高等学校经济管理类专业数学基础课程系列教材

概率统计及其应用

于义良　安建业　王全文　陈成钢　编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校经济管理类专业数学基础课程系列教材

概率统计及其应用

GaiLü Tongji jiqi Yingyong

于义良 安建业 王全文 陈成钢 编著

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

图书在版编目（CIP）数据

概率统计及其应用/于义良等编著. —北京：高等教育出版社，2010.8
ISBN 978-7-04-030070-3

Ⅰ.①概… Ⅱ.①于… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 124255 号

策划编辑 马　丽　**责任编辑** 杨　波　**封面设计** 张　楠
责任绘图 尹文军　**版式设计** 王　莹　**责任校对** 杨雪莲
责任印制 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**咨询电话**	400-810-0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
			http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	保定市中画美凯印刷有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2010年8月第1版
印　　张	17.25	**印　　次**	2010年8月第1次印刷
字　　数	320 000	**定　　价**	24.60元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　30070-00

内容提要

本书是天津市高等学校本科教学改革与质量建设研究计划(重点)项目“大学数学系列精品课程资源建设与共享机制的研究实践”(津教委高[2008]8号)的研究成果。其基本内容是依据教育部数学基础课程教学指导分委员会制定的“经济管理类本科概率论与数理统计课程教学基本要求”编写的。本书将概率统计和Office软件中的Excel相结合,基于Excel软件介绍实际应用,易学易用。读者在学习相关理论的基础上,可以轻松地完成复杂概率计算和统计分析,实现理论到实践的转化。

全书分为八章,内容包括随机事件及其概率,随机变量及其分布,随机向量及其分布,随机变量的数字特征,统计估值,统计检验,方差分析,相关与回归分析和21个演示实验。其特点是,内容可视化,计算软件化,方法现实化,实用性强。

本书可作为高等学校经济管理类本科专业学生的教材,也可作为其他非数学类本科专业学生的教材或参考书。

前　言

随着科学技术的迅猛发展，数量分析已渗透到人文科学、社会科学和自然科学等各个领域，数学的重要性为社会所公认，数学的普及也越来越广泛；与此同时，由于计算机技术的普及与提高，繁难的数学计算、庞大的数据分析和抽象的数学推理已不再是高不可攀，数学的应用也越来越深入。伴随着社会对人的素质要求的不断提高，数学素质教育已成为公民教育的必修课。

为适应新形势下社会发展的需要，作为天津市优秀教学团队的天津商业大学"大学数学基础课程教学团队"，近年来一直致力于"信息技术与数学课程整合"这一教育教学改革问题的研究与实践，并取得了一些可喜的成果。为了深化教育教学改革的成果，团队教师编著了这套经济管理类本科专业数学基础课程教材，这套教材包括《高等数学及其应用》、《线性代数及其应用》和《概率统计及其应用》。

本套教材是天津市高等学校本科教学改革与质量建设研究计划重点项目"大学数学系列精品课程资源建设与共享机制的研究实践"（津教委高[2008]8号）的成果。教材内容涵盖了教育部数学基础课程教学指导分委员会对经济管理类各本科专业三门数学基础课程教学内容的全部要求，并力求体现以下特点：

1. 传统与现代融合

数学基础知识、多媒体技术、计算机应用软件三者有机融合。以数学为本，辅之多媒体技术使抽象概念可视化、静态图形动态化，辅之计算机应用软件使复杂计算窗口化，使过去靠手工难以完成的绘图、数据分析和模拟逼近等，可以轻松自如地实现。多媒体技术、计算机应用软件融入数学基础知识学习中，调动了学生学习数学的兴趣，促进了学生数学素质的提高。

2. 知识与能力并重

适时插入"停下来想一想"阴影字体注释，通过设疑、提醒、警示、猜想、归纳、推广（条件与结论变更）、理清关系、总结思路等方法，或引出新的思考，或提出更深层次、更广范围的问题，把对内容的理解引向深入，让学生回味和联想，帮助学生掌握知识重点、领会问题本质，引导学生自觉思考，开拓学生的思路和视野，启迪学生发现、分析和解决问题，激发学生的求知欲，培养学生的创新意识和自主学习能力。

3. 理论与应用兼备

理论的准确理解是实际正确应用的基础，实际应用又是对理论理解的深化。教材以实际问题为背景，将数学建模思想融入其中。在概念阐述上，做到通俗简

明,举例贴近生活;在理论阐述上,做到讲清楚数学思想和原理,讲明白应用的条件、方法和结果(解释);在应用案例上,做到生活化、大众化、科学化,力求使学生消除对数学的陌生感、抽象感、恐惧感,树立学生学好数学、用好数学的信心。

4. 基础与提高共存

例题选择做到少而精,重在有代表性,重在体现概念的理解掌握和思维方法的培养。教材习题配置做到数量适宜、难度合理、循序渐进,每节后习题均分为 A,B 两组。A 组是基本题,是对课程的基本要求,要求学生必须完成;B 组是提高题,大部分题目是历届全国硕士研究生入学考试试题,是为学有余力的学生准备的,重在综合性,力求通过这些习题进一步加深和拓展教材内容,帮助学生提高综合运用所学知识的能力。此外,习题中有意识地增加了图形题和实际应用题(部分题目需要用计算机来完成),使学生感到数学这门课学了有用、学了会用。

本套教材融入软件,突出技能,实用性强。内容可视化——让学生不再因抽象而烦恼;计算软件化——让学生不再被繁难所困扰;方法现实化——让学生不再因不知其用而厌学。

作者于义良教授是天津市高等学校首届教学名师之一,曾到澳大利亚 La Trobe 大学学习考察,亲身经历了国外大学数学教育对学生能力、素质培养的实践,国外大学特别重视数学思想的熏陶和数学知识的应用,可喜的是本套教材在“做中学、学中悟、悟中醒、醒中行”方面做了有益的尝试。

教材中涉及的教学演示实验可在“天津市大学数学精品资源网”下载,也可与作者联系获取,电子邮箱是:yuyil88@126.com。

天津市教育委员会高教处的领导对本项目的研究给予了热心的指导和资助,在他们的关心和支持下,教学改革得以深化,教学资源得以共研、共建、共享、共赢。全国高等学校教学研究中心、高等教育出版社的同志对本书的出版给予了热情的支持。在此,我们一并致以最诚挚的感谢。

天津商业大学理学院统计系长期从事概率统计课程教学建设的老师们在项目的教学研讨和实践中付出了辛勤劳动,其中魏家林、张凤宽、王玉津、滕树军、李顺芹、杨随根和马丽娜老师还为本书的习题配备了答案,正是由于他们的积极支持和鼓励才使我们以充沛的精力高标准地完成了本书的编著工作。在此,我们也致以最诚挚的谢意。

我们期盼本套教材能为广大读者带来学数学的轻松、做数学的快乐和用数学的效益。同时,热情欢迎广大读者提出批评与建议,让我们共同为持续提高数学课程的教学质量、发挥数学课程在高素质人才培养中的作用而不懈努力。

编著者

2010.3.18

目　　录

第1章　随机事件及其概率

对引人注目的有关偶然性世界的研究才仅仅是一个开始. 对发生种种奇异并具无限潜力的这个世界,到目前为止科学研究才仅仅掠过其表皮. 但是,对偶然性这个无价之宝的发掘已经开始. 现在还无法说是什么样的财富将被开发出来,然而有一点是确认的:我们将不得不习惯于思考偶然性,不是作为使人恼火的障碍物,也不是作为一种"对现象的非本质的附加物",而是作为一种不能预知的具有最大胆的想像的有无限可能的源泉来加以认识.

偶然性是研究无序中的有序,没有偶然性,进化和改良都是不可能的.

不确定性知识 + 所含不确定性量度的知识 = 可用的知识.

我们生活在一个日新月异、千变万化的世界中,每个人时时刻刻都要面对许多自己生活中碰到的不确定性问题. 例如:"周末是晴天还是阴天,是否可以出去旅游";"明天的股市是上涨还是下跌,是买还是卖";"下个月某空调器的销售量是多少,如何组织货源";"今年夏季长江流域的降水量有多少,怎样组织抗洪";"在下届奥运会中我国体育健儿能拿多少金牌,如何争取金牌总数第一"等等. 这些问题的发生与发展是受诸多方面的因素的影响,因而这些问题的结果也是不确定的,不可预知的. 但是,事实证明在许多不确定问题中隐藏着一种确定性的规律. 也正因为如此,人类才在不断摸索和研究中使许多以前认为不可想像的问题得到解决,人类才取得了如此辉煌的进步.

本章的目的就是从最基本的问题出发,引出随机事件的概念,试图从最简单的随机现象(偶然现象)中去探求必然的规律.

学习本章后,你将知道什么是随机事件,理解事件之间的关系与运算,什么是随机事件的概率,理解概率的基本性质,掌握计算概率的若干公式与方法.

第1.1节　随机事件

我们先做一个简单的试验:掷一颗质地均匀的骰子,观察出现的点数.

投掷骰子教学演示实验

显然,这个试验具有如下特点:

(1) 在相同的条件下可以重复进行;

(2) 每次试验的可能结果不止一个(出现 1 点,出现 2 点,…,出现 6 点),而究竟出现哪个结果,在试验之前不能确知;

(3) 试验之前可以预知试验中一切可能的结果(六种结果),每次试验中出现且只出现可能结果中的一个.

我们把具有上述三个特点的试验称为**随机试验(random experiment)**,简称**试验(experiment)**,记为 E. 本书中所谈的试验,均为随机试验. 我们就是研究随机试验中这些可能结果出现的规律.

停下来想一想

把你在现实生活中所遇到的随机试验,请列举一些.

试验中的每个可能的结果称为**样本点(sample)**,用 ω 表示,全体样本点构成的集合称为**样本空间(sample space)**,用 Ω 表示. 从集合论的观点看,样本空间就是针对某试验的所有可能结果构成的全集,而样本点就是构成样本空间的元素. 样本空间 Ω 的子集称为**随机事件(random event)**,简称**事件(event)**,一般用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示. 我们称一事件在一次试验中出现(或发生)了,是指该次试验出现的结果(样本点)属于该事件(子集),否则称该事件没有出现(或发生). 易见 Ω 在每次试验中均要出现,故又称为**必然事件(certainty)**. $\varnothing$ 在每次试验中均不出现,故又称为**不可能事件(impossible event)**.

在上面掷骰子的试验中,我们设 ω_i 代表出现的点数为 i ($i=1,2,\cdots,6$),则 ω_i 为样本点. 且记 A_i = "出现的点数 i"; B = "出现的点数是 2 或者 3"; C = "出现的点数大于 1 小于 5"; D = "出现的点数是偶数". 则样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$; $A_i=\{\omega_i\}$; $B=\{\omega_2,\omega_3\}$; $C=\{\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$; $D=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$. 显然 A_i ($i=1,2,\cdots,6$), B,C,D 均为事件. 而事件"出现的点数小于 7"是必定要出现的,它就是一个必然事件. 实际上它包括了所有的样本点,即为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$. 而事件"出现的点数大于 6"是不可能出现的,它就是一个不可能事件. 实际上它不包含任何样本点,即为一个空集 $\varnothing$.

停下来想一想

试举一个试验,并表述样本点、样本空间、事件、必然事件和不可能事件.

由随机事件和集合之间的关系,可得到如下结论:

(1) $A\subset B$: A 是 B 的子集. 它表示若事件 A 出现则事件 B 一定出现,称 A 是 B 的子事件.

(2) $A\cup B$(或 $A+B$)：A 与 B 的并(或和). 它表示一个新的事件，即事件 A 和事件 B 至少有一个出现. 同样事件 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 表示 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 这 n 个事件至少有一个出现.

(3) $A\cap B$(或 AB)：A 与 B 的交(积). 它表示一个新的事件，即事件 A 和事件 B 同时出现. 同样事件 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 表示 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 这 n 个事件同时出现.

(4) $A\cap B=\varnothing$：A 与 B 无公共元素. 它表示事件 A 和事件 B 不可能同时出现，我们称 A 与 B 为**互不相容**，简称**互斥**(**mutually exclusive events**).

(5) $A\cap B=\varnothing$ 且 $A\cup B=\Omega$：A 与 B 无公共元素且 A 与 B 的和正好是全集. 它表示事件 A 和事件 B 出现且只出现其中一个，我们称 A 与 B 为相互对立，并称 B 为 A(或 A 为 B)的**对立事件**(**complementary event**)，记为 $B=\overline{A}$(或 $A=\overline{B}$).

(6) $A-B$：A 与 B 的差. 它表示事件 A 出现而事件 B 不出现. 显然 $A-B=A-AB=A\overline{B}$，同时 $B-A=B-BA=B\overline{A}$.

(7) $\overline{A\cup B}$：它是事件 A 和事件 B 至少出现一个的对立事件. 显然它表示事件 A 和事件 B 都不出现，即 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$. 同样 $\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}$.

(8) $\overline{A\cap B}$：它是事件 A 和事件 B 同时出现的对立事件. 显然它表示事件 A 和事件 B 至少有一个不出现，即 $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$. 同样 $\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}$.

以上(7)，(8)两条常被称为“对偶算律”.

停下来想一想

对于一个试验，根据事件与集合的对应关系，可以概括一句话：事件的关系、运算与集合的关系、运算完全一致，只是表述上的区别而已！

下面我们用图形(图 1.1.1)将上面的结论直观地显示一下：

从上面的图示中，还可以得到以下一些关系：

$A\cap B\subset A$；$A-B\subset A$，且 $A-B=A-AB=A\overline{B}$，$AB\subset A$；$A\overline{B}$，$\overline{A}B$ 与 AB 两两互斥，$A=A\overline{B}\cup AB$，$A\cup B=A\overline{B}\cup B\overline{A}\cup AB=A\overline{B}\cup B=B\overline{A}\cup A=A\cup(B-A)$；$\overline{A\cap B}\neq\overline{A}\cap\overline{B}$；$\overline{A\cup B}\neq\overline{A}\cup\overline{B}$，…

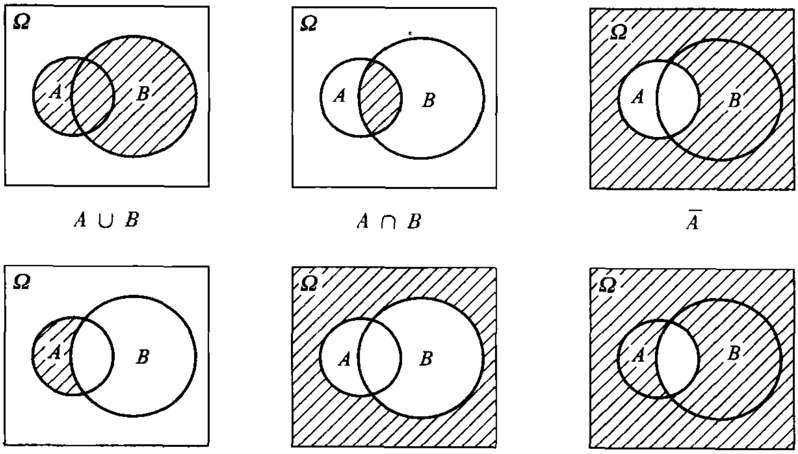
结合前面的试验以及样本点 ω_i ($i=1,2,\cdots,6$)，B,C,D 表示的意义，我们有

$B\subset C$；　　$C\cup D=\{\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_6\}$；

$C\cap D=\{\omega_2,\omega_4\}$；　　$\overline{B}=\{\omega_1,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$；

$\overline{C\cup D}=\{\omega_1,\omega_5\}$；　　$\overline{C\cap D}=\{\omega_1,\omega_3,\omega_5,\omega_6\}$；

$C - D = \{\omega_3\}$；　　　　$D - C = \{\omega_6\}$



$A \cup B$　　　　$A \cap B$　　　　$\overline{A}$

$A - B(A \cap \overline{B})$　　　　$\overline{A \cup B}(\overline{A} \cap \overline{B})$　　　　$\overline{A \cap B}(\overline{A} \cup \overline{B})$

图 1.1.1

读者还可以验证其他的一些等式或不等式.

有了上面一些表示法,对我们今后处理某些复杂事件时会带来很大方便.

习题 1.1(A)

1. 将一枚均匀的硬币抛两次,事件 A,B,C 分别表示"第一次出现正面","两次出现同一面","至少有一次出现正面". 试写出样本空间及事件 A,B,C 中的样本点.

2. 在掷两颗骰子的试验中,事件 A,B,C,D 分别表示"点数之和为偶数","点数之和小于5","点数相等","至少有一颗骰子的点数为 3". 试写出样本空间及事件 $AB,A+B,\overline{A}C,BC,A-B-C-D$ 中的样本点.

3. 以 A,B,C 分别表示某城市居民订阅日报、晚报和体育报. 试用 A,B,C 表示以下事件:

(1) 只订阅日报;　　　(2) 只订日报和晚报;

(3) 只订一种报;　　　(4) 正好订两种报;

(5) 至少订阅一种报;　　(6) 不订阅任何报;

(7) 至多订阅一种报;　　(8) 三种报纸都订阅;

(9) 三种报纸不全订阅.

4. 甲、乙、丙三人各射击一次,事件 A_1,A_2,A_3 分别表示甲、乙、丙射中. 试说明下列事件所表示的结果: $\overline{A}_2$, A_2+A_3, $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1+A_2}$, $A_1A_2\overline{A}_3$, $A_1A_2+A_2A_3+A_1A_3$.

5. 设事件 A,B,C 满足 $ABC \neq \varnothing$, 试把下列事件表示为一些互不相容的事件的和: $A+B+C$, $AB+C$, $B-AC$.

6. 若事件 A,B,C 满足 $A+C=B+C$, 试问 $A=B$ 是否成立? 举例说明.

习题 1.1(B)

1. 设 A,B,C 为三事件,试表示下列事件:

(1) A,B,C 都发生或都不发生;

(2) A,B,C 中不多于两个发生;

(3) A,B,C 中至少有两个发生.

2. 请指出以下事件 A 与 B 的关系:

(1) 检查两件产品,记事件 A = “至少有一件不合格品”, B = “两件检查结果不同”;

(2) 设 T 表示轴承寿命(单位:小时),记事件 $A = \{T > 5\,000\}$, $B = \{T > 8\,000\}$.

3. 对于事件 A,B,C, 试问 $A-(B-C)=(A-B)+C$ 是否成立? 举例说明.

4. 请叙述下列事件的对立事件:

(1) A = “掷两枚硬币,皆为正面”;

(2) B = “射击三次,皆命中目标”;

(3) C = “加工四个零件,至少有一个合格品”.

第 1.2 节　事件的概率

在上一节,我们给出了试验、样本点、样本空间、事件等基本概念,以及研究了事件的关系和运算. 本节我们要讨论给定事件在试验中出现(或发生)的可能性大小,用来描述这个可能性大小的数量,我们称之为事件的概率. 一般记事件 A 的概率为 $P(A)$.

下面再回到原来的试验:掷一颗质地均匀的骰子,观察出现的点数.

显然,这个试验具有两个特点:

(1) 所有可能的试验结果是有限个(有限性);

(2) 每个可能结果在一次试验中出现的可能性相同(等可能性).

我们把具有这两个特点的试验称为**古典概型(classical probability)**.

我们知道在每次试验中,出现且只出现样本空间中的一个样本点. 所谓事件 A 出现,就是指试验出现事件 A 中包含的样本点. 因此,在古典概型中由于样本点出现的等可能性,事件 A 出现的可能性大小就可以用事件 A 中包含的样本点的个数占样本点总数的比例来度量.

定义 1.2.1 (事件概率的**古典定义**)　在古典概型中,设样本空间 Ω 中包含有 n 个样本点,则对任意事件 A,若 A 中含有 k 个样本点,那么事件 A 的概率 $P(A)$ 定义为

$$P(A)=\frac{\text{事件 } A \text{ 中包含的样本点数}}{\text{样本空间 } \Omega \text{ 中样本点总数}}=\frac{k}{n}$$

在掷骰子的试验中,显然有

$$P(A_i)=\frac{1}{6},\quad i=1,2,3,4,5,6\,;\qquad P(B)=\frac{2}{6}\,;$$

$$P(C)=\frac{3}{6}\,;\qquad P(D)=\frac{3}{6}\,;\qquad P(C\cup D)=\frac{4}{6}\,;$$

$$P(C\cap D)=\frac{2}{6};\quad P(\overline{B})=\frac{4}{6};\quad P(\Omega)=\frac{6}{6}=1;$$

$$P(\varnothing)=\frac{0}{6}=0$$

在计算古典概型概率中，往往要用到初等数学中排列与组合的知识.

例 1.2.1　箱中装有 10 件产品，其中 1 件是次品，在 9 件合格品中有 6 件是一等品，3 件二等品. 现从箱中任取 3 件，试求：

(1) 取得 3 件产品都是一等品的概率；

(2) 取得 3 件产品中有 1 件是一等品，2 件是二等品的概率；

(3) 取得 3 件产品中至少有 2 件是一等品的概率.

解　由于试验是从 10 件产品中任取 3 件(检查其质量)，每取出 3 件产品就是一个样本点(试验结果)，每个样本点就是从 10 件中任取 3 件产品构成的集合，与顺序无关，故样本空间中样本点的总数为 C_{10}^3(满足有限性)，而每件产品被取到的机会是相同的，那么每个样本点出现的机会也是相同的(满足等可能性)，所以这个试验是个古典概型.

(1) 设 A =“取得 3 件产品都是一等品”，那么 A 中的样本点个数为 C_6^3，所以

$$P(A)=\frac{C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{6}$$

(2) 设 B =“取得 3 件产品中有 1 件是一等品，2 件是二等品”，那么 B 中的样本点个数为 $C_6^1C_3^2$ (这里用到了乘法原理)，所以

$$P(B)=\frac{C_6^1C_3^2}{C_{10}^3}=\frac{3}{20}$$

(3) 设 C =“取得 3 件产品中至少有 2 件是一等品”，那么事件 C 显然是由“有 2 件一等品，1 件非一等品”和“3 件都是一等品”两个事件构成，所以 C 中的样本点个数为 $C_6^2C_4^1+C_6^3$ (这里又用到了加法原理)，那么

$$P(C)=\frac{C_6^2C_4^1+C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{2}{3}$$

停下来想一想

① 在 $P(C)=\dfrac{C_6^2C_4^1+C_6^3}{C_{10}^3}=\dfrac{2}{3}$ 计算中，分子为什么不是 $C_6^2C_3^1+C_6^3$ 或 $C_6^2C_1^1+C_6^3$？可以是 $C_6^2C_3^1+C_6^2C_1^1+C_6^3$ 吗？

② $P(C)=1-P(\overline{C})=1-\dfrac{C_4^3+C_6^1C_4^2}{C_{10}^3}$ 正确吗？