张嘉瑾 精彩数学系列
ZHANGJIAJINJINGCAISHUXUEXILIE

不等式

BUDENGSHIQIANTIQIAOJIEBUDENGSHIQIANTIQIAOJIE

千题巧解

- 奇思妙解
- 专题突破
- 让数学变得如此生动

■张嘉瑾 编著

高中数学必备

長春出版社

张嘉瑾 精彩数学系列

ZHANGJIAJINJINGCAISHUXUEXILIE

张嘉瑾，中学数学特级教师。多年来致力于初等数学教材教法的研究，颇有心得。在省级以上杂志上先后发表论文、诗歌、散文二百多篇。出版数学专著 12 册，近四百万字，其中《高中数学三部曲》、《高中数学大世界》、《高考试题研究》、《考前精彩 99》、《考前抢分 1+1》等著作深受全国广大师生的欢迎。论文和著作结构独特，内涵深刻，尤其是散文诗一样的语言在众多数学专著中独树一帜。《张嘉瑾精彩数学》系列丛书是他五易其稿，逐字推敲，花费了三年的精力，不断修改和润色的最新力作。让你充分领略数学的精彩！

ISBN 7-80664-285-4

9 787806 642856 >

责任编辑 杨爱萍

封面设计 郝 威

ISBN 7-80664-285-4 定价：11.00 元

张嘉瑾 精彩数学系列

ZHANGJIAJINJINGCAISHUXUEXILIE

不等式

BUDENGSHIQIANTIQIAOJIEBUDENGSHIQIANTIQIAOJIE

千题巧解

長春出版社

图书在版编目（CIP）数据

不等式千题巧解/张嘉瑾编著．—长春：长春出版社，2006．6

ISBN 7－80664－285－4

Ⅰ．不...　Ⅱ．张...　Ⅲ．不等式—解题　Ⅳ．0182．1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 031567 号

责任编辑：杨爱萍

封面设计：郝　威

版式设计：王久慧

出版发行：长春出版社　　总编室电话：0431－8563443

发行部电话：0431－8561180　　读者服务部电话：0431－8561177

地　　址：吉林省长春市建设街 1377 号

邮　　编：130061

网　　址：www. cccbs. net

制　　版：吉林省久慧文化有限公司

印　　刷：吉林省吉育印业有限公司

经　　销：新华书店

开　　本：880×1230 毫米　32 开本

字　　数：225 千字

印　　张：8. 25 印张

版　　次：2006 年 6 月第 1 版

印　　次：2007 年 1 月第 3 次印刷

印　　数：15 001—18 500 册

定　　价：11. 00 元

前言

数学枯燥乏味吗？我不这样想。

我觉得数学生动、精彩。我在解数学题的时候常常被那种简洁的解法感动，陶醉在优美的逻辑推理中。

一个看起来并不复杂的问题，甚至，一个简单的选择题，因为思维的角度不同，往往会出现各种不同的解题方法；一个看上去陌生的问题，深思熟虑之后，把它化归到熟悉的题型中去，于是豁然开朗，于是内心充满了甜蜜。

是的，数学有它独特的魅力，这种魅力决不是轻而易举就能觉察与体验到的，而真正要享受这魅力带给我们的愉悦，必须付出艰辛和血汗。

我真诚地希望高中学生能从心底里喜爱数学，从而激发智慧和创造力，这也便是我倾其全力写作的本意。

《张嘉瑾精彩数学》系列丛书能让你爱不释手吗？希望这巧妙的解法能让你在顿悟中不断进取，能让你的一生更加的精彩！

张嘉瑾

目 录

CONTENS 不等式千题巧解

第一章　不等式的性质与证明

① 不等式的性质

我们知道，不等式的证明和解法，它们的理论根据统统建立在以下五个定理和三个推理的基础上．因此，对它们的透彻的理解和深刻的认识是学习和提高的必备条件．

定理 1　若 $a>b$，则 $b<a$；若 $b<a$，则 $a>b$. 反对称性.

定理 2　若 $a>b$，且 $b>c$，则 $a>c$. 传递性.

定理 3　若 $a>b$，则 $a+c>b+c$. 可加性.

推论　若 $a>b$，且 $c>d$，则 $a+c>b+d$.

定理 4　若 $a>b$，且 $c>0$，则 $ac>bc$；若 $a>b$，且 $c<0$，则 $ac<bc$.

推论(1)　若 $a>b>0$，且 $c>d>0$，则 $ac>bd$.

推论(2)　若 $a>b>0$，则 $a^n>b^n$（$n\in\mathbf{N}$，且 $n>1$）.

定理 5　若 $a>b>0$，则 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$（$n\in\mathbf{N}$，且 $n>1$）.

只有夯实了墙基，大厦方能拔地而起，至于墙基上面将要绘制和建造怎样五彩缤纷的艺术品，那是后面的事了．

那么，怎样方能更好地来理解这些定理和推论，如何才能把它们用得活，用得巧，用得得心应手？

好题导航

$a>b>0$ 或 $a<b<0$

1.1 若$|a|>|b|>0$,且$ab>0$,则下列不等式能成立的是(C)

(A) $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　　(B) $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$

(C) $\log_{\frac{1}{2}}|a|<\log_{\frac{1}{2}}|b|$　　(D) $\left(\frac{1}{2}\right)^{a}>\left(\frac{1}{2}\right)^{b}$

分析 四个选项中哪一个"能成立"呢?既然能成立，即对任何满足条件$|a|>|b|>0$且$ab>0$的实数a、b都成立.

[解法一] 机敏的读者一眼就看出(C)是成立的.

$\because |a|>|b|>0$，又$y=\log_{\frac{1}{2}}x$单调递减，

$\therefore \log_{\frac{1}{2}}|a|<\log_{\frac{1}{2}}|b|$.

注 能直接看出结果，说明你具备了较强的观察力. 这里，$ab>0$的条件未被应用.

[解法二] 由$ab>0$知a、b同号，分两种情况：

其一，$a>b>0$，此时$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，(A)不能成立；而$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$是减函数，当$a>b>0$时，$\left(\frac{1}{2}\right)^{a}<\left(\frac{1}{2}\right)^{b}$，可见(D)也不能成立；

其二，$a<b<0$，有$a<a-b<0$，此时$\frac{1}{a-b}<\frac{1}{a}$，(B)不能成立，只有(C)是成立的.

注 应用不等式的性质定理排除不成立的选择支，锻炼了逻辑推理能力. 如果取特殊值，似乎更方便.

[解法三] 取$a=2$，$b=1$，排除(A)与(D). 取$a=-2$，$b=-1$，排除(B)，因此(C)成立.

1.2 若$a<0$，$-1<b<0$，则　　(　　)

(A) $a>ab>ab^2$　　(B) $ab^2>ab>a$

(C) $ab>b>ab^2$　　(D) $ab>ab^2>a$

分析 读者完全可以观察出结果来，问题的本质是比较b、b^2、1三者的大小关系(为什么这样说)，在$-1<b<0$的条件下，$b<b^2<1$，

因此(D)成立.

取特殊值，排除不成立的选择支也能快速地选出正确结果来$\left(\right.$比如取$a=-1$，$b=-\frac{1}{2}\left.\right)$.

1.3 实数a、b、c、d满足下列三个条件：①$d>c$；②$a+b=c+d$；③$a+d<b+c$. 把a、b、c、d按从大到小的次序排列起来.

分析 从条件②、③出发我们会得到怎样的结果呢？

$$\begin{cases}a+d<b+c\\a+b=c+d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d-b<c-a\\c-a=b-d\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}d-b<b-d\\a-c<c-a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d<b,\\a<c,\end{cases}$$

再结合①知$b>d>c>a$.

看起来蛮简单的，主要是我们制订了一个比较合理的程序，在这个程序的设计中，不等式的一些最基本的性质用活了. 在对以上变形的每一个细小环节的观察和思考里，读者不难发现，即使是一次移项，一个符号的调整，都充分体现了解题的目的性和对下一步有效的预测.

1.4 已知实数x、y、z满足①$x+y+z=0$，②$xyz>0$，设$T=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$，则 ( )

(A) $T>0$ (B) $T<0$

(C) $T=0$ (D) T的符号不确定

分析 由于选项(D)的干扰，因此特殊值排除法发生了困难. 比如：取$x=y=-1$，$z=2$，则$T=-\frac{3}{2}<0$，能放心大胆地选(B)吗？

[解法一] $\because x+y+z=0$，$xyz>0$，

$\therefore x$、y、z中必为两负一正，不妨设$x<0$，$y<0$，$z>0$，

则$z=-(x+y)$，因此

$T=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)-\frac{1}{x+y}=\frac{x^2+xy+y^2}{xy(x+y)}$，$xy>0$，$x+y<0$，

又$x^2+xy+y^2>0$，

于是可知$T<0$，选(B).

[解法二] $\because (x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=0$,

$\therefore x^2+y^2+z^2=-2(xy+yz+zx)>0$，即

$xy+yz+zx<0$. 而

$T=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{xy+yz+zx}{xyz}$，因此 $T<0$.

1.5 已知函数 $f(x)=ax^2-c$ 满足 $-4\leqslant f(1)\leqslant 1$，$-1\leqslant f(2)\leqslant 5$，那么 $f(3)$ 的范围是 ( )

(A) $-7\leqslant f(3)\leqslant 26$ (B) $-4\leqslant f(3)\leqslant 15$

(C) $-1\leqslant f(3)\leqslant 20$ (D) $-13\leqslant f(3)\leqslant 28\frac{2}{3}$

[错解] 依题意有：

$$\begin{cases}-4\leqslant f(1)\leqslant 1\\ -1\leqslant f(2)\leqslant 5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-4\leqslant a-c\leqslant 1 & ①\\ -1\leqslant 4a-c\leqslant 5 & ②\end{cases}$$

由①：$-1\leqslant c-a\leqslant 4$ ③

②+③：$-\frac{2}{3}\leqslant a\leqslant 3$ ④

由①：$-4\leqslant 4c-4a\leqslant 16$ ⑤

⑤+②：$-\frac{5}{3}\leqslant c\leqslant 7$ ⑥

而 $f(3)=9a-c$，故由④、⑥两式可得 $-13\leqslant f(3)\leqslant 28\frac{2}{3}$.

<u>出错原因</u> 在①、②解得④、⑥的过程中，区域不同了(扩大了)，不等式成立的条件不同了，因此 $f(3)$ 的范围也扩大了.

[解法一] 由 $\begin{cases}a-c=f(1)\\ 4a-c=f(2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{3}[f(2)-f(1)],\\ c=-\frac{4}{3}f(1)+\frac{1}{3}f(2).\end{cases}$

而 $f(3)=9a-c=\frac{8}{3}f(2)-\frac{5}{3}f(1)$,

$\because -1\leqslant f(2)\leqslant 5$，则 $-\frac{8}{3}\leqslant\frac{8}{3}f(2)\leqslant\frac{40}{3}$;

又 $-4\leqslant f(1)\leqslant -1$，则 $\frac{5}{3}\leqslant -\frac{5}{3}f(1)\leqslant\frac{20}{3}$,

$\therefore -1\leqslant f(3)\leqslant 20$，选(C).

[解法二]　由题意，$\begin{cases}-4\leqslant a-c\leqslant -1 & ①\\ -1\leqslant 4a-c\leqslant 5 & ②\end{cases}$

令 $m(a-c)+n(4a-c)=9a-c$，

于是有 $\begin{cases}m+4n=9\\ -m-n=-1\end{cases}\Rightarrow m=-\dfrac{5}{3}，n=\dfrac{8}{3}$.

①$\cdot\left(-\dfrac{5}{3}\right)$得：$\dfrac{5}{3}\leqslant -\dfrac{5}{3}a+\dfrac{5}{3}c\leqslant\dfrac{20}{3}$　③

②$\cdot\dfrac{8}{3}$得：$-\dfrac{8}{3}\leqslant\dfrac{32}{3}a-\dfrac{8}{3}c\leqslant\dfrac{40}{3}$　④

③+④：$-1\leqslant 9a-c\leqslant 20$，即 $-1\leqslant f(3)\leqslant 20$.

注　在应用“同向不等式相加”这一不等式的性质定理的同时，必须时刻提醒自己检查一下区域范围是否发生了变化.

强化激活

1. 已知 $-b<a<0$，则下列不等式中正确的是　(　　)

(A) $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$　(B) $a^2>b^2$　(C) $\dfrac{1}{a-b}<\dfrac{1}{a}$　(D) $|a|<b$

2. 设 x、y、m、n 为互不相等的正数，且 $x+y=m+n$，$0<\sqrt{x}-\sqrt{y}<\sqrt{m}-\sqrt{n}$，则正确的结论是　(　　)

(A) $xy>mn$ 且 $x>m>n>y$　(B) $xy>mn$ 且 $m>x>y>n$

(C) $xy<mn$ 且 $x>m>n>y$　(D) $xy<mn$ 且 $m>x>y>n$

3. “$x>y$ 且 $a>b$”是“$x+a>y+b$”成立的　(　　)

(A) 充分不必要条件　(B) 必要不充分条件

(C) 充要条件　(D) 既非充分又非必要条件

4. 若 $a>0>b$，$0>c>d$，则下列不等式不成立的是　(　　)

(A) $ac<bd$　(B) $\dfrac{a}{d}>\dfrac{b}{c}$

(C) $a+c>b+d$　(D) $a-d>b-c$

5. 若$b<0$，$|a|<|b|<|c|$，$\lg(ab)+\lg(bc)=\lg(ab^2c)$，则$a$、$b$、$c$的大小关系是 ( )

(A) $a<b<c$ (B) $b<c<a$ (C) $c<b<a$ (D) $b<a<c$

6. $6<a<10$，$\frac{a}{2}\leqslant b\leqslant 2a$，$c=a+b$，则$c$的范围是 ( )

(A) $9<c<30$ (B) $0\leqslant c\leqslant 18$

(C) $0\leqslant c\leqslant 30$ (D) $15<c<30$

7. 适当增加条件，使下列各命题成立：(1) 若$a>b$，则$ac\leqslant bc$；(2) 若$ac^2>bc^2$，则$a^2>b^2$；(3) 若$a>b$，则$\lg(a+1)>\lg(b+1)$；(4) 若$a>b$，$c>d$，则$\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$.

8. 已知三个不等式：①$ab>0$；②$-\frac{c}{a}<-\frac{d}{b}$；③$bc>ad$，以其中两个作为条件，余下一个作为结论，则可组成________个正确的命题.

9. 设$a>b>0$，$c>0$，$d>0$，则$\frac{b}{a}$、$\frac{a}{b}$、$\frac{b+c}{a+c}$、$\frac{a+d}{b+d}$从小到大的排列顺序是________.

10. a、$b\in\mathbf{R}$，则“$a>b$且$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$”是“$a>0$且$b<0$”的________条件.

11. 比较$A=3^{x+\frac{3}{2}}$与$B=3^{\sqrt{(x+1)(x+2)}}$的大小.

12. 设实数a、b、c满足$b+c=6-4a+3a^2$，$c-b=4-4a+a^2$，试确定a、b、c的大小关系.

13. 已知函数$f(x)=ax^2+bx+c$ ($a\neq 0$)的图象过点$(-1,3)$和$(1,1)$，(1) 求b的值；(2) 若$0<c<1$，求a的取值范围.

拓 展 提 高

14. 设$A=a+d$，$B=b+c$，a、b、c、$d\in\mathbf{R}^+$，$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，a大于b、c、d中的任何一个，比较A、B之大小.

15. 设$a>0$，$a^2-2ab+c^2=0$，$bc>a^2$，确定a、b、c的大小关系.

16. $\theta\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$，证明 $\cos\theta+\theta\cdot\sin\theta>1$.

解 答 提 示

1. [方法一] （特殊值排除法）取 $a=-1$，$b=2$，排除(A)、(B)、(C).

[方法二] 由条件 $-b<a<0$ 直接观察可知(D)成立.

2. [方法一] （特殊值排除法）取 $m=9$，$n=1$，$x=8$，$y=2$(取这些特殊值已经作了很好的选择，一是满足题设条件，二是便于计算). 排除(A)、(C)、(D).

[方法二] $\because 0<\sqrt{x}-\sqrt{y}<\sqrt{m}-\sqrt{n}$，

故 $x+y-2\sqrt{xy}<m+n-2\sqrt{mn}$，

$\therefore xy>mn$，排除(C)、(D).

下面比较 x、y、m、n 的大小关系，不用计算，观察可知，$m>x>y>n$时不等式$\sqrt{x}-\sqrt{y}<\sqrt{m}-\sqrt{n}$恒成立.

3. 充分性成立是显然的(同向不等式相加). 必要性不成立，反例：$x=0$，$y=1$，$a=10$，$b=2$.

4. [方法一] （特殊值排除法）$a=1$，$b=-1$，$c=-2$，$d=-3$，显然(B)不成立.

[方法二] $\begin{cases}a>b\\c>d\end{cases}\Rightarrow a+c>b+d$，(C)成立.

$\begin{cases}a>b\\-d>-c\end{cases}\Rightarrow a-d>b-c$，(D)成立.

又(A)成立是显然的，故应选(B).

5. 由对数的定义知 $ab>0$，$bc>0$，$ac>0$，又 $b<0$，因此 $a<0$，$c<0$. 而$|a|<|b|<|c|$，可知 $a>b>c$，选(C).

6. 可知 $3<b<20$，故 $9<c<30$，选(A).

7. (1) $c\leqslant 0$；(2) $b>0$；(3) $b>-1$；(4) $b>0$，$d>0$.

8. ①、②⇒③；①、③⇒②；②、③⇒①.

用反证法证明②、③⇒①.

设 $ab\leqslant 0$，显然，由②知 $a\neq 0$，$b\neq 0$，那么 $ab<0$.

$\because -\frac{c}{a}<-\frac{d}{b}\Rightarrow\frac{d}{b}-\frac{c}{a}<0\Rightarrow\frac{ad-bc}{ab}<0$，

$\therefore ad>bc$，这与条件③矛盾，故 $ab>0$ 成立.

9. $\frac{b}{a}<\frac{b+c}{a+c}<\frac{a}{b}$是清楚的，又$\frac{b+c}{a+c}<\frac{a+d}{b+d}<\frac{a}{b}$，

$\therefore\frac{b}{a}<\frac{b+c}{a+c}<\frac{a+d}{b+d}<\frac{a}{b}$.

10. 充要条件.

11. [解]　$B=3^{\sqrt{x^2+3x+2}}$，

因此只须考虑$\sqrt{x^2+3x+2}$与 $x+\frac{3}{2}$两者的大小关系.

$\sqrt{x^2+3x+2}=\sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}$，

因此由定义域 $x\geqslant -1$ 或$x\leqslant -2$知，

当 $x\leqslant -2$ 时$\sqrt{x^2+3x+2}>x+\frac{3}{2}$，故 $A<B$；

当 $x\geqslant -1$ 时$\sqrt{x^2+3x+2}<x+\frac{3}{2}$，故 $A>B$.

12. [解法一]　$c-b=4-4a+a^2=(a-2)^2\geqslant 0$，则 $c\geqslant b$.

又 $b-a=[(b+c)-(c-b)]\cdot\frac{1}{2}-a$

$=1+a^2-a>0$，有 $b>a$，

$\therefore c\geqslant b>a$.

[解法二]　$b+c=6-4a+3a^2$ ①

$c-b=4-4a+a^2$ ②

②·3−①：$c=2b+3-4a$ ③

③代入②：$b=1+a^2$ ④

又有②：$c-b=(2-a)^2\geqslant 0$ ⑤

由④、⑤知 $c\geqslant b>a$.