

新渐近序列也可按两种不同方式由积分运算得到.

命题 1.2.6 设$\{f_n(x,y)\}$是关于参变量 $y\in[\alpha,\beta]$当 $x\to x_0$ $(x\in D)$时一致的渐近序列.如果积分

$$F_n(x) = \int_\beta^\alpha [f_n(x,y)]dy \tag{1.2.4}$$

收敛,则$\{F_n(x)\}$也是当 $x \to x_0$ 时的渐近序列.

证明由法则§1.1(1.1.6)推出.类似于定理1.2.1,只需要求$f_n(x,y)$关于 y 为可积函数且f_1 为绝对可积函数.于是由显然的估式

$$\int_\alpha^\beta |f_n| dy \leq A\int_\alpha^\beta |f_1| dy,$$

即知所有函数 f_n 关于 y 都是绝对可积的.

命题 1.2.7 设$\{f_n(x), x \in (a,b)\}$为 $x \to b$ 时的渐近序列且积分

$$F_n(x) = \int_x^b |f_n(s)| ds, n = 1,2\cdots \tag{1.2.5}$$

都收敛,则$\{F_n\}$也是 $x \to b$ 时的渐近序列.

证明由法则§1.1(1.1.5)得出.与上面类似,只需假定所有的f_n 是可积函数且f_1 是绝对可积的.

应该注意,经过微分运算并非都能给出渐近序列.例如,若令

$$f_n(x) = x^{-n}[a + \cos(x^n)], n = 1,2\cdots$$

则在整个实轴上当 $x \to \infty$ 时$\{f_n\}$确为渐近序列,但$\{f'_n(x)\}$却不是渐近序列.读者应自行验证.

此后用$\{f_n\}$,$\{g_n\}$,$\{h_n\}$…表示在 D 中当 $x \to x_0$ 时的渐近序列,用 $\varphi(x)$,$\psi(x)$…表示定义于 D 的数值函数,用 a,b,c…表示常数.

定义 1.2.3 给定函数 $\varphi(x)$及当 $x \to x_0$ 时的渐近序列$\{f_n\}$.如果

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^N a_n f_n(x) + o(f_N), x \to x_0 \tag{1.2.6}$$

就称形式级数 $\sum_{n=1}^N a_n f_n(x)$ 是函数 $\varphi(x)$当 $x \to x_0$ 时的**直到第 N**