

G A O D E N G S H U X U E



面向 21 世纪普通高等教育规划教材

(理工类)

高等数学 上册

主 编 杨海涛 副主编 王家宝 邹立夫 蔡文荣 主 审 韩 明

第 2 版



同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

面向 21 世纪普通高等教育规划教材

高等数学

(理工类) 上册 (第 2 版)

主 编 杨海涛

副主编 王家宝 邹立夫 蔡文荣

编 写 (以编写内容为序)

李克华 胡航宇 吴俊义

邹立夫 温 倩 任 彦

李 林

主 审 韩 明



同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书是在贯彻落实教育部“高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”要求精神和第 1 版的基础上,按照国家非数学类专业数学基础课程教学指导委员会最新提出的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”,并结合当前大多数本科院校学生基础和教学特点进行编写的.全书分上下两册.上册分四章,内容包括函数、极限与连续,一元函数微分学,一元函数积分学,向量代数与空间解析几何;附录包括二阶和三阶行列式简介,常用曲线方程与图像,积分表,数学建模,数学实验.下册分四章,内容包括多元函数微分学、积分学,无穷级数和微分方程,附录包括数学建模与数学实验.每册书后附有习题答案与提示.

本书知识系统、体系结构清晰、详略得当、例题丰富、语言通俗、讲解透彻、难度适中.适合作为普通高等院校工科类、理科类(非数学专业)高等数学课程的教材使用,也可供成教学院或申请升本的专科院校选用为教材,也可供相关专业人员和广大教师参考.

与本教材同步出版的《高等数学学习指导(理工类)(第 2 版)》是教材内容的补充、延伸、拓展和深入,对教学中的疑难问题和授课中不易展开的问题以及诸多典型题目进行了详细探讨,对教师备课、授课和学生学习、复习以及巩固本教材的教学效果大有裨益,亦可作为本教材配套的习题课参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学:理工类.上册/杨海涛主编.--2 版.--上海:
同济大学出版社,2010.6
面向 21 世纪普通高等教育规划教材
ISBN 978-7-5608-4303-2

I. ①高… II. ①杨… III. ①高等数学—高等学校—教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 073098 号

面向 21 世纪普通高等教育规划教材

高等数学(理工类)上册(第 2 版)

主 编 杨海涛

副主编 王家宝 邹立夫 蔡文荣

主 审 韩 明

责任编辑 曹 建 责任校对 徐春莲 封面设计 潘向葵

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn

(地址:上海市四平路 1239 号 邮编:200092 电话:021-65985622)

经 销 全国各地新华书店

印 刷 同济大学印刷厂

开 本 787mm×960mm 1/16

印 张 18.5

印 数 1—5 100

字 数 370 000

版 次 2010 年 6 月第 2 版 2010 年 6 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5608-4303-2

定 价 28.00 元

本书若有印装质量问题,请向本社发行部调换 版权所有 侵权必究

新世纪高级应用型人才培养系列 面向 21 世纪普通高等教育规划教材

总编委会

名誉主任	吴启迪			
主任	李国强			
副主任	陈纪阳	黄红武	陈文哲	赵麟斌
编委	朱文章	王家宝	韩明	杨海涛
	邱淦倬	王昆仑	林大华	黄玉笙
	唐晓文	戴立辉	赵利彬	林孔容
	邱育锋	姜景莲	邹立夫	蔡文荣
	李克典	郑书富	刘墨德	张纪平
	李林	陈安全		
总策划	郭超			

前 言

本教材自 2007 年出版以来,由于在取材、体系、讲法、可读性等方面较为切合当前多数普通本科院校及新建本科院校的改革形势和教学实际,而被国内多所院校采用,深受广大使用院校师生的欢迎,得到了广大读者的肯定,已连续 4 次印刷,上、下册累计发行 4 万余册.2008 年被中国书刊发行业协会评为“全行业优秀畅销品种”,2009 年在华东地区大学出版社优秀教材、学术专著评比中,获得华东地区大学出版社优秀教材、学术专著二等奖.

几年来,许多专家、学者和广大师生对本教材提出了许多有益的建议,对教材给出了许多宝贵的改进意见,在此特向他们表示感谢!我们在使用教材的同时,也发现了不少需要改进与提高的地方,例如有些章节需要修改,需要增加新的内容,例题与习题需要加强,教材内容在由浅入深方面需要作进一步的精雕细刻,等等.为了使教材更好地反映现代教育思想,体现先进性、科学性与实用性,能够更加有利于提高学生的综合素质与创新能力,同时也为了更好地便利广大读者学习使用,我们进一步对国内外优秀的同类教材进行了比较研究,在保持第 1 版的优点、特色的基础上,按照最新“工科类本科数学基础课程教学基本要求”,结合专家和读者的修订建议及当前多数本科院校的学生基础和教学特点,对教学内容做了相应的调整和优化,并对语言叙述、文字与符号以及排版疏漏等方面做了修正.另外,还增加了相关变化率、微分形式不变性和求方程近似解的二分法与切线法等内容.

参加本教材第 2 版修订工作的教师有(按章节顺序):李克华、胡航宇、吴俊义、邹立夫、叶洪波、陈玉成、杨海涛、王家宝、吴润莘、李林.全书由杨海涛通稿、定稿.

虽说是第 2 版,但书中不当和疏漏之处在所难免.热忱希望专家、学者和广大读者提出宝贵意见.

杨海涛

2010 年 6 月

第 1 版前言

由于“高等数学”在各个领域都有广泛的应用,因而成为本科教学中重要的基础课程之一.为了适应当前我国高等教育正经历从“精英型教育”向“大众化教育”的转变过程,满足大多数高等院校出现的新的教学形势、学生基础和教学特点,我们编写了这本高等数学教材.

本书在编写过程中认真贯彻落实教育部“高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”的要求精神,严格按照国家非数学类专业数学基础课程教学指导委员会最新提出的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”,同时参考了近几年来国内外出版的相关教材,并结合编者的教学实践经验以及当前多数本科院校学生基础和教学特点进行编写.

全书以通俗的语言,较系统地介绍了高等数学的知识.全书分上下两册.上册分四章,内容包括函数、极限与连续,一元函数微分学,一元函数积分学,向量代数与空间解析几何.上册附录包括二阶和三阶行列式简介,常用曲线图像,积分表,数学建模与数学实验.下册分四章,内容包括多元函数微分学,多元函数积分学,无穷级数和微分方程.下册附录包括数学建模与数学实验.每册书后附有习题答案与提示.

本书在编写中有以下几点考虑:

(1) 本书内容覆盖面较广,教师可根据不同专业要求的教学时数适当取舍.讲完全书(包括习题课)约需 192 学时,删去加“*”号的部分约需 176 学时,再降低部分较难理论的证明约需 152 学时,再对第 6,7,8 章作适当删减可供 112 学时或 96 学时的课程选用;

(2) 为培养学生应用意识和实践能力,编排了一定数量的应用题,并在上下册分别安排了与教学内容相应的数学建模与数学实验,教师可根据情况另外安排 8~16 学时的实践课;

(3) 本书编写重在基本概念、基本理论和基本方法的介绍,知识面较广,但对深入的理论和技巧不作要求;

(4) 本书在编写中,根据知识的特点,有的内容是以介绍的方式编写,有的内容是以探讨与研究的方式编写,目的在于培养学生的数学思维和分析解决问题的能力;

(5) 适当渗透现代数学思想.

本书知识系统、体系结构清晰、详略得当、例题丰富、语言通俗、讲解透彻、难度

适中,适合作为普通高等院校工科类、理科类(非数学专业)高等数学课程的教材使用,也可供成教学院或申请升本的专科院校选用为教材,也可供相关专业人员和广大教师参考.

与本教材同步出版的《高等数学学习指导(理工类)》是教材内容的补充、延伸、拓展和深入,对教学中的疑难问题和授课中不易展开的问题以及诸多典型题目进行了详细探讨,对教师备课、授课和学生学习、复习以及巩固本教材的教学效果大有裨益,亦可作为本教材配套的习题课参考书.

本书由杨海涛主编,王家宝、邹立夫、蔡文荣副主编.参加编写的人员有(按编写教材内容顺序):李克华、胡航宇、吴俊义、邹立夫、温倩、任彦、李林、叶洪波、陈玉成、杨海涛、王家宝、吴润莘和蔡文荣.全书由杨海涛统稿、定稿.

在本书的编写过程中,参考了书后所列参考文献.作者在此对这些参考书的作者表示感谢.

感谢韩明教授.他在审阅中提出了一些宝贵而又中肯的建议,使本书避免了一些错误和不当之处的发生.

在本书的编写和出版过程中,得到各作者单位领导和有关专家的关心与大力支持,在此一并表示衷心的感谢!

由于时间仓促,加之我们对教材内容体系改革的研究还处于尝试阶段,虽然我们已尽努力,但书中一定还有不少不尽人意之处,热忱希望专家、教师和读者提出宝贵意见.

杨海涛

2007年6月

目 次

前 言

第 1 版前言

第 1 章 函数、极限与连续	(1)
1.1 函 数	(1)
1.1.1 函数的概念	(1)
1.1.2 函数的一些性质	(7)
1.1.3 初等函数	(10)
习题 1.1	(12)
1.2 极 限	(14)
1.2.1 数列的极限	(14)
1.2.2 函数的极限	(19)
1.2.3 无穷小量与无穷大量	(24)
1.2.4 极限运算法则	(26)
1.2.5 极限存在准则 两个重要极限	(28)
1.2.6 无穷小量的比较	(32)
习题 1.2	(34)
1.3 连 续	(36)
1.3.1 函数的连续性与间断点	(36)
1.3.2 连续函数的性质	(39)
习题 1.3	(42)
复习题 1	(43)
第 2 章 一元函数微分学	(45)
2.1 导数与求导法则	(45)
2.1.1 导数的概念	(45)
2.1.2 求导法则	(54)
习题 2.1	(67)
2.2 函数的微分	(69)
2.2.1 微分的概念	(69)
2.2.2 微分的应用	(73)
习题 2.2	(75)

2.3 中值定理及其应用	(76)
2.3.1 中值定理	(76)
2.3.2 洛必达法则	(83)
2.3.3 泰勒公式	(87)
习题 2.3	(90)
2.4 导数的应用	(91)
2.4.1 函数单调性与极值的判别	(91)
2.4.2 曲线的凸凹性、拐点与渐近线	(98)
2.4.3 函数图形的描绘	(102)
2.4.4 曲率	(105)
2.4.5 方程的近似解	(107)
习题 2.4	(109)
复习题 2	(109)
第 3 章 一元函数积分学	(112)
3.1 不定积分	(112)
3.1.1 不定积分的概念与性质	(112)
3.1.2 换元积分法和分部积分法	(117)
3.1.3 几种特殊类型函数的积分	(132)
习题 3.1	(136)
3.2 定积分	(138)
3.2.1 定积分的概念与性质	(138)
3.2.2 微积分基本公式	(147)
3.2.3 定积分的换元法和分部积分法	(151)
3.2.4 定积分的应用	(156)
习题 3.2	(165)
3.3 广义积分	(167)
3.3.1 广义积分的定义	(167)
3.3.2 广义积分的审敛法 Γ 函数	(174)
习题 3.3	(178)
复习题 3	(179)
第 4 章 向量代数与空间解析几何	(181)
4.1 向量代数	(181)
4.1.1 向量及其线性运算	(181)
4.1.2 空间直角坐标系与向量的坐标表示法	(184)
4.1.3 数量积与向量积	(189)

习题 4.1	(193)
4.2 空间解析几何	(195)
4.2.1 空间曲面及其方程	(195)
4.2.2 空间曲线及其方程	(204)
4.2.3 二次曲面	(210)
习题 4.2	(214)
复习题 4	(216)
附 录	(218)
附录 A 二阶和三阶行列式简介	(218)
附录 B 常用曲线方程与图像	(219)
附录 C 积分表	(221)
附录 D 数学建模	(228)
附录 E 数学实验	(245)
参考答案	(270)
参考文献	(283)

第 1 章 函数、极限与连续

函数是数学的基本概念之一,是高等数学的主要研究对象.极限概念是高等数学的理论基础.连续性是函数的基本性态之一.本章介绍函数、极限和函数连续性等基本概念以及它们的基本性质.

1.1 函 数

1.1.1 函数的概念

1. 集 合

(1) 集合的概念

集合是数学中的一个基本概念.所谓集合(简称集)是指具有某种特定性质的事物的总体.例如,一个书柜中的书构成一个集合,全体实数构成一个集合等.集合通常用大写拉丁字母 $A, B, C, \dots$ 表示;组成集合的每一个事物称为该集合的元素(简称元),通常用小写的拉丁字母 $a, b, c, \dots$ 表示.

如果 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于 A ,记作 $a \in A$;否则,就说 a 不属于 A ,记作 $a \notin A$.一个集合,若它只含有有限个元素,则称为有限集;不是有限集的集合称为无限集.

表示集合的方法通常有两种:一种是列举法,就是把集合的全体元素一一列举出来表示.例如,由元素 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 组成的集合 A 可以表示成

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\};$$

另一种是描述法,若集合 M 是由具有某种性质 P 的元素 x 的全体组成,就可以表示成

$$M = \{x \mid x \text{ 具有性质 } P\}.$$

例如,集合 B 是不等式 $x^2 > 1$ 的解集,就可以表示成

$$B = \{x \mid x^2 > 1\}.$$

对于数集,有时我们在表示数集的字母的右上角标上“ $*$ ”来表示该数集内排除 0 的集,标上“ $+$ ”来表示该数集内排除 0 和负数的集.

习惯上,全体非负整数即自然数的集合记作 $\mathbf{N}$,即

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\};$$

全体正整数的集合为

$$\mathbf{N}^+ = \{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\};$$

全体整数的集合为

$$\mathbf{Z} = \{\cdots, -n, \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\};$$

全体非零整数的集合为

$$\mathbf{Z}^* = \{\cdots, -n, \cdots, -2, -1, 1, 2, \cdots, n, \cdots\};$$

全体有理数的集合为

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}^+ \text{ 且 } p \text{ 与 } q \text{ 互质} \right\};$$

全体实数的集合记作 $\mathbf{R}$.

设 A, B 是两个集合, 若集合 A 的元素都是集合 B 的元素, 则称集合 A 是集合 B 的**子集**, 记作 $A \subset B$ (读作 A 包含于 B) 或 $B \supset A$ (读作 B 包含 A).

如果集合 A 与集合 B 互为子集, 即 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 则称集合 A 与集合 B 相等, 记作 $A = B$.

若 $A \subset B$ 且 $A \neq B$, 则称 A 是 B 的**真子集**, 记作 $A \subsetneq B$. 例如, $\mathbf{N} \subsetneq \mathbf{Z} \subsetneq \mathbf{Q} \subsetneq \mathbf{R}$.

不含任何元素的集合称为**空集**, 记作 $\emptyset$. 我们规定空集 $\emptyset$ 是任何集合 A 的子集, 即 $\emptyset \subset A$.

(2) 集合的运算

集合的基本运算有四种: 交、并、差、补.

设 A, B 是两个集合, 由所有属于 A 或属于 B 的元素组成的集合, 称为 A 与 B 的**并集** (简称**并**), 记作 $A \cup B$, 即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\};$$

由所有既属于 A 且属于 B 的元素组成的集合, 称为 A 与 B 的**交集** (简称**交**), 记作 $A \cap B$, 即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\};$$

由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合, 称为 A 与 B 的**差集** (简称**差**), 记作 $A \setminus B$, 即

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}.$$

有时,我们研究问题限定在一个大的集合 I 中进行,所研究的其他集合 A 都是 I 的子集.此时,集合 I 称为**全集或基本集**. $I \setminus A$ 称为 A 的**余集或补集**,记作 A^c .例如,在实数集 $\mathbf{R}$ 中,集合 $A = \{x \mid x \geq 1\}$ 的余集是

$$A^c = \{x \mid x < 1\}.$$

集合的并、交、余运算满足下列法则.

设 A, B, C 为任意三个集合,则有下列法则成立:

- ① 交换律. $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$.
- ② 结合律. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
- ③ 分配律. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$
 $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
- ④ 对偶律. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

以上这些法则都可以根据集合相等的定义进行验证.(请读者自证.)

还可以定义两个集合的**直积或笛卡儿(Descartes)乘积**.设 A, B 是任意两个集合,称集合

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ 且 } y \in B\}$$

为集合 A 与 B 的**直积**.例如, $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$ 即为 xOy 平面, $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ 也记作 $\mathbf{R}^2$.

(3) 区间和邻域

区间是一类常见的数集.设 a 和 b 都是实数,且 $a < b$.数集

$$\{x \mid a < x < b\}$$

称为**开区间**,记作 (a, b) ,即

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}.$$

数集

$$\{x \mid a \leq x \leq b\}$$

称为**闭区间**,记作 $[a, b]$,即

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}.$$

类似地,数集

$$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\},$$

$$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$$

称为**半开区间或半闭区间**.

以上这些都是有限区间,此外还有所谓无限区间.例如

$$[a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\}, \quad (-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\}, \quad \mathbf{R} = (-\infty, +\infty).$$

邻域也是一类常见的数集.以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的邻域,记作 $U(a)$.

设 δ 是任一正数,则开区间 $(a - \delta, a + \delta)$ 就是点 a 的一个邻域,这个邻域称为点 a 的 δ 邻域,记作 $U(a, \delta)$,即

$$U(a, \delta) = \{x \mid a - \delta < x < a + \delta\},$$

点 a 称为邻域的中心, δ 称为邻域的半径.

类似地,数集

$$\overset{\circ}{U}(a, \delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}$$

称为点 a 的去心 δ 邻域.开区间 $(a - \delta, a)$ 称为点 a 的左 δ 邻域,开区间 $(a, a + \delta)$ 称为点 a 的右 δ 邻域.

2. 映 射

(1) 映射的概念

定义 1.1.1 设 X, Y 是两个非空集合,若存在一个法则 f ,使得对 X 中每一个元素 x ,按法则 f ,在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应,则称 f 为从 X 到 Y 的映射,记作

$$f: X \rightarrow Y.$$

其中, y 称为元素 x (在映射 f 下) 的像,记作 $f(x)$,即

$$y = f(x).$$

而 x 称为元素 y (在映射 f 下) 的一个原像;集合 X 称为映射 f 的定义域,记作 D_f ,即 $D_f = X$; X 中所有元素的像组成的集合称为映射 f 的值域,记作 R_f 或 $f(X)$,即

$$R_f = f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}.$$

设 f 是从集合 X 到集合 Y 的映射,若 $R_f = Y$,则称 f 为 X 到 Y 上的映射或满射;若对 X 中任意两个不同元素 $x_1 \neq x_2$,它们的像满足 $f(x_1) \neq f(x_2)$,则称 f 为 X 到 Y 的单射;若映射 f 既是单射又是满射,则称 f 为一一映射(或双射).

(2) 逆映射与复合映射

设 f 是从 X 到 Y 的单射,则由定义,对每个 $y \in R_f$ 有唯一的 $x \in X$,满足 $f(x) = y$. 于是,我们可以定义一个新映射

$$f^{-1}:R_f \rightarrow X,$$

对每一个 $y \in R_f$, 规定 $f^{-1}(y) = x$, 其中 x 满足 $f(x) = y$. 映射 f^{-1} 称为 f 的逆映射, 其定义域为 $D_{f^{-1}} = R_f$, 值域为 $R_{f^{-1}} = X$.

设有两个映射

$$g: X \rightarrow Y_1, \quad f: Y_2 \rightarrow Y,$$

其中 $Y_1 \subseteq Y_2$, 则由映射 g 和 f 可以定义出一个从 X 到 Y 的映射

$$f \circ g: X \rightarrow Y, \quad (f \circ g)(x) = f[g(x)], \quad x \in X.$$

该映射 $f \circ g$ 称为映射 g 和 f 构成的复合映射.

由复合映射的定义可以看出, 映射 g 和 f 构成复合映射的条件是: g 的值域 R_g 必须包含在 f 的定义域 D_f 内, 即 $R_g \subseteq D_f$. 由此可知, 映射 g 和 f 的复合是有顺序的, $f \circ g$ 有意义并不表示 $g \circ f$ 也有意义. 即使 $f \circ g$ 与 $g \circ f$ 都有意义, 复合映射 $f \circ g$ 与 $g \circ f$ 也未必相同.

3. 函 数

定义 1.1.2 设 $D \subseteq \mathbf{R}$ 是一非空数集, 那么映射 $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ 称为定义在 D 上的函数, 通常简记为

$$y = f(x), \quad x \in D,$$

其中 x 称为自变量, y 称为因变量, 集合 D 称为函数的定义域, 记作 D_f , 即 $D_f = D$.

对于每个 $x \in D$, 按定义有唯一确定的 y 与之对应. 这个值称为函数 f 在 x 处的函数值, 记作 $f(x)$, 即 $y = f(x)$. 全体函数值的集合称为函数 f 的值域, 记作 R_f 或 $f(D)$, 即

$$R_f = f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}.$$

表示函数的记号是可以任意选取的, 除了常用的 f 外, 还可以用 $g, G, F, \varphi, h, \psi$ 等表示.

由函数的定义可知, 两个函数相等的充分必要条件是定义域及对应法则分别相同.

函数的定义域通常按以下两种方式确定: 对于有实际背景的函数, 其定义域根据实际背景中变量的实际意义确定; 对于用抽象算式表示的函数, 其定义域通常是使得该算式有意义的一切实数组成的集合.

在平面直角坐标系中, 让自变量在横轴上变化, 因变量在纵轴上变化, 则平面点集

$$\{(x, y) \mid y = f(x), x \in D_f\}$$

称为函数 $y = f(x)$, $x \in D$ 的图形,如图 1.1 所示.

以下是几个常见函数的例子.

例 1 函数

$$y = 2$$

的定义域 $D = \mathbf{R}$, 值域 $R_f = \{2\}$, 它的图形是一条平行于 x 轴的直线, 如图 1.2 所示.

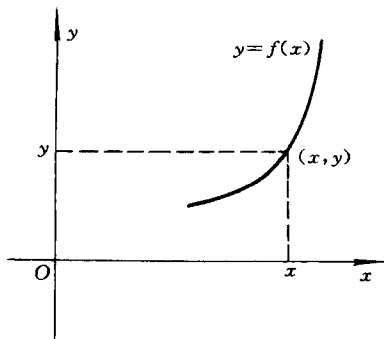


图 1.1

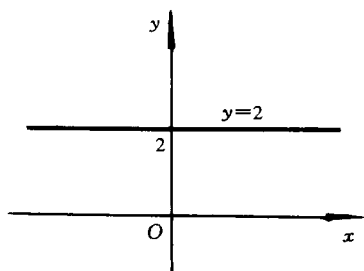


图 1.2

例 2 函数 $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ 称为绝对值函数, 定义域 $D = \mathbf{R}$, 值域 $R_f = [0, +\infty)$, 如图 1.3 所示.

例 3 函数 $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ 称为符号函数, 它的定义域 $D_f =$

$(-\infty, +\infty)$, 值域 $R_f = \{-1, 0, 1\}$, 其图形如图 1.4 所示. 对于任何实数 x , 下列关系成立:

$$x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|.$$

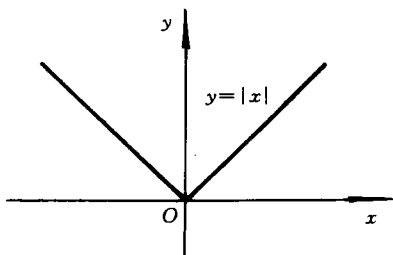


图 1.3

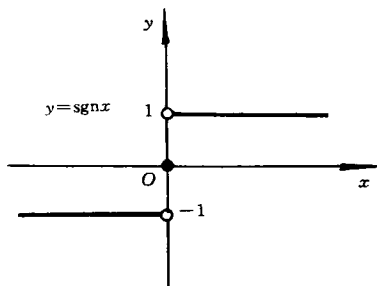


图 1.4

例 4 设 x 为任一实数. 不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分, 记作 $[x]$. 例如

$$\left[\frac{5}{7}\right] = 0, \quad [\sqrt{2}] = 1, \quad [\pi] = 3, \quad [-3.5] = -4, \quad [-2] = -2.$$

把 x 看成变量, 则函数

$$y = [x]$$

的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $R_f = \mathbf{Z}$. 其图形如图 1.5 所示.

例 5 函数 $y = \begin{cases} x+1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x-1, & x > 0 \end{cases}$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 的分段函数, 其图形

如图 1.6 所示.

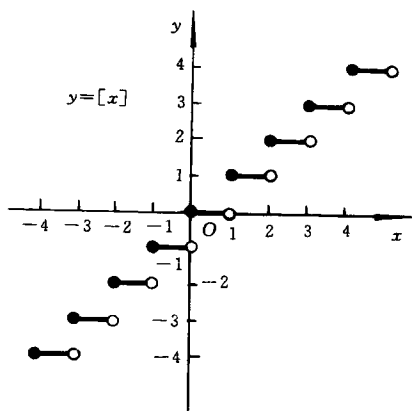


图 1.5

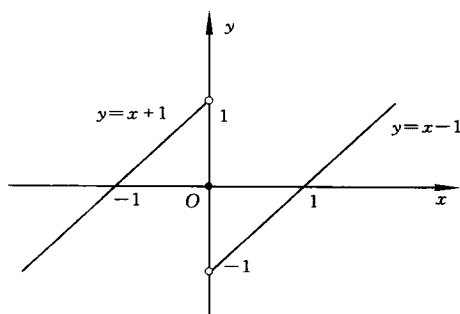


图 1.6

有些函数, 对于定义域内自变量 x 的不同取值, 不能用一个统一的数学表达式表示, 而要用两个或两个以上的式子表示, 这类函数称为分段函数. 如例 2, 例 3 和例 5.

1.1.2 函数的一些性质

1. 有界性

设函数 $f(x)$ 在数集 D 上有定义, 若存在正数 M , 使得对任何 $x \in D$, 都有

$$|f(x)| \leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界, 或称 $f(x)$ 是 D 上的有界函数. 每一个具有上述性质的正数 M , 都是函数 $f(x)$ 的界.