



21世纪高等教育本科规划教材

数 学 系 列

丛书主编 郑玉美

高等数学全程辅导与提高

GAODENG SHUXUE QUANCHENG FUDAO YU TIGAO

(第二版)

主 编 许 虹 张清平
何炜煌

SHUXUE XILIE



教育部直属师范大学
华中师范大学出版社

21 世纪高等教育本科规划教材·数学系列

丛书主编 郑玉美

高等数学全程辅导与提高

(第二版)

主 编 许 虹 张清平

何炜煌

副主编 魏 莹 马 倩

张汉萍 杜洪艳

华中师范大学出版社

内容简介

本书是《高等数学》上、下册的辅导教材,内容包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、常微分方程和差分方程简介、无穷级数、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学共 10 章,每章内容由五部分组成:① 基本内容与要求;② 疑难解答;③ 习题选解;④ 范例选讲;⑤ 自测题。

本书可帮助非数学专业类学生学习高等数学,也可为准准备高等数学考试的学生提供参考,还可作为广大教师教学的参考书。

新出图证(鄂)字 10 号

图书在版编目(CIP)数据

高等数学全程辅导与提高/许虹 张清平 何炜煌主编. —2 版.

—武汉:华中师范大学出版社,2009.10

(21 世纪高等教育本科规划教材·数学系列)

ISBN 978-7-5622-3946-8

I. 高… II. ①许… ②张… ③何… III. 高等数学—高等学校—教学参考资料

IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 069468 号

高等数学全程辅导与提高 (第二版)

主编:许虹 张清平 何炜煌◎

责任编辑:杨发明

责任校对:方汉交

封面设计:梦 娜

编辑室:第二编辑室

电话:027-67867362

出版发行:华中师范大学出版社

社址:湖北省武汉市珞喻路 152 号

电话:027-67863040 67863426 67867076(发行部) 027-67861321(邮购)

传真:027-67863291

网址:<http://www.ccupress.com>

电子信箱:hscbs@public.wh.hb.cn

印刷:湖北孝感日报印刷厂

督印:章光琼

字数:400 千字

开本:787mm×1092mm 1/16

印张:18

版次:2009 年 10 月第 2 版

印次:2009 年 10 月第 1 次印刷

印数:1-3100

定价:30.00 元

欢迎上网查询、购书

敬告读者:欢迎举报盗版,请打举报电话 027-67861321

前言

21 世纪高等教育本科规划教材·数学系列

美玉联 丛书主编

丛书编写委员会

主 任 郑玉美

副主任 (以姓氏笔画为序)

尤正书 (湖北大学知行学院)

冉兆平 (中南民族大学工商学院)

毕重荣 (中国地质大学江城学院)

宋礼民 (武汉科技大学中南分校)

刘昌喜 (武汉职业技术学院)

陈方年 (江汉大学文理学院)

张清平 (武汉生物工程学院)

黄承绪 (武汉科技大学城市学院)

1. 在保持并增强原有的特色基础上, 特别注重在学生的教学素质和

高等数学不仅是一种工具, 它包含着处理连续变量的基本理论和众多的科学事实, 是自然科学的重要基础, 也是培养逻辑思维的理想载体; 高等数学更是一种素养和文化, 培养学生运用高等数学的观念去分析和解决工作中遇到的实际问题, 是学习高等数学的目的之一。为达到上述目的, 在第二版中, 加强了教学与文化、数学与社会、数学与历史的联系, 使学生加深对数学概念与理论的理解, 而且可从它们中汲取丰富的数学文化, 提高

2. 对第一版中有的错误进行了科学的、严密的、精细刻式的订正与改写。

21 世纪高等教育本科规划教材·数学系列

丛书主编 郑玉美

《高等数学全程辅导与提高》编写委员会

主 编 许 虹 (江汉大学)

张清平 (武汉生物工程学院)

何炜煌 (江汉大学文理学院)

副主编 魏 莹 (武汉职业技术学院)

马 倩 (武汉科技大学城市学院)

张汉萍 (武汉职业技术学院)

杜洪艳 (武汉科技大学中南分校)

编 者 (以姓氏笔画为序)

王学敏 (武汉生物工程学院)

马 倩 (武汉科技大学城市学院)

叶 菁 (中国地质大学江城学院)

许 虹 (江汉大学)

李 霞 (武汉科技大学城市学院)

李圆媛 (武汉工程大学)

杜洪艳 (武汉科技大学中南分校)

张汉萍 (武汉职业技术学院)

张清平 (武汉生物工程学院)

宋 翌 (武汉生物工程学院)

吴 珊 (中南民族大学工商学院)

魏 莹 (武汉职业技术学院)

前言

Ban 2

教材建设是一项长期的、艰巨的工作。一部好的教材必须经过师生反复施教、施学,不断探索,精益求精,集思广益,长期积累,不断完善,才能达到我们所追求的目标。

本系列教材自2006年出版以来,对它的使用进行了科学的实验和持续的跟踪调查,为修订做了充分的准备,力争将其打造成一套为社会所公认的精品。主要做了如下工作:

一是在部分学校开展了对比教学实验,即选择一到两种目前大家认为编写较好的教材,由同一位老师或不同的老师在不同的班级进行对比教学实验,并组织师生进行研讨,以发现我们的教材及对比教材的优缺点,为修订提供依据。

二是规定编者及使用者在实施教学的过程中,要注意发现并收集教材中的不足及错误,为修订做准备。

三是定期召开教材使用情况汇报研讨会,总结使用情况,收集使用信息。

有了以上准备,并在多方收集本系列教材使用情况的基础上,召开了由系列教材主编及部分使用教师参加的研讨会,认真听取了来自各方面的意见及建议,制订了本次修订的原则及修订内容,主要有以下几个方面:

1. 在保持并增强原有的“三用”原则及“三凸现”特色的基础上,特别注重在学生的数学素质和文化素养的培养上下工夫。

高等数学不仅是一种工具,而且是一种思维模式,它包含着处理连续变量的基本理论和众多的科学思维方法,既是学习其他自然科学的重要基础,也是培养理性思维的理想载体;高等数学不仅是一种知识,而且是一种素养和文化。培养学生运用高等数学的观念去进行定量思维,切实解决工作中遇到的实际问题,是学习高等数学的目的之一。为达到上述目的,在第二版中,加强了数学与文化、数学与社会、数学与历史的联系和理解,从中不仅可以使学生加深对数学概念与理论的理解,而且可从它们产生的历史背景、产生的过程及对社会发展的影响中吸取丰富的数学文化,提高文化素养。

2. 对第一版中存在的部分不够严谨的定义、定理进行了科学的、严密的、精雕细刻式的订正与改写。

随着高等学校办学层次的多样化,为适应不同层次的教学需要,针对不同层次出版了较多的教材.现行的很多高等数学教材中对较为艰深的定理进行了通俗化的改写,使之便于教学,便于学生理解,这无疑是一个进步.但部分教材中这种改写不够严谨,存在严重的缺陷:一是加强了条件,使其实用面变窄;二是放宽了条件,导致定理在某些情况下失效、不真.为避免上述问题,我们对照经典著作,对教材中的每一个定义、定理进行了逐字逐句的斟酌修改,消除了上述问题,使教材处在一个科学、严密的体系之中.

3. 面对考研内容的变化,增加完备了考研必备的内容,以满足部分学生考研的需要.

4. 进一步强化了数学语言的应用,更正了书中一些知识性和科学性错误.

5. 为了使本系列教材具有更强的针对性和更广泛的代表性,本次修订调整并增加了部分主编和作者,他们为本书的修订提出了许多宝贵的建议,并对修订付出了辛勤的、创造性的劳动.

通过本次修订,本系列教材将有一个质的飞跃.但教材建设是一项长期的工作,不可能一蹴而就,还需要我们进一步努力探索.我们相信,通过我们的不懈努力,本系列教材必定会成为社会所公认的精品教材.

编委会

2009年4月21日

前言

Ban

1

步入新世纪,中国的高等教育出现了崭新的格局.一大批独立院校相继成立,加入到传统的高等本科教育大军之阵线,它们常以“三本”的面目出现,正在成为高等教育的一支重要力量.这批新军(独立院校“三本”的学子们)在传统的教师们率领下手抱着传统的教材以传统的方式苦战了好几个春秋,无论是独立院校的执教者还是勤奋的学子们都盼望能有适合于这批规模巨大的新型的独立院校的教材,这是势在必行,又是势在必得的时代所需.郑玉美教授在成功推出《21世纪高等职业教育规划教材·数学系列》后,吸纳了湖北大学知行学院、武汉科技大学中南分校、武汉科技大学城市学院、中国地质大学江城学院、江汉大学文理学院、中南民族大学工商学院、武汉生物工程学院、武汉工程大学、武汉工业职业技术学院以及武汉职业技术学院(本科部)等独立院校一批经验丰富的教育专家又编写了一套具有“三用三凸一独”的《21世纪独立院校本科规划教材·数学系列》,以满足独立院校教学之急需.这套教材具有以下特点:

1. 以“三用”为原则

(1) 够用 删去传统本科教材中难而繁的内容,保留理、工、农、医、管各本科专业的最基本的内容,达到满足本科高度所必需的最低限度,够用即可.

(2) 管用 增添以往传统教材中没有的同时又是必需的知识内容,使教材适合三类本科各专业之需要,达到管用的效果.

(3) 会用 淡化传统本科教材偏重理论的倾向,删去理论性较强的内容,强调数学知识的应用,力求学以致用、学后会用,增强学生学习数学的信心与兴趣.

2. 以“三凸现”为特色

(1) 凸现数学与文化的联系 对重要的数学概念与理论,着重讲解它们的历史背景、产生的过程及影响,同时有机地结合一些有趣的数学故事及有影响力的数学家的逸事进行讲解,尽量让学生全面了解数学,达到提高学生的综合素质的目的.

(2) 凸现数学现代化教学手段的应用 将数学软件的使用有机地融合进教材中,不盲目追求运算技巧,着力于培养学生解决实际问题的能力.

(3) 凸现数学的应用性 如把有重要应用的“微元法”贯穿在整个高等数学教材中.

3. 体现独立院校的“独”字

全套教材从知识的分量、难易程度、结构分布等方面要适合独立院校“三本”之需要.如高等数学以一元微积分、多元微积分为主线,而多元微积分浓缩为多元微分学与多元积分学两大块,将微分方程、无穷级数放在一元微积分学之后,这样使“三本”学生们易于接受掌握.

为了帮助学生更好地学习《高等数学》,满足部分学生考研时复习数学的需要,我们编写

了与《高等数学》上、下册配套的《高等数学全程辅导与提高》. 全书按配套教材的内容分为十章, 每章的“全程辅导”体现在第一、二、三部分, 将本章的内容加以归纳, 概念作进一步分析与深化, 书上较难习题给出全解. 而“提高”则体现在第四、五部分, 选取了一些近几年各类非数学专业学校考研试题作为例题及自测题, 供学生考研复习之用.

本套教材共六种:《高等数学》(上)、《高等数学》(下)、《高等数学全程辅导与提高》、《线性代数》、《概率论与数理统计》、《概率论与数理统计学习指导》.

本套教材的框架结构、统稿定稿由丛书主编郑玉美教授及各册主编负责. 齐民友、任德麟、邓宗琦教授认真审阅了全部教材的原稿, 提出了许多建设性的意见, 在此对三位资深教授表示衷心的感谢.

参加《高等数学全程辅导与提高》编写的有: 魏莹、许虹、张汉萍、马倩、李圆媛、张清平、李霞、宋翌、吴珊、杜洪艳等. 全书由魏莹、许虹、何炜煌统稿、定稿.

虽然各位编者十分努力, 但由于我们的水平有限, 成书时间又很仓促, 本套教材还可能有不少的缺点与错误, 希望广大师生、读者批评指正.

编委会

2006年8月

目 录

第一章 函数与极限	(1)
一、基本内容与要求	(1)
二、疑难解答	(6)
三、习题选解	(8)
四、范例选讲	(18)
五、自测题	(22)
第二章 导数与微分	(25)
一、基本内容与要求	(25)
二、疑难解答	(28)
三、习题选解	(29)
四、范例选讲	(36)
五、自测题	(43)
第三章 微分中值定理与导数的应用	(46)
一、基本内容与要求	(46)
二、疑难解答	(51)
三、习题选解	(54)
四、范例选讲	(63)
五、自测题	(74)
第四章 不定积分	(78)
一、基本内容与要求	(78)
二、疑难解答	(80)
三、习题选解	(81)
四、范例选讲	(86)
五、自测题	(92)
第五章 定积分及其应用	(95)
一、基本内容与要求	(95)
二、疑难解答	(99)
三、习题选解	(105)
四、范例选讲	(114)
五、自测题	(120)

第六章 常微分方程和差分方程简介	(124)
一、基本内容要求	(124)
二、疑难解答	(127)
三、习题选解	(128)
四、范例选讲	(133)
五、自测题	(138)
第七章 无穷级数	(142)
一、基本内容要求	(142)
二、疑难解答	(147)
三、习题选解	(149)
四、范例选讲	(156)
五、自测题	(163)
第八章 向量代数与空间解析几何	(167)
一、基本内容要求	(167)
二、疑难解答	(171)
三、习题选解	(173)
四、范例选讲	(180)
五、自测题	(186)
第九章 多元函数微分学	(189)
一、基本内容要求	(189)
二、疑难解答	(195)
三、习题选解	(200)
四、范例选讲	(212)
五、自测题	(219)
第十章 多元函数积分学	(223)
一、基本内容要求	(223)
二、疑难解答	(231)
三、习题选解	(234)
四、范例选讲	(250)
五、自测题	(263)
自测题参考答案与提示	(268)
(27)	用其基位阶宝 章正毅
(28)	本章以客内本基,一
(29)	答精取到,二
(30)	精取取到,三
(31)	精取取到,四
(32)	精取取到,五

第一章

函数与极限

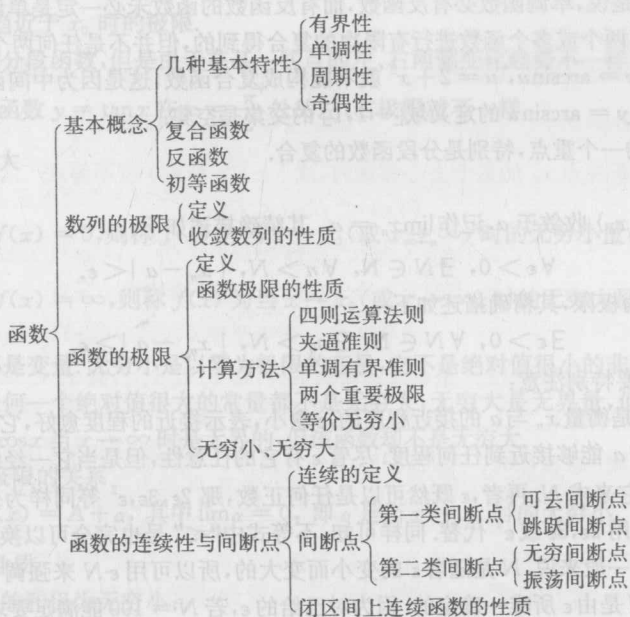
Zhang

一、基本内容与要求

(一) 大纲要求

1. 理解函数的概念及函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性.
2. 理解复合函数和反函数的概念.
3. 熟悉基本初等函数的性质及其图形.
4. 会建立简单实际问题中的函数关系式.
5. 理解极限的概念(对极限的 $\epsilon-N$, $\epsilon-\delta$ 定义可在学习过程中逐步加深理解, 对于给出 ϵ 求 N 或 δ 不作过高的要求), 掌握极限的四则运算法则.
6. 理解极限存在的夹逼准则, 了解函数单调有界准则, 会用两个重要极限求极限.
7. 了解无穷小、无穷大以及无穷小的阶的概念, 会用等价无穷小求极限.
8. 理解函数在一点连续和在一个区间上连续的概念, 了解间断点的概念, 并会判别间断点的类型.
9. 了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质(介值定理和最大值、最小值定理).

(二) 知识网络图



(三) 基本内容

1. 函数

(1) 函数的概念 函数关系中有三个要素,即定义域、对应规则 and 值域,其中定义域和对应规则是两个本质的要素,而函数的值域完全由对应规则及定义域所确定.

在实际问题中,函数的定义域是根据问题的实际意义确定的;在数学中,有时不考虑函数的实际意义,而抽象地研究用算式表达的函数,这时我们约定:函数的定义域就是自变量所能取的使算式有意义的一切实数值.

(2) 函数的基本特性

① 有界性 若一个函数在一个区间上(内)有界(有上界,有下界),需要注意的是界不是唯一的.例如,函数 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界,1 及所有大于 1 的数都可以作为它的上界.

② 单调性 函数的单调性总是相对于自变量的某一区间而言的.例如,函数 $y = x^2$ 在 $(-\infty, 0)$ 内为减函数,在 $(0, +\infty)$ 内为增函数.

③ 奇偶性 讨论函数的奇偶性都是在对称区间上进行的,因此,函数的定义域具有对称性是函数是否具有奇偶性的必要条件.例如,函数 $y = \ln x (x > 0)$ 必不是奇偶函数; $y = x (x \in \mathbf{R})$ 是奇函数,但在区间 $(0, +\infty)$ 内就不是.

两个奇函数的和或差仍为奇函数;两个偶函数的和、差、积、商(除数不为 0)仍为偶函数;两个奇函数的积、商(除数不为 0)是偶函数;一个奇函数与一个偶函数的积、商(除数不为 0)仍为奇函数.

④ 周期性 一个函数是周期函数,它的周期不是唯一的.事实上,若 T 为周期函数 $f(x)$ 的周期, kT (k 为整数, $k \neq 0$) 都可以作为它的周期,我们通常说的周期是指它的最小正周期,但要指出的是,并不是所有的周期函数都存在最小正周期.例如,常数函数 $y = C$ 是周期函数,以任何非零实数为周期,但它没有最小正周期,因为正实数没有最小值;又如,狄里赫莱函数 $D(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x \text{ 为有理数,} \\ 1, & \text{当 } x \text{ 为无理数,} \end{cases}$ 任何有理数都是它的周期,但是它没有最小正周期,因为正有理数没有最小值.

(3) 反函数存在的充要条件是函数是一一对应的.而函数的单调性只是函数存在反函数的充分条件,并不是必要条件.也就是说,单调函数必有反函数,而有反函数的函数未必一定是单调函数.

(4) 复合函数是由两个或多个函数进行有限次的复合得到的,但并不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的.例如, $y = \arcsin u$, $u = 2 + x^2$ 就不能构成复合函数,这是因为中间函数 $u = 2 + x^2$ 的值域 $[2, +\infty)$ 与外层函数 $y = \arcsin u$ 的定义域 $[-1, 1]$ 的交集是空集.

复合函数是本章的一个重点,特别是分段函数的复合.

2. 数列的极限

(1) 定义 数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a , 记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 其精确描述如下:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \forall n > N, |x_n - a| < \epsilon.$$

数列 $\{x_n\}$ 不以 a 为极限,其精确描述如下:

$$\exists \epsilon > 0, \forall N \in \mathbf{N}, \exists n_0 > N, |x_{n_0} - a| \geq \epsilon.$$

在这个定义里面,要特别注意:

① ϵ 的任意性 ϵ 是衡量 x_n 与 a 的接近程度的, ϵ 愈小,表示接近的程度愈好,它除限于正数外,不受任何限制,这正说明 x_n 与 a 能够接近到任何程度.尽管 ϵ 有它的任意性,但是当它一经给出,就应暂时看做是固定不变的,以便根据它来求 N .再者, ϵ 既然可以是任何正数,那 $2\epsilon, 3\epsilon, \epsilon^2$ 等同样为任何正数,因此定义中不等式右边的 ϵ 完全可用 $2\epsilon, 3\epsilon$ 或 ϵ^2 代替.同样可知,不等式中“ $<$ ”号也完全可以换成“ $\leq$ ”号.

② N 的存在性 一般来说, N 是随着 ϵ 的变小而变大的,所以可用 ϵN 来强调 N 是依赖于 ϵ 的,但是这种写法并不意味着 N 是由 ϵ 所唯一确定的.因为对已给的 ϵ , 若 $N = 100$ 能满足要求,则 $N = 101$ 或 1000

或 10000 自然能够满足要求. 其实 N 等于多少关系不大, 重要的是它的存在性. 只要存在一个 N , 那么大于 N 的任何一个自然数都能够满足要求, 因此在实际使用中的 N 也不必限于自然数, 只要它是正数就行了.

(2) 收敛数列的性质

性质 1: (唯一性) 收敛数列的极限是唯一的.

性质 2: (有界性) 收敛数列都是有界数列.

性质 3: (收敛数列的子数列的性质) 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a , 那么它的任一子数列 $\{x_{n_k}\}$ 也收敛, 且极限也是 a .

由性质 2 可知, 无界数列必定发散. 例如 $\{n^2\}$ 是无界的, 所以是发散的, 也就是它的极限不存在. 但是必须注意, 有界性只是数列收敛的必要条件, 而非充分条件, 例如 $\{(-1)^{n+1}\}$ 有界, 但并不收敛.

这几个性质给出了证明数列 $\{x_n\}$ 发散的方法, 通常有以下几种:

① 找出数列 $\{x_n\}$ 的两个有不同极限的子列;

② 找出数列 $\{x_n\}$ 的一个发散子列;

③ 证明数列是无界的.

3. 函数的极限

(1) 定义

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \dot{U}(x_0, \delta), \text{ 有 } |f(x) - A| < \varepsilon;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall |x| > N, \text{ 有 } |f(x) - A| < \varepsilon.$$

在函数极限的 $\varepsilon\delta$ 定义中, 要求 $0 < |x - x_0| < \delta$, 而不是 $|x - x_0| < \delta$, 这是因为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 是研究当自变量 x 无限趋近于 x_0 时, 相应的函数值 $f(x)$ 的变化趋势, 而不是最终结果. $x \rightarrow x_0$ 是指 x 无限趋近于 x_0 但不等于 x_0 . 因此, 在讨论函数极限的时候, 可以全然不顾在 $x = x_0$ 时 $f(x)$ 的情形, 即不考虑 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 是否有定义, 即使有定义, 也不考虑 $f(x_0)$ 等于多少. 否则, 如果在 $\varepsilon\delta$ 定义中将 “ $0 < |x - x_0| < \delta$ ” 改为 “ $|x - x_0| < \delta$ ”, 那就必须考虑函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 时的情形, 这就会大大限制函数极限的研究.

(2) 左、右极限 在讨论分段函数 $f(x)$ 的分段点 x_0 处的极限时, 由于 x_0 的两侧 $f(x)$ 的定义不同, 所以当笼统地求 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 时无法将 $x \rightarrow x_0$ 时对应的 $f(x)$ 用具体的定义式去表达, 因而必须研究函数 $f(x)$ 分别从 x_0 的左边和右边趋近于 x_0 时的极限.

有些函数虽然不是分段函数, 但是由于在某一些点的左、右两侧变化趋势不一样, 求其极限也要分别求它的左、右极限. 例如, 函数 $y = \tan x$ 在 $x = \frac{\pi}{2}$ 处的左、右极限就不一样.

(3) 无穷小与无穷大

① 定义

无穷小 若 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = 0$, 则称 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的无穷小量, 简称为无穷小.

无穷大 若 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = \infty$, 则称 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的无穷大量, 简称为无穷大.

无穷小与无穷大都是变量. 无穷小是以零为极限的变量, 它不是绝对值很小的非零常量. 零是唯一作为无穷小的常量. 同样, 任何一个绝对值很大的常量都不是无穷大, 无穷大是无界量, 但无界量却不一定是无穷大. 例如, 函数 $y = x \cos x$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时是无界的, 但该函数却不是无穷大.

② 无穷小和函数极限的关系

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha, \text{ 其中 } \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha = 0, \text{ 即 } \alpha \text{ 是当 } x \rightarrow x_0 \text{ 时的无穷小.}$$

③ 无穷小的运算性质

i) 有限个无穷小的和仍为无穷小;

ii) 有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小;

iii) 有限个无穷小的乘积仍为无穷小;

iv) 常数与无穷小的乘积仍为无穷小.

(4) 无穷小的比较

① 定义: 设 $\lim \alpha = 0, \lim \beta = 0$.

若 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0$, 则称 α 是 β 的高阶无穷小, 记作 $\alpha = o(\beta)$;

若 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = C \neq 0$, 则称 α 是 β 的同阶无穷小;

若 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1$, 则称 α 是 β 的等价无穷小, 记作 $\alpha \sim \beta$;

若 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \infty$, 则称 α 是 β 的低阶无穷小.

② 当 $x \rightarrow 0$ 时, 几个常用的等价无穷小:

$$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1;$$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2; a^x - 1 \sim x \ln a (a > 0, a \neq 1); (1+x)^a - 1 \sim ax.$$

③ 作等价无穷小的代换时, 可以在求乘积的极限运算中把其中的一个因式“整个的”用它的等价无穷小代换, 但绝不能对分子或分母中的某个加项作代换. 例如, 在求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3}$ 时, 如果将 $\sin x, \tan x$ 均换成 x , 那么分子成为 0, 得出极限为 0. 而事实上

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{\tan x}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \right) = -1 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

4. 极限的运算

(1) 极限的四则运算定理

若 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$, 则

$$\lim [f(x) + g(x)] = \lim f(x) + \lim g(x) = A + B;$$

$$\lim [f(x) - g(x)] = \lim f(x) - \lim g(x) = A - B;$$

$$\lim [f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = AB;$$

$$\lim [Cf(x)] = C \lim f(x), C \text{ 为常数};$$

$$\lim [f(x)]^n = [\lim f(x)]^n, n \text{ 为正整数};$$

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} (B \neq 0);$$

$$\lim f[g(x)] = f[\lim g(x)].$$

(2) 夹逼准则 若在点 x_0 的某个去心邻域内 (或 $|x| > N$ 时) 有不等式

$$F(x) \leq f(x) \leq G(x)$$

成立, 且有

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} F(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} G(x) = A,$$

则

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = A.$$

(3) 单调有界准则 若数列 $\{x_n\}$ 是单调递增的数列, 即 $x_n \leq x_{n+1}$, 且 $x_n < M$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在; 若数列 $\{x_n\}$ 是单调递减的数列, 即 $x_n \geq x_{n+1}$, 且 $x_n > M$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

利用“单调有界准则”求极限时, 一般情况可以分为两步, 一是判定数列的单调性及有界性, 二是利用数列的通项的递推公式两边取极限, 从而通过解方程来求出所要求的极限.

(4) 两个重要极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

注意 $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ 与 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = 1$ 的区别. 前者运用的是无穷小与有界函数的乘积仍为无穷小, 后者运用的是重要极限.

5. 函数的连续性与间断点

(1) 连续的定义

① 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义, 若对 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 只要 $|x - x_0| < \delta$, 就有 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

② 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义, 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

③ 设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义, 如果

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0,$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

以上给出的函数在一点连续的定义虽然在表述方式上不同, 但它们所表示的实质都完全相同, 即函数在一点连续必须满足三个条件:

① 函数 $f(x)$ 在 x_0 有定义, 其函数值为 $f(x_0)$;

② 极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在;

③ 这个极限值等于函数值, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

这三个条件提供了判断函数 $f(x)$ 在 x_0 是否连续的具体方法.

(2) 左连续与右连续 若函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 有 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0^-) = f(x_0)$ 或 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0^+) = f(x_0)$, 则分别称函数 $y = f(x)$ 在 x_0 左连续或右连续.

如果在闭区间上讨论函数的连续性, 那么在端点处就有相应的左连续与右连续的问题; 同样, 讨论分段函数在分段点处的连续性时, 一定要分别考虑在分段点处是否左连续和右连续的问题.

(3) 函数的间断点

① 定义 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 不连续, 则称点 x_0 为 $f(x)$ 的间断点.

② 判别方法 由函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续的定义可知, 如果 $f(x)$ 在点 x_0 有下列三种情况之一:

i) 函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 没有定义;

ii) 极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在;

iii) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

则点 x_0 是 $f(x)$ 的间断点.

③ 间断点的分类

间断点 $\left\{ \begin{array}{l} \text{第一类间断点: } f(x_0^-), f(x_0^+) \text{ 均存在} \\ \text{第二类间断点: } f(x_0^-), f(x_0^+) \text{ 中至少有一个不存在.} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{可去间断点: } f(x_0^-) = f(x_0^+). \\ \text{跳跃间断点: } f(x_0^-) \neq f(x_0^+). \end{array} \right.$

(4) 连续函数的性质

① 连续函数的和、差、积、商(分母不为零) 仍为连续函数;

② 单调连续函数的反函数是连续函数;

③ 基本初等函数在其定义域内是连续的; 初等函数在其定义区间内是连续的.

(5) 初等函数的连续性 在初等函数的连续性中强调了“初等函数在其定义区间内都是连续的”, 这里“定义区间”不可忽略, 也不可换为“定义域”, 否则结论不成立. 因为定义函数在一点连续的前提条件是函数在该点的某个邻域内有定义, 但有些初等函数在其定义域中的某些点是孤立点, 即不能定义连续性. 例

如, $y = \sqrt{\cos x - 1}$ 的定义域为 $\{x \mid x = 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, 定义域中所有的点都是孤立点, 因此无法取极限, 也就无法谈连续性了.

(6) 闭区间上连续函数的性质 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则:

- ① (有界性定理) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界, 即存在 $M > 0$, 使得当 $x \in [a, b]$ 时, 恒有 $|f(x)| \leq M$;
- ② (最大值、最小值定理) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必有最大值 M 和最小值 m , 即在区间 $[a, b]$ 上必存在 M, m , 使得 $m \leq f(x) \leq M$ 恒成立;
- ③ (零点定理) 若 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 则在开区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使 $f(\xi) = 0$;
- ④ (介值定理) 若 $f(a) \neq f(b)$, 则对于任何介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的数 C , 至少存在一点 $\xi, a < \xi < b$, 使 $f(\xi) = C$.

二、疑难解答

1. 单调函数一定存在反函数, 不单调的函数是否一定不存在反函数?

答 不是的. 函数的单调性是函数存在反函数的充分条件, 而非必要条件. 函数是否存在反函数, 取决于该函数在其定义域内是否为单射. 有些函数在其定义域内不单调, 但是却有可能是单射, 此时它就存在反函数. 例如, 函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [-1, 0], \\ x+1, & x \in (0, 1] \end{cases}$$

在区间 $[-1, 1]$ 上并不单调, 但它是 $[-1, 1] \rightarrow [0, 2]$ 的单射, 所以存在反函数:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt{x}, & x \in [0, 1), \\ x-1, & x \in [1, 2]. \end{cases}$$

2. 下面的极限运算是否正确?

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = 0.$$

答 不正确. 虽然结果正确, 但是表达是错误的.

因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ 不存在, 所以不能运用极限运算法则. 该题的正确解法如下:

因为 $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$, $\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$, 由无穷小与有界函数的乘积仍为无穷小, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$.

3. 在复合函数的极限运算法则中, 能否把条件“ $x \neq x_0$ 时, $g(x) \neq u_0$ ”去掉, 即由“ $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0$,

$\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$ ”直接推得“ $\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$ ”?

答 一般情况下上述结论是不成立的. 例如, 函数

$$u = g(x) = x \sin \frac{1}{x} (x \neq 0), \quad f(u) = \begin{cases} 0, & u = 0, \\ 1, & u \neq 0. \end{cases}$$

此时,
$$f[g(x)] = \begin{cases} 0, & x = \frac{1}{n\pi}, \\ 1, & x \neq \frac{1}{n\pi}, \end{cases} \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots).$$

显然, $\lim_{x \rightarrow 0} f[g(x)]$ 不存在. 但是, 如果按照题设, 去掉“ $x \neq x_0$ 时, $g(x) \neq u_0$ ”的话, 即去掉“ $x \neq 0$ 时, $g(x) = x \sin \frac{1}{x} \neq 0$ ”这个条件, 上述函数就满足题设所述的极限运算法则, 就会推得

$$\lim_{x \rightarrow 0} f[g(x)] = \lim_{u \rightarrow 0} f(u) = 1.$$