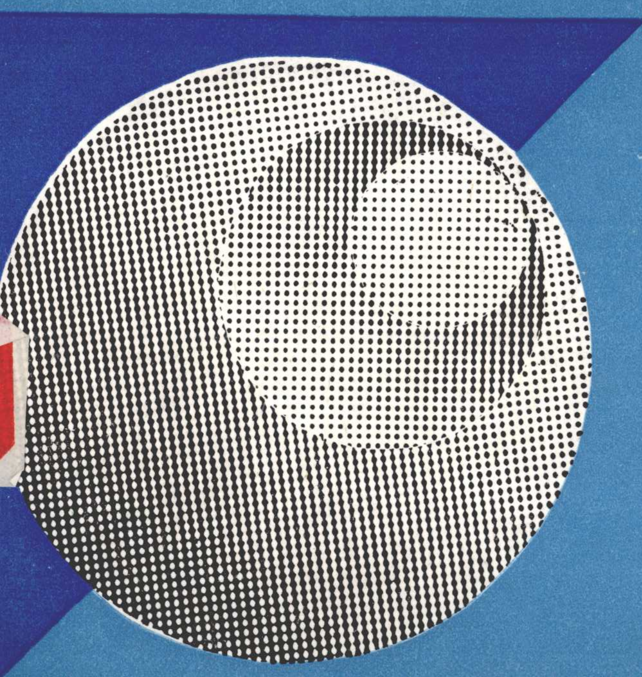
应用概率统计

上册

马逢时 何良材 余明书 范金城编



应用概率统计

上　册

马逢时　何良材
余明书　范金城　编

高等教育出版社

内容提要

本书是为工科院校硕士研究生及高年级本科生学习应用概率统计而编写的. 全书分上、下两册. 本书上册为第一篇，介绍数理统计基础，内容包括参数估计、假设检验、回归分析、方差分析及正交设计六章. 下册包括多元统计分析和时间序列分析两篇.

本书着重介绍各种数理统计方法，特别注意阐明各种方法的背景、应用条件及意义. 每种方法都有完整的实例，各章末都配有习题、书末附有答案.

本书可供工科院校研究生及高年级本科生作为教材，也可供工程技术人员参考.

应用概率统计

上　册

马逢时　何良材
余明书　范金城　编

高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
商务印书馆上海印刷厂印装

开本 850×1168　1/32　印张 10.75　字数 257,000
1989 年 10 月第 1 版　1989 年 10 月第 1 次印刷
印数 0001—7,000

ISBN 7-04-002312-1/O·789
定价　2.65 元

前　言

在新技术革命的冲击下，基础科学，应用科学都发生着巨大而深刻的变化．数理统计和应用概率已成为应用数学中最重要、最活跃的学科之一，它的应用越来越广泛深入，在国民经济和科学技术中的地位与作用越来越重要．因此，工科院校的师生，特别是工科硕士研究生应该具备有关应用概率统计的基本知识．1983 年 10 月全国部分工科院校概率统计教师在武汉召开了座谈会，大家一致认为目前迫切需要编写一本适合于工科研究生和高年级本科生用的应用概率统计教材．在全国工科院校应用概率统计委员会倡议下，一些院校协作编写了一本试用教材，并于 1984 年暑期铅印发行．后来，此教材被全国许多院校使用过，再经过编者多次修订补充，最后形成现在这本书．

本书可以作为工科研究生应用概率统计课的教材，也可以供工科院校教师、大学生、工科技术人员参考．

本书上册为第一篇，介绍数理统计基础知识，在六章中，分别讲述了数理统计基本概念、参数估计、假设检验、回归分析、方差分析和正交设计等最常用的各种数理统计概念与方法．下册包括两篇．第二篇为多元统计分析(第七章至第九章)，介绍了多元正态分布的参数估计和检验，判别分析和多元相关分析．第三篇为时间序列分析(第十章至第十二章)，在介绍了随机过程概念的基础上，讨论了对于时间序列在时域和频域上的分析方法．第二、三两篇是相互独立的，可根据各专业的需要选用．

本书着重介绍各种数理统计方法，特别注意阐明各种方法的背景、应用条件及结果的含义；给出必要的数学推导，但又不追求

其严密性及完整性；力求作到解释清晰，易于自学．各种方法都附有完整的实际例题，以便加深对方法的理解．每章后附有习题，书末给出了答案．

本书所用名词术话及重要符号都注意遵照全国统计方法应用标准化技术委员会的有关规定．例如，各种分位数符号一律只用下侧分位数而不用上侧分位数、双侧分位数，等等．读者使用本书时要注意这一点．

本书初稿的第一篇由马逢时（天津大学）、何良材（重庆大学）编写，第二篇由余明书（华中理工大学）编写，第三篇由范金城（西安交通大学）编写．在互审的基础上，由中国科学院应用数学所方开泰研究员、系统科学所冯士雍副研究员、北京大学谢衷洁教授进行了审阅，他们提出了不少修改意见．天津大学史道济同志也参加了部分编写及修改工作．试用教材84年铅印发行后，在余明书主持下于85年作了一次较大的修改、增补．本书审稿人华东师范大学吕乃刚教授仔细审阅了全部手稿，并提出了修改意见．在出版前，马逢时又全面地作了一次修改和补充．编者仅向所有协助本书出版的同志致衷心谢意．

虽然本书经多次试用和多次修改，但限于编者水平，一定仍有不少缺点错误，热情欢迎各位师生及读者批评指正．

编　者

1988年8月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

上 册 目 录

第一篇　数理统计学基础

第一章　数理统计学概论

数理统计学是应用数学的一个分支学科．它与概率论一样，是研究大量随机现象的统计规律的．数理统计以概率论的理论为基础，研究如何以有效的方式收集、整理和分析受到随机性影响的数据，以对所考察的问题作出推断和预测，直至为采取决策和行动提供依据和建议．这门学科在国民经济的各领域中有着越来越广泛的应用．

本章§1先介绍数理统计学的基本任务和主要内容；§2给出数理统计中的几个基本概念；§3则介绍有关抽样分布的内容，它是本书以后各章的基础．

§1　数理统计学的基本任务

概率论和数理统计都是研究大量随机现象统计规律性的数学学科．二者有密切联系，也有其不同的侧重点．概率论的特点是先从一个数学模型出发，比如已知随机变量的分布，然后去研究它的性质、特点和规律性；数理统计面对的则是观测随机现象所得到的数据，我们要利用这些资料来选择或检验数学模型，并对所考察的问题作出推断或预测．例如，概率论中可以假定随机变量 X 为正态 $N(a,\ \sigma^2)$ 分布，a、σ 皆已知，进而可以求出诸如“X 落入任意一指定区间内的概率”等等问题的解答．但如何根据 X 的一组观测值来判断出 X 的分布为正态呢？又如何确定其参数 a 及 σ^2 的值呢？这就是统计学所要研究的问题．

在实际工作中出现的数据，大多是受到各种随机性影响的，这里有很多问题需要解决．下面以一个例子为代表来说明统计学的各项任务．某工厂生产出大量的电视机显像管，如何考察显像管的寿命是多少？显然，各支显像管寿命是不全相同的．我们为了研究其规律，就要抽验一批，测其寿命，然后用这些数据来推断寿命的分布类型、有关参数的具体数值以及是否达到生产要求等等．这里有以下一些问题值得讨论．首先，如何来抽验呢？如果该产品原料有不同批号，工人有不同班组，在把管子抽成真空时，室温有不同的数值等等，那就应进行一番仔细的试验设计，并且要确定抽样方案以便使收集的数据能够具备更全面的代表性．这就是如何以有效的方式收集数据问题．其次，对这些数据如何进行整理与分析呢？通常，数据有一大堆，应当设法加以归纳整理，然后提取出有用的信息加以分析，以便对所关心的问题给出一些推断．由于观测只能是局部的，推断免不了会发生各种错误，那末，发生各种错误的概率有多大？怎样分析才能使推断发生错误的概率达到尽可能的小？这就是如何以有效的方式分析数据的问题．最后，分析出的结果如何在以后的实践中加以应用呢？比如，我们希望得知，再随机地任取一个显像管，它的寿命会落在什么范围内？如果对生产各要素按某指定值加以严格控制，其寿命值会怎样？如何选择各因素的最佳状态使寿命更长？等等．这些都是预测和控制的问题．

归纳起来，数理统计学的主要任务是，研究如何以有效的方式收集、整理和分析受到随机性影响的数据，以对所考察的问题作出推断和预测，直至为采取决策和行动提供依据和建议．

由于随机性影响无所不在，因而数理统计的应用十分广泛．在自然科学、社会科学、工程技术、军事科学、医药卫生和工农业生产中都常常要用到数理统计的理论与方法，而且有的甚至以该门学

科与数理统计的结合为其特征，例如水文统计学、生物统计学、社会统计学、教育统计学、计量经济学、心理测验学、工艺统计学、文献统计学等等．近二十年，由于电子计算机的发展与普及，数理统计的应用更加广泛深入了，各种使用方便的统计程序包（或程序库）的出现使得各行各业中只要具有基本统计思想的人都可以迅速掌握统计分析的各种工具来为自己的研究课题服务，得出各种有益的结论．数理统计正发挥着越来越大的作用．

数理统计是要靠抽验得到的数据来推断整体的情况，这就是统计推断．统计推断包含**参数估计**和**假设检验**两大方面内容，我们将在第二、三两章中分别加以讨论．应用统计推断的基本原理具体地处理线性模型中的问题，就得到**回归分析**和**方差分析**两种统计方法，我们将在第四、五两章中介绍．本篇最后一章（第六章）介绍怎样进行试验设计——正交设计，这是如何有效地获得数据的方法．当然，数理统计的内容十分丰富，本书只能介绍一些最基本的概念与方法．实际问题往往比较复杂，所以读者要特别注意学习分析和解决实际问题的统计思想与统计方法．数理统计学中还有不少内容，例如抽样理论、可靠性理论、统计决策理论以及质量控制方法等等，也都是很有用的，但限于篇幅，本书未作介绍．请读者参考有关的专门书籍和文献．

§2 数理统计中的几个基本概念

一 总体与样本

通常，我们把所研究的对象的全体称为**总体**，把每个研究的对象称为**个体**．例如，一批产品、一个学校中的全体学生等等都构成总体，其中每一件产品，每一个学生则是该总体中的个体．如果研究的问题不同，则总体也会不同．例如，研究某显像管厂本月份产品的质量问题和研究全年产品的质量问题，总体当然是不一样的．

为了研究总体的性质，我们按一定规则从总体中抽出了若干个个体，这些个体就称之为**样本**(或称**子样**)，样本中所含的个体数目称为**样本大小**(或**样本容量**)，样本中的每个个体称为样品.

上述说法只是较为粗糙的直观描述. 下面给出数学上的分析. 对总体来说，我们关心的并不是组成总体的各个个体本身，而主要是考察与它们相联系的某个特征以及这个特征的分布状况. 例如，研究显像管的质量，关心的是其寿命而不是显像管本身. 由于各显像管的寿命不全相同，我们不可能逐个地指出每个显像管的寿命，而只能了解全体显像管的寿命的分布状况. 由于任一个显像管的寿命事先是不能确定的，而每个显像管都确实对应着一个寿命值，所以我们可以认为显像管寿命是个随机变量，而我们关心的正是这个随机变量的概率分布. 一般说来，我们都可以认为所考察的总体是用一个随机变量来代表的，这样一来，我们就可以用精确的语言来描述了：**总体就是一个具有确定概率分布的随机变量，而一个个体则是随机变量的一次观测值**. 以后，我们可以说总体 $F(x)$ 或总体 X，其含义就是说，总体是一个以 $F(x)$ 为分布函数的随机变量 X. 当然，这个随机变量也可能是二维的，这时我们就可以说二维总体 $F(x, y)$，其含义就是说，总体是一个以 $F(x, y)$ 为分布函数的二维随机变(向)量 (X, Y). 本篇主要考虑一维总体.

在给总体以精确定义后，也就可以精确地描述样本了. 由于样本中所包含的每一个样品的取值都可以看成为一个随机变量，因此，样本大小为 n 的样本可以认为是一个 n 维随机向量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$. 为了使样本更具有代表性并且使计算尽量简化，我们很自然地提出下列两条要求. 一是要求每一个 X_i $(i=1, \cdots, n)$ 都与总体 X 有相同的分布 $F(x)$；二是各个 X_i 之间皆相互独立. 我们称满足这两条要求的样本为**简单随机样本**. 容易看出，在简单

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

随机样本中，$X_1, \cdots, X_n$是独立同分布$F(x)$的．因此我们可以说，**若n个随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立，具有相同的概率分布函数$F(x)$，则称$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是来自总体$F(x)$的一个大小为n的简单随机样本**，简称为**样本**．以后，我们仅限于讨论简单随机样本．样本$(X_1, \cdots, X_n)$是个n维随机向量，每次抽样得到的数据则是这个随机向量取的值，即**样本值**，通常用小写字母$(x_1, \cdots, x_n)$来表示．我们把样本$(X_1, \cdots, X_n)$可能取值的全体称为**样本空间**，它通常为n维空间或其中的一个子集．一个样本值$(x_1, \cdots, x_n)$则是样本空间中的一个点．

由多维随机变量的分布性质容易得知，若$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是来自总体$F(x)$的样本，则$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的联合分布为

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n)=F(x_1)\cdot F(x_2)\cdots F(x_n)=\prod_{i=1}^{n}F(x_i), \tag{2.1}$$

其联合密度为

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=f(x_1)\cdot f(x_2)\cdots f(x_n)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i), \tag{2.2}$$

这里，$f(x)$为分布$F(x)$的密度函数．这两个公式在以后是要多次用到的．

二　经验分布与理论分布

有了总体与样本的概念以后，数理统计的任务就可以概括为：**由样本来推断总体**．那末，样本是如何代表总体的呢？为此，先引出理论分布与经验分布的概念．

总体X的分布函数$F(x)$，即总体的分布函数，称为**理论分布**或**总体分布**．一个大小为n的样本的分布函数$F_n(x)$则称为**经验分布**或**样本分布**．下面给出经验分布的具体表达式．

由于一个样本值是由n个观测值组成的，所以样本值的分布

是一个离散型分布，它相当于在所取到的 n 个观测值处各具有概率 $\frac{1}{n}$. 设这 n 个观测值 x_1, …, x_n 按由小到大排列后为 $x_1^* \leqslant x_2^* \leqslant \cdots \leqslant x_n^*$, 则可得出经验分布函数 $F_n(x)$ 为:

$$F_n(x)=\begin{cases}0 & x<x_1^* \\ \dfrac{k}{n} & x_k^* \leqslant x<x_{k+1}^* \quad k=1, \cdots, n-1 \\ 1 & x_n^* \leqslant x.\end{cases} \tag{2.3}$$

经验分布函数 $F_n(x)$ 的图形如图 1-1 所示，是呈跳跃上升的一条阶梯形折线，若样本观察值不重复，则在每一观测值处有一跳跃为 $\frac{1}{n}$; 若有重复，则按 $\frac{1}{n}$ 的倍数跳跃上升.

由图 1-1 看出，经验分布函数 $F_n(x)$ 具有以下性质: $0 \leqslant F_n(x) \leqslant 1$, $F_n(x)$ 是非降函数，$F_n(x)$ 处处右连续. 显然，这就说明，当样本值 x_1, …, x_n 取定后，$F_n(x)$ 确是一个普通的分布函数.

从另一个角度来看，求经验分布函数 $F_n(x)$ 在一点之值，只要

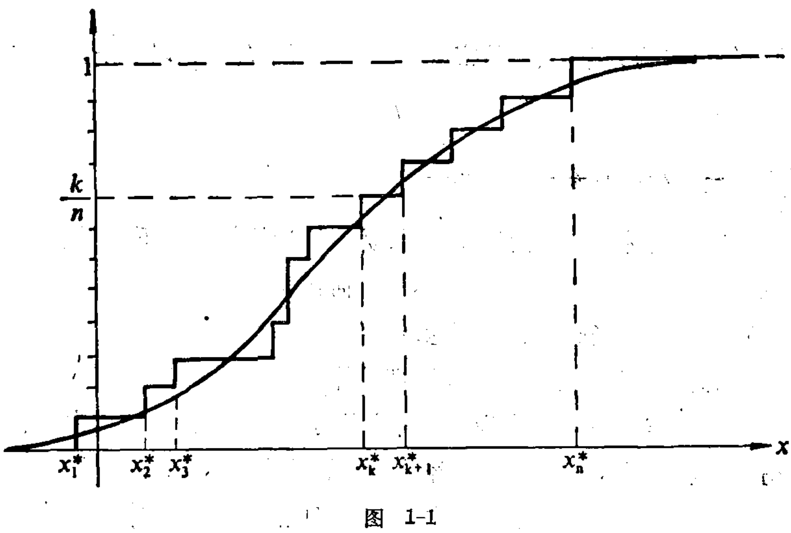


图 1-1

算出随机变量 X 的 n 次观测值中其值小于 x 的次数，再用试验次数 n 除之即得．因而，当样本作为随机变量时，对任一指定的 x 值而言，$F_n(x)$ 都是一个随机变量．我们要注意经验分布 $F_n(x)$ 所具有的这种两重性．当 n 的取值逐渐增大时，经验分布函数 $F_n(x)$ 会如何变化呢？下面给出一个具体例子．

在某种钢筋的强度总体 X 中，随机抽取容量分别为 27，100 的两组样本，其经验分布函数 $F_{27}(x)$，$F_{100}(x)$ 的图形为图 1-2(a)

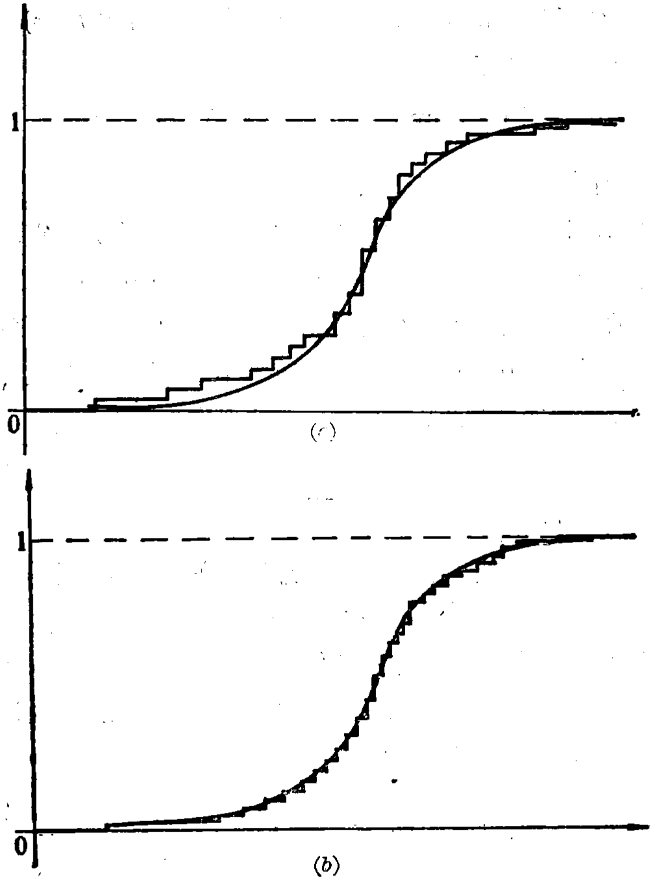


图 1-2

及图 1-2(b)中的阶梯形.

由图中可以看出，随 n 的增大，经验分布 $F_n(x)$ 所描绘的曲线越来越光滑，而且与理论分布 $F(x)$ 越来越接近. 从理论上讲，当试验次数逐渐增大时，事件的频率稳定于概率，因而对任一固定的 x 而言，$F_n(x)$ 的值应与 $F(x)$ 的值越来越接近. 但由于 $F_n(x)$ 是个随机变量，它的极限性质比微积分中的极限要复杂得多. 对于 $F_n(x)$ 与 $F(x)$ 的关系，有一个非常重要的定理.

定理 2.1(格利汶科 Glivenko 定理) 经验分布 $F_n(x)$ 以概率 1 关于 x 一致收敛于 $F(x)$，即

$$P\{\lim_{n\to\infty}\sup_{-\infty<x<+\infty}|F_n(x)-F(x)|=0\}=1. \qquad (2.4)$$

证明请参阅[1]第 345 页.

Glivenko 定理告诉我们，当 n 充分大时，$F_n(x)$ 与 $F(x)$ 可以足够地接近，它们差别的最大值(在(2.4)式中 sup 表示最大值)也会随 n 的增大而趋于 0，这样的结局是以概率 1 发生的. 因而，当 n 足够大时，我们就可以用 $F_n(x)$ 来近似代替 $F(x)$. 这就是以后我们可以用样本来推断总体的最基本的理论依据.

三 统计量

样本来自总体并且代表和反映总体. 在抽取样本后得到的样本值是个 n 维向量，直接利用这 n 个观测值并不方便，应该对它进行一番加工、提炼，把样本中有关信息集中起来. 我们可以针对不同问题构造样本的各种不同函数，这种样本函数在数理统计中被称为统计量. 例如样本均值

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \qquad (2.5)$$

可以表示样本的位置特征. 样本方差

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 \tag{2.6}$$

可以表示样本的离散性特征等等.

数理统计中将会遇见各种各样的统计量. 下面给出统计量的一般定义.

定义 2.1 设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为总体X的一个样本, $\varphi(X_1,\cdots, X_n)$为$(X_1, \cdots, X_n)$的一个实值函数, 且φ中不包含任何未知参数, 则称

$$T=\varphi(X_1, X_2, \cdots, X_n) \tag{2.7}$$

为一个统计量.

例如, 设(X_1, X_2, X_3)是从正态总体$N(a, \sigma^2)$抽取的一个样本, 其中a已知, σ^2为未知. 则X_1, X_2+1, $\frac{1}{3}(X_1+X_2+X_3)$, X_1+X_2-2a, $\max(X_1, X_2, X_3)$等等皆为统计量, 而$\frac{1}{\sigma^2}(X_1^2+X_2^2+X_3^2)$则不是统计量. 由于样本$(X_1, \cdots, X_n)$是随机变量, 统计量是样本(且仅是样本)的函数, 因而统计量也是随机变量, 它也有相应的确定的概率分布.

四 样本矩

设总体X的分布为$F(x)$, 则由概率论可知其各阶原点矩和各阶中心矩. 这些矩都是总体矩. 其中k阶原点矩(假设它存在)为

$$m_k=EX^k=\int x^k dF(x). \tag{2.8}$$

k阶中心矩为

$$\mu_k=E(X-EX)^k=\int(x-EX)^k dF(x). \tag{2.9}$$

它们都是总体的数字特征, 特别是$m_1=EX$, 及$\mu_2=DX=$

$E(X-EX)^2$ 分别为总体的均值和方差，尤为重要.

当我们获得了总体 X 的一个样本$(X_1, \cdots, X_n)$后，我们总希望用样本的数字特征来推断总体的相应数字特征. 为此，自然地要引出相应的样本矩的概念.

定义 2.2 设$(X_1, \cdots, X_n)$为总体 X 的一个样本，则**样本 k 阶原点矩**为

$$M_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k. \tag{2.10}$$

样本 k 阶中心矩为

$$M'_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k \tag{2.11}$$

这里 $\overline{X}$ 为样本均值(即样本一阶原点矩 M_1)，其公式见本节(2.5)式.

显然，这些矩还可以理解为是以经验分布 $F_n(x)$ 作为离散型分布函数的相应各阶矩.

值得注意的是样本二阶中心矩

$$M'_2=\frac{1}{n}\sum(X_i-\overline{X})^2$$

与(2.6)式所给的样本方差 S^2 是略有差别的，本书中常将 M'_2 记为 $\widetilde{S}^2$，显然，

$$\widetilde{S}^2=\frac{n-1}{n}S^2.$$

由于样本分布(即经验分布)函数以概率 1 收敛于总体分布函数，很自然的会提出这样的问题：样本的数字特征与相应总体的数字特征有什么关系？可以证明，只要总体的 r 阶矩存在，则样本的小于等于 r 的各阶矩依概率收敛于总体的相应的各阶矩.

例 2.1 从一批机器零件毛坯中随机抽取 8 件，测得其重量(单位：公斤)分别为 230, 243, 185, 240, 228, 196, 246, 200.

(1) 写出总体、样本、样本值、样本大小；

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com