随机微分方程
及其在数理金融中的应用

蒲兴成　张　毅　编著

科学出版社
www.sciencep.com

随机微分方程及其在数理金融中的应用

蒲兴成　张　毅　编著

科　学　出　版　社
北　京

内 容 简 介

本书系统介绍了随机微分方程的基础理论，并重点叙述了随机微分方程在数理金融中的具体应用。前9章主要介绍了布朗运动、Ito积分、随机微分方程解的存在性和唯一性、伊藤分布、扩散理论、随机微分方程在边界值问题和最优停时问题中的应用。后9章主要介绍了非均衡市场中套利选择、市场完备性条件、完备市场下期权定价和套期交易策略的选择、Black-Scholes公式及其应用、期权价格的计算、与期权定价密切相关的利率模型、特殊类型的金融模型、Hamilton-Jacobi-Bellman方程与风险投资等金融工程中的一些核心内容。

本书可供高等院校本科生、研究生、教师和相关研究单位的科研人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

随机微分方程及其在数理金融中的应用/蒲兴成，张毅编著. —北京：科学出版社，2010.7

ISBN 978-7-03-028232-3

Ⅰ. 随… Ⅱ. ①蒲… ②张… Ⅲ. 随机微分方程-应用-金融学：数理经济学 Ⅳ. ①F830 ②F224.0

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第128438号

责任编辑：余 江 潘继敏／责任校对：张 林
责任印制：张克忠／封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京市文林印务有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010年7月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2010年7月第一次印刷 印张：12
印数：1—2 000 字数：236 000

定价：35.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

随机微分方程作为一门新兴的数学学科，其理论基础的建立是在 20 世纪 60 年代。该学科在很多领域有广泛的应用前景。随着随机分析理论的迅速发展，随机微分方程理论被广泛应用于系统科学、工程科学和生态科学等各个方面。

将随机微分方程应用于金融领域是最近三十年的一个热门话题。例如，用随机微分方程来解决期权定价问题是随机微分方程在金融中的一个成功应用。1973 年 Fischer Black 和 Myron Scholes 利用无风险投资理论和随机微分方程理论，得到了著名的 Black-Scholes 随机偏微分方程，并利用相应的边界条件和概率方法得到了欧式看涨 (跌) 期权价格的计算公式，从而奠定了金融工程的核心基础，开拓了金融工程从定性分析进入定量分析的时代。

本书的目的是系统介绍随机微分方程的基础理论及其在数理金融中的应用。要达到此目的，必须解决两个问题：一个是随机微分方程的基本理论；另一个是随机微分方程在数理金融中的具体应用。本书的前 9 章主要介绍随机微分方程的一些基础理论，后 9 章主要介绍随机微分方程在数理金融中的具体应用。

本书比较注重基本理论、原理、基本方法和实例等方面的介绍，以求达到抛砖引玉的作用。但本书作为随机微分方程应用的概括还不尽全面，如滤波、随机控制、随机系统的性能分析和随机脉冲随机微分方程等方面涉及很少，有兴趣的读者可以自行查找相关文献了解；或者根据读者意见，再版时再进行适当补充和修改。

本书是在很多人的关心和帮助下完成的。在编写过程中，吴慧莲老师、杨春德教授和郑继明老师给予了诸多帮助，并提出了很多的建议，科学出版社的相关老师也为本书的出版付出了辛勤的劳动，还有研究生张军、孙凯和曾凡海也对本书格式作了一些修订，在此一并表示感谢。

本书的出版得到了重庆邮电大学出版基金资助、科技部国际合作项目 (编号：2010DFA12160) 和重庆邮电大学信息与计算专业提升计划项目的资助。

由于作者水平有限，书中疏漏之处在所难免，敬请读者批评指正。

作　者

目　　录

第 1 章　绪　　论

本章主要介绍随机微分方程的起源、发展、经典应用的一些实例、随机微分方程与数理金融的关系，并对本书的主要内容及编排顺序做了简单概括。

1.1　随机微分方程的起源和应用

随机微分方程的诞生有其一定的应用背景。随机微积分和随机微积分方程起源于马氏过程的构造和 Kolmogorov 的分析方法与 Feller 的半群方法。在随机微分方程形成的早期阶段，Enstein，Smoluchowski，Langvein，Vhlenbeck，Kramers，Chandrasekher 等人在布朗运动和分子扩散的数学理论方面做了许多卓有成效的工作。1961 年，Ito 首先发表 "论随机微分方程" 一文，从此随机微分方程更确定了它的理论基础。进入七八十年代，随机微分方程，扩散过程及随机分析有了迅速发展，并广泛应用于系统科学、工程科学、生态科学等各个方面。在这些领域，先后出现了 Gihman-Skorohod，Stoock-Varad，Ikedawatanake 等著名概率论学者的专著。

1.2　随机微分方程的经典应用举例

下面先介绍几个随机微分方程的经典应用实例。

1. **古典微分方程的随机分析**

例 1.1　考虑简单的人口增长模型

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = a(t)N(t), \quad N(0) = N_0(\text{常数}) \tag{1.2.1}$$

$N(t)$ 是在 t 时刻的人口数量，$a(t)$ 是在 t 时刻的人口增长率。由于受各种因素的影响，比如战争、疾病、自然灾害等而产生不确定性, 因此可将 $a(t)$ 写成如下形式:

$$a(t) = r(t) + w_t$$

此处，$r(t)$ 是已知的，w_t 是一个已知分布的随机量。怎样对 $N(t)$ 进行定性和定量分析是一个非常有必要解决的实际问题。

例 1.2　电路系统某个时刻的电量 $Q(t)$ 满足如下的微分方程:

$$L \cdot Q''(t) + R \cdot Q'(t) + \frac{1}{C} \cdot Q(t) = F(t), \quad Q(0) = Q_0, \quad Q'(0) = I_0 \tag{1.2.2}$$

此处，L 是电感，R 为电阻，C 是电容，$F(t)$ 是在 t 时刻的电压。同样由于受各种因素的影响，$F(t)$ 并不是确定的，即会出现一定的随机变化，因此可将 $F(t)$ 写成如下形式:

$$F(t) = G(t) + w_t$$

此处，$G(t)$ 是已知的，w_t 是一个已知分布的随机量。怎样对 $Q(t)$ 进行定性和定量分析也是一个非常需要解决的问题。

上述两个例子中都考虑了随机因素，在微分方程中引进随机成分后，通常把这类方程称为随机微分方程，至于随机微分的具体形式及其解的性质，在今后章节中将详细讨论。

2. *滤波问题*

例 1.3　就例 1.2 中所提问题来说，为了提高我们对其解的认识，通常要对电路中的电量进行实际测量，如用 $Z(s)$ 表示在时刻 s 对 $Q(s)(s \leqslant t)$ 的测量值。然而，由于测量方法和测量工具的影响，通常 $Z(s)$ 的值与 $Q(s)$ 会产生一定的偏差，即 $Z(s)$ 可写成如下形式:

$$Z(s) = Q(s) + w_t \tag{1.2.3}$$

在此情况下，除了前面提到的干扰外，还有一种测量误差。

滤波问题是，基于观测 $Q(s)$ 如何获得 $Q(t)$ 的最佳估计。

3. *确定性边界问题的随机求解*

例 1.4　最著名的就是狄利克雷问题的随机求解: 在 R^n 中给定一个适当的定义域 U，同时在 U 的边界 ∂U 上定义一个连续函数 f。在 U 的闭包 $\overline{U}$ 上寻找一个连续函数 $\overline{f}$ 满足

(1) 在 ∂U 上 $\overline{f} = f$;

(2) 在 U 上 $\overline{f}$ 是调和的，即

$$\Delta \overline{f} := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \overline{f}}{\partial x_i^2} = 0 \tag{1.2.4}$$

在 1944 年，Kakutani 证明了上述问题的解可以表示成一个布朗运动: $\overline{f}(x)$ 恰好是 f 满足初始值的布朗运动的期望值。除此之外，现有的研究表明，大量与狄利克雷边界值相关问题即半椭圆二阶偏微分方程的解都可以用一个与之相关的随机微分方程的解来表示。

4. *最优停时问题*

例 1.5　假设一个人有一份财产需要出售。与例 1.1 一样，该财产的价格 X_t 在时刻 t 服从如下的随机微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}X_t}{\mathrm{d}t} = rX_t + \alpha X_t \cdot w_t$$

此处，r, α 是已知常数。那么此人何时出售该资产能获得最大价格?

当然，假设这个人是知道到时刻 t 的有关 X_s 的信息，但由于各种不确定因素的影响，该人始终很难确定在何时以何价格出售最好。这就是一个最优停时问题。

5. **最优风险投资问题**

例 1.6 假设一个人有两种投资方法可以选择:

(1) 风险投资 (如股票)，用 $p_1(t)$ 表示单位资产在时刻 t 的价格，该价格服从类似例 1.1 的随机微分方程，即

$$\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t} = (a + \alpha \cdot w_t)p_1 \tag{1.2.5}$$

其中，$a > 0, \alpha \in R$ 是已知常数。

(2) 无风险投资 (如债券)，用 p_2 表示相关价格，其服从如下常微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t} = bp_2 \tag{1.2.6}$$

其中，b 是一个常数，且 $0 < b < a$。

假设此人在时刻 t 可供投资的钱的总量为 X_t，规定该人在任何时刻有权决定用多少钱 $uX_t(0 \leqslant u \leqslant 1)$ 去进行风险投资，剩下的 $(1-u)X_t(0 \leqslant u \leqslant 1)$ 用于无风险投资。现给定一个效用函数 U 和一个中止时刻 T，则问题就是寻找一个最佳的投资组合 $u_t \in [0,1]$，$0 \leqslant t \leqslant T$，使得在终止时刻投资收益最大

$$\max_{0 \leqslant u_t \leqslant 1} \{E[U(X_T^{(u)})]\} \tag{1.2.7}$$

6. **期权定价问题**

例 1.7(期权定价) 在例 1.6 中，假设某人在时刻 $t = 0$ 赋予权利在将来某个时刻 $t = T$ 以给定单位价格 K 去购买 (出售) 某种风险资产，这种权利叫做欧式看涨 (看跌) 期权。那么这人能够承受的价格是多少? 这就是所谓的欧式期权定价问题。

将随机微分方程应用于金融领域是最近几年的一个热门话题。用随机微分方程来解决期权定价问题是随机微分方程在金融中的一个成功应用。假设在例 1.6 中某人被赋予在将来某一确定的时间以某一确定的价格 K 购买一单位风险资产的权利，这种权利称为欧式看涨期权，那么此人将会以多大的价格购买这种期权? 1973 年 Fischer Black 和 Myron Scholes 利用无风险投资理论和随机微分方程讨论了这一问题，得到了著名的 Black- Scholes 随机偏微分方程，并利用相应的边界条件和随机分析方法得到了欧式看涨 (跌) 期权价格的计算公式，这为现代金融理论奠定了基础。

1.3　随机微分方程与数理金融的关系

金融工程的核心基础是 Black-Scholes 公式。最近几年，利用数学的随机概念来进行金融的定性和定量分析研究越来越普遍，特别是定量分析显得越来越重要，如利用鞅和随机积分来描述市场和计算期权价格。随机微分方程之所以能应用于金融领域，是由这门课程本身所具有的特性所决定的。期权价格的马尔可夫性质与弱型市场有效性相一致，即一种期权的价格已经包含了所有信息，当然包含了所有过去的价格记录。这样，利用随机微分方程理论来解决期权定价问题是理所当然的了。事实上，随机理论在金融领域的应用并不是近几年的事。在 20 世纪初，Bachelier(1900) 建立了 "Theory of Speculation"，当时 Bachelier 就试图利用该理论计算期权价格，在他的假设条件下也得到了相关的期权定价公式，后来发现是布朗运动。

1973 年，Black 和 Scholes 利用随机理论和无风险投资理论得到了著名的 Black-Scholes 偏微分方程和欧式期权定价公式。至此，金融理论的基础已经建立，并有严格的数学基础。在此之后，随着期货市场的发展，Black，Scholes 以及 Merton 得出的结果变得越来越清晰、普遍和严格，并在大学里有了相关方面的课程，这也使得期权定价理论成为金融工程的核心理论。近几年，用随机微分方程理论来定量研究金融市场越来越引起人们的关注，在此条件下，随机金融理论获得了巨大的发展，产生了巨大的经济指导效果。

从例 1.1～ 例 1.6 可以看出，随机微分方程具有广泛的应用前景。本书的目的是系统介绍随机微分方程的基础理论及其在数理金融中的应用。要到达此目的，必须解决两个问题：一个是随机微分方程的基本理论；另一个是随机微分方程在金融工程中的具体应用。

1.4　本书的主要内容

本书的主要内容如下：

第 1 章是绪论，主要介绍随机微分方程的起源、发展和应用背景。

第 2 章主要介绍学习随机微分方程的预备知识，即随机变量、随机变量的独立性、布朗运动及其性质。

第 3 章主要介绍 Ito 积分的定义及相关性质。

第 4 章主要介绍伊藤公式与鞅表示定理。

第 5 章讨论随机微分方程解的存在性和唯一性。

第 6 章介绍伊藤分布的基本性质，即马尔可夫性、强马尔可夫性、伊藤分布算子、Dynkin 公式和特征算子等。

第 7 章为扩散理论，主要介绍了 Kolmogorov 倒向方程、Feynman-Kac 公式、鞅问题、伊藤过程函数的扩散条件、随机时间变化和 Girsanov 定理等。

第 8 章主要介绍随机微分方程在边界值问题中的应用。

第 9 章主要介绍随机微分方程在最优停时问题中的应用。

第 10~ 17 章主要介绍随机微分方程在数理金融中的应用。

第 18 章主要介绍 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程与风险投资。

第2章 预备知识

在第 1 章阐述了随机微分方程在一些实际问题中的应用，本章先来介绍一些有关随机微分方程的概率论基础知识，重点介绍布朗运动的数学描述及其性质。

2.1 概率空间、随机变量和随机过程

本节主要介绍随机变量、随机变量的独立性和离散或连续型随机变量。第 3 章将讨论第 1 章例 1.1～ 例 1.7 中 w_t 的数学描述，并介绍随机微分方程的定义。

定义 2.1 假设 Ω 是一个已知集合，由 Ω 的子集构成的集合 F 称为一个 σ-代数，如果它具备以下几个性质：

(1) $\phi \in F$;

(2) $A \in F \Rightarrow A^C \in F, A^C$ 是 Ω 中 F 的余集;

(3) $A_1, A_2, \cdots \in F \Rightarrow B := \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in F$。

(Ω, F) 称为可测空间，该空间上的概率测度 P 是一个函数 $P; F \to [0,1]$ 满足：

(1) $P(\phi) = 0, P(\Omega) = 1$;

(2) 若 $A_1, A_2, \cdots \in F$ 且 $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是不相容的 (i.e. $A_i \bigcap A_j = \phi, i \neq j$)，则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

此时，(Ω, F, P) 称为一个概率空间，若该空间还满足

$$P^*(G) = \inf\{P(A); A \in F, G \subset A\} = 0$$

则称该空间为完备的概率空间。

任何概率空间通过在 F 中添加外测度是 0 的所有集合，同时将 P 进行相应的扩充之后就变成一个完备的概率空间。

Ω 中属于 F 的子集，A 称为 F- 可测集。从概率的意义来讲，这些集合称为事件，并规定

$$P(A) = \{\text{事件}\,A\,\text{发生的概率}\}$$

特别地，若 $P(A) = 1$, 则称 A 为一个必然事件；若 $P(A) = 0$, 则称 A 为一个不可能事件。

给定 Ω 的任何一族子集 U，存在一个最小的 σ- 代数 H_U 包含 U，即

$$H_U = \bigcap\{H; H\text{是}\Omega\text{的}\sigma\text{- 代数，且}U \subset H\}$$

称 H_U 为 U 产生的 σ- 代数。

例如，若 U 是拓扑空间 Ω 所有开子集构成的集合 (如 $\Omega = R^n$)，则 $\beta = H_U$ 称为 Ω 上的布雷尔 σ- 代数，元素 $B \in \beta$ 称为布雷尔集。β 包含所有开集、闭集、闭集的可数并和这种可数并后的可数交等。

若 (Ω, F, P) 是一个给定的概率空间，函数 $Y : \Omega \to R^n$ 称为 F- 可测的若对所有开集 $U \in R^n$ 有：$Y^{-1}(U) := \{\omega \in \Omega; Y(\omega) \in U\} \in F$。

若 $X : \Omega \to R^n$ 是任意函数，则由 X 产生的 σ- 代数 H_X 是在 Ω 上包含所有集合 $X^{-1}(U)(U \subset R^n$ 是开集) 的最小 σ- 代数。

由此易知，$H_X = \{X^{-1}(B); B \in \beta\}$，$\beta$ 是 R^n 上布雷尔 σ- 代数。显然，X 是 H_X 可测的，且 H_X 是具有该性质的最小的 σ- 代数。关于 H_X 的性质探讨，在 1984 年，Doob-Dynkin 得到如下结论：

定理 2.1 若给定两个函数 $X, Y : \Omega \to R^n$，则 Y 是 H_X-可测的当且仅当存在一个布雷尔可测函数 $g : R^n \to R^n$ 满足: $Y = g(X)$。

在后面的讨论中，以 (Ω, F, P) 表示一个已知的完备概率空间。一个随机变量就是一个 F- 可测函数 $X : \Omega \to R^n$。任何一个随机变量对应着 R^n 上的一个概率测度 u_X，u_X 定义为

$$u_X(B) = P(X^{-1}(B))$$

u_X 称为 X 的分布。

若 $\int_\Omega |X(\omega)|\mathrm{d}P(\omega) < \infty$，则 $E[X] := \int_\Omega X(\omega)\mathrm{d}P(\omega) = \int_{R^n} x\mathrm{d}u_X(x)$ 称为 X 的期望。更一般地，若 $f : R^n \to R$ 是布雷尔可测的，且 $\int_\Omega f(|X(\omega))|\mathrm{d}P(\omega) < \infty$，则有

$$E[f(X)] := \int_\Omega f(X(\omega))\mathrm{d}P(\omega) = \int_{R^n} f(x)\mathrm{d}u_X(x)$$

下面描述随机变量独立性的数学定义。

定义 2.2 两个子集 $A, B \in F$ 称为独立的若 $P(A\bigcap B) = P(A) \cdot P(B)$。一个由一族可测集合 H_i 构成的集合 $A = \{H_i; i \in I\}$ 是独立的当且仅当对所有 $i_1, i_2, \cdots, i_k$，即 $h_{i_1} \in H_{i_1}, h_{i_2} \in H_{i_2}, \cdots, h_{i_k} \in H_{i_k}$ 满足 $P(h_{i_1} \bigcap \cdots \bigcap h_{i_k}) = P(h_{i_1}) \bigcap \cdots \bigcap P(h_{i_k})$。一族随机变量 $\{X_i; i \in I\}$ 是独立的当且仅当由其产生的 σ- 代数 H_{X_i} 是相互独立的。

如果两个随机变量 $X, Y : \Omega \to R$ 是独立的，且 $E[|X|] < \infty, E[|Y|] < \infty$，$E[|XY|] < \infty$，则

$$E[XY]=E[X]E[Y]$$

定义 2.3　一个随机过程是定义在 (Ω,F,P) 上且取值于 R^n 的随机变量族 $\{X_t\}_{t\in T}$。

参数 T 的取值范围一般为 $[0,\infty)$，但也可以为区间 $[a,b](a,b>0)$，甚至为 $R^n(n\geqslant 1)$ 的子集。注意到对每一个固定的 $t\in T$ 有一个随机变量 $\omega\to X_t(\omega);\omega\in\Omega$。另外，固定 $\omega\in\Omega$，就得到一个关于 t 的函数 $t\to X(t,\omega)$。

通常，将 t 看作是时间，ω 看作是颗粒或试验结果，则 $X_t(\omega)$ 认为是在 t 时刻 ω 的位置或试验结果。为方便起见，经常将 $X_t(\omega)$ 写成 $X(t,\omega)$。因此，随机过程也可以看作是关于 t,ω 的二元函数:$(t,\omega)\to X(t,\omega)$，该函数的定义域为 $T\times\Omega$, 值域为 R^n。有限维随机过程的分布定义为 $u_{t_1,\cdots,t_k}(F_1\times F_2\times\cdots\times F_k)=P[X_{t_1}\in F_1,X_{t_2}\in F_2,\cdots,X_{t_k}\in F_k];t_i\in T$。该分布确定了随机过程 X 的很多性质。相反，在 R^{nk} 上给定一族概率测度 $\{v_{t_1,\cdots,t_k};k\in N,t_i\in T\}$，如何构造一个随机过程 $Y=\{Y_t\}_{t\in T}$ 使其有限维分布恰好为这一族概率测度是非常重要的。关于这一问题，Kolmogorov 在 1977 年给出了如下一个非常重要的结论。

定理 2.2 (Kolmogorov 延拓定理)　对所有 $t_1,t_2,\cdots,t_k\in T,k\in N$，$v_{t_1,\cdots,t_k}$ 是 R^{nk} 上的概率测度，满足

$$v_{t_{\sigma(1)},\cdots,t_{\sigma(k)}}(F_1\times\cdots\times F_k)=v_{t_1,\cdots,t_k}(F_{\sigma^{-1}(1)}\times\cdots\times F_{\sigma^{-1}(k)})\tag{a}$$

且对所有 $m\in N$ 有

$$v_{t_1,\cdots,t_k}(F_1\times\cdots\times F_k)=v_{t_1,\cdots,t_k,t_{k+1},\cdots,t_{k+m}}(F_1\times\cdots\times F_k\times R^n\times\cdots\times R^n)\tag{b}$$

则存在一个概率空间 (Ω,F,P) 和 Ω 上的一个随机过程 $X_t:\Omega\to R^n$ 使得对所有 $t_i\in T,k\in N$ 和所有布雷尔集 F_i 有

$$u_{t_1,\cdots,t_k}(F_1\times F_2\times\cdots\times F_k)=P[X_{t_1}\in F_1,X_{t_2}\in F_2,\cdots,X_{t_k}\in F_k],\quad t_i\in T$$

2.2 布朗运动

1828 年，英国的生物学家布朗观察到了花粉颗粒在液体中的一种无规则运动。这种运动实际上是由于花粉颗粒受到液体分子无规则的碰撞产生的。为了从数学上描述这种运动过程，人们很自然地就考虑到随机过程 $B_t(\omega)$。为构造相应的随机过程 $\{B_t(\omega)\}_{t\geqslant 0}$，根据 Kolmogorov 延拓定理，需要引进一族概率测度 $\{v_{t_1,\cdots,t_k}\}$ 满足定理 2.2 的条件 (a) 和 (b)。这族测度的确定必须满足观测到的花粉颗粒的运动行为，即固定 $x\in R^n$，定义:

$$p(t,x,y)=(2\pi t)^{-\frac{n}{2}}\cdot\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{2t}\right),\quad y\in R^n,\quad t>0$$

假设 $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \cdots \leqslant t_k$，在 R^{nk} 上定义一个测度:

$$\begin{aligned} & v_{t_1,\cdots,t_k}(F_1 \times \cdots \times F_k) \\ = & \int_{F_1 \times \cdots \times F_k} p(t_1, x, x_1) p(t_2 - t_1, x_1, x_2) \cdots p(t_k - t_{k-1}, x_{k-1}, x_k) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_k \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

此处，在勒贝格测度意义下 $\mathrm{d}y = \mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}y_k$，且假设初始位置为 x，$p(0, x, y)\mathrm{d}y = \delta_x(y)$。利用定理 2.2 的条件 (a) 可将该定义延拓到 t_i 的所有有限维情况，因为对所有 $t \geqslant 0$，$\int_{R^n} p(t, x, y)\mathrm{d}y = 1$，即定理 2.2 的条件 (b) 成立，由 Kolmogorov 定理，存在一个概率空间 (Ω, F, P^x) 和一个在 Ω 上的有限维随机过程 $\{B_t\}_{t \geqslant 0}$，其分布为

$$\begin{aligned} & P^x(B_{t_1} \in F_1, \cdots, B_{t_k} \in F_k) \\ = & \int_{F_1 \times \cdots \times F_k} p(t_1, x, x_1) \cdots p(t_k - t_{k-1}, x_{k-1}, x_k) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_k \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

定义 2.4 满足条件式 (2.2.1) 的一个随机过程称为起始于 $x(P^x(B_0 = x) = 1)$ 的布朗运动。

布朗运动的这种定义并不是唯一的，四元关系 (B_t, Ω, F, P^x) 也可能使得式 (2.2.2) 成立。但从应用的角度出发，必须将上面的定义加以简化。从布朗运动的本质出发，其运动轨迹具有连续性。因此，对每一个确定的 $a \in \Omega$ 必有一个从 $[0, \infty)$ 到 R^n 的连续函数 $t \to B_t(\omega)$。从这个观点来说，布朗运动是具有概率测度 P^x 的一个连续函数空间 $C([0, \infty), R^n)$，这就是所谓的标准布朗运动。这种定义除了直观上的好理解外，还可以进一步在 $C([0, \infty), R^n)$ 上进行测度分析。

布朗运动的一些基本性质:

(1) B_t 是一个高斯过程，即对所有 $0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_k$，随机变量 $Z = (B_{t_1}, \cdots, B_{t_k})$ 是一个标准的正态分布。这就是说，存在一个矢量 $M \in R^{nk}$ 和一个非负定矩阵 $C = [c_{jm}] \in R^{nk \times nk}$，对所有 $u = (u_1, \cdots, u_{nk}) \in R^{nk}$ 满足

$$E^x \left[\exp\left(i \sum_{j=1}^{nk} u_j Z_j \right) \right] = \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{j,m} u_j c_{jm} u_m + i \sum_j u_j M_j \right) \tag{2.2.3}$$

此外，如果式 (2.2.3) 成立，则

$$M = E^x[Z] \tag{2.2.4}$$

且

$$c_{jm} = E^x[(Z_j - M_j)(Z_m - M_m)] \tag{2.2.5}$$

若式 (2.2.3) 满足随机变量 $Z=(B_{t_1},\cdots,B_{t_k})$，利用式 (2.2.2) 就可以计算式 (2.2.3) 的左边，假设式 (2.2.3) 满足

$$M=E^x[Z]=(x,x,\cdots,x)\in R^{nk} \tag{2.2.6}$$

且

$$C=\begin{bmatrix} t_1I_n & t_1I_n & \cdots & t_1I_n \\ t_1I_n & t_2I_n & \cdots & t_2I_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1I_n & t_2I_n & \cdots & t_kI_n \end{bmatrix} \tag{2.2.7}$$

则对所有 $t\geqslant 0$ 有

$$E^x[B_t]=x \tag{2.2.8}$$

且

$$E^x[(B_t-x)^2]=nt,\quad E^x[(B_t-x)(B_s-x)]=n\min(s,t) \tag{2.2.9}$$

此外，因为

$$\begin{aligned} E^x[(B_t-B_s)^2]=&E^x[(B_t-x)^2-2(B_t-x)(B_s-x)+(B_s-x)^2] \\ =&2n(t-2s+s)=n(t-s) \end{aligned}$$

故

$$E^x[(B_t-B_s)^2]=n(t-s),\quad t\geqslant s \tag{2.2.10}$$

(2) B_t 有独立增量，即

$$\text{对所有}\, 0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_k,\ B_{t_1},B_{t_2-t_1},\cdots,B_{t_k}\text{是独立的} \tag{2.2.11}$$

据标准正态随机变量独立与不相关是等价的，易知

$$E^x[(B_{t_i}-B_{t_{i-1}})(B_{t_j}-B_{t_j-1})]=0,\quad t_i<t_j \tag{2.2.12}$$

(3) $t\to B_t(\omega)$ 的连续性。实际上，从表面上来讲，讨论 $t\to B_t(\omega)$ 的连续性是没有任何实际意义的，这是因为集合 $H=\{\omega;t\to B_t(\omega)\}$ 在 $(R^n)^{[0,\infty)}$ 上关于布雷尔 σ- 代数 β 是不可测的 (H 包含了一个不可数集 T)，为了解决这一问题，需要给出如下定义：

定义 2.5　假设 $\{X_t\}$ 和 $\{Y_t\}$ 是 (Ω,F,P) 上的两个随机过程, 若对所有 t 有

$$P(\{\omega;X_t(\omega)=Y_t(\omega)\}=1$$