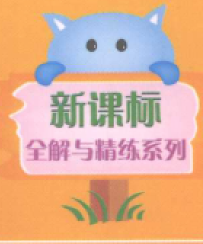

新课标 • 全解与精练系列

初中数学
教材全解与精练

（七年级下）

陈振宣 主编

CHUZHONG SHUXUE
JIAOCAI QUANJIE YU JINGLIAN

SHUXUE

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

巍巍交大 百年书香
www.jiaodapress.com.cn
bookinfo@sjtu.edu.cn

策　　划　冯　勤　任雅君
责任编辑　丁是玲　任雅君
封面设计　孙　敏

新课标·全解与精练系列

《初中数学教材全解与精练》（六年级下）
《初中数学教材全解与精练》（七年级下）
《初中数学教材全解与精练》（八年级下）
《初中数学教材全解与精练》（九年级下）
《初中语文教材全解与精练》（六年级下）
《初中语文教材全解与精练》（七年级下）
《初中语文教材全解与精练》（八年级下）
《初中语文教材全解与精练》（九年级）
《初中物理教材全解与精练》（八年级）
《初中物理教材全解与精练》（九年级）
《初中化学教材全解与精练》（九年级下）

教材全解　课后精练　一书两用　高效省钱

- 本书全面解读教材，突出课本重点，细致讲解难点疑点，扫清盲点，规避误点，让每一个学生都能学得牢一点，考得好一点。
- 本书精讲各类例题，例例典型，道道剖析，规律方法，技巧思路，应有尽有。
- 本书优化课后习题，由易入难，题题精选，对应考试，衔接自然，费时少，效率高。

本书是上海中学生的好帮手，好搭档，好伙伴。

CHUZHONG SHUXUE
JIAOCAI QUANJIE YU JINGLIAN
SHUXUE

ISBN 978-7-313-06153-9
9 787313 061539 >
定价：25.00元

新课标·全解与精练系列

初中数学 教材全解与精练

七年级（下）

陈振宣　主编

上海交通大學出版社

前 言

当前数学教育囿于应试，使得原本生动有趣的教育活动，变得枯燥无味，负担奇重，苦了学生，难了教师. 如何改变这种困境，成了数学教改必须解决的课题.

“全脑教育研究与实验”总课题下的“数学思维训练左、右脑协调”研究中心做过长期探索与试验，深感走出这一困境，应在以下三方面下工夫.

1. 抓住知识与语言的教学，构建数学基本概念、基本原理的意象，是理解、运用概念的重要途径；强化数学语言形态（自然语言、符号语言、图像语言）的“互译”（互相转化），是促进左、右脑协调发展的极佳训练，也是落实三基（基础知识、基本技能、基本方法）的必由之路.

2. 注意数学思想方法（思维的导航器）的概括、提炼和科学学习方法（学会学习）的指导，是提高学习质量与效率的根本教育，也是学生终身受益的教育.

3. 既教书又育人是中华教育的传统，中国的数学教育从中汲取了丰富的“营养”. 本书不惜篇幅，写了“阅读材料”、“名题欣赏”、“应用课题”、“探究活动”等趣味盎然的材料，使学生受到数学文化的陶冶，初步了解数学的科学价值、应用价值、美学价值，激发浓厚的兴趣，对科学规律的好奇心、探究欲，为提高创新思维实践能力创造条件.

趁此次编写《初中数学教材全解与精练》系列丛书之机，我们大胆进行了尝试，希望为教育助学类图书的编纂，吹入一点新风；为学生走出“题海”，放飞思维，给予一些帮助；为提高全民数学素养，建立创新型国家作一点奉献！

本书中，凡有 * 的习题，为拓展提高题，学生可按个人学习进度进行选择。

限于水平，错失之处，敬请读者、专家指正，以便重印改正. 参加本书编撰的除主编外，还有严正、陈永箴、张利萍、范人伊、顾圣凡、周彤、凌景华.

编写组

目　录

教材全解

课 后 精 练

目 录

教材全解

JIAO CAI QUAN JIE

紧扣课标，教材同步；
步步推进，逐次深入；
讲解精细，面面俱到；
围绕重点，突破难点；
典型例题，方法剖析；
易错题析，举一反三；
规律总结，对接中考。

第十二章　实　数

本章视点

一、课标要求与内容分析

1. 从已知正方形面积的值(非完全平方数)求其边长引入平方根和无理数概念(无限不循环小数)将数系扩展到实数系.

2. 从已知正方形面积、正方体体积的值,求正方形的边长、正方体的棱长,引入平方根、立方根的概念,进一步引入 n 次方根概念、算术根概念和开平方、开立方运算.初步了解算术平方根的运算法则.

3. 从无理数的近似值运算引入近似计算法则,了解近似数的精确度的两种表达方式,以及两种方式之间的联系、精确值的存在范围,并会计算简单根式的近似值.

4. 初步认识分指数幂概念,熟练根式与分指数幂的互化以及运算结果的表达方式.

5. 本章的重点是实数的初步认识与简单根式、分指数幂运算法则,熟练简单根式的化简、计算.难点是算术根概念及符号语言的表达方式,以及算术根与实数绝对值之间的联系.初步了解分指数幂与算术根之间内在联系,忽视这一点将是导致失误的重要原因.

二、学习方法指导

1. 本章学习中将遇到许多新概念,要特别重视概念的普通(口头、文字)语言的表达与符号语言的互译训练,这是提高思维能力的关键.

2. 以实数与数轴上的点一一对应为基础,把握实数系的性质,也是数形结合思想的入门,这是第一次学习数轴之后,第二次认识数轴,是认识上一次重要的飞跃,并且为学习平面直角坐标系作好必要的准备.

3. 从度量到数系的发展,体会数学来源于生活、生产的实际,反过来,为生活、生产、改造客观世界服务.

第1节　实数的概念
第2节　数的开方

12.1　实数的概念

新课指南

1. 知识与技能:从度量到数系的发展,了解无理数产生的根源,初步形成实数概念.从已知正方形面积,求边长;已知正方体体积,求棱长引入平方根、立方根概念与开平方、开立方运算,把握乘方与开方互为逆运算,通过类比引入 n 次方根概念.为了正确把握根式的符号语言,弄清算术根概念与实数绝对值之间内在联系,弄清 $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a & (a\geqslant 0)\\ -a & (a<0)\end{cases}$ 是怎样推出的.

2. 过程与方法:弄清实数、方根、算术根等基本概念的发生、发展过程,弄清下列公式的来龙去脉,是把

握概念、运用概念解决问题的基础：

$$(\sqrt{a})^2=a\quad(a\geqslant 0)；\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a & (a\geqslant 0)；\\ -a & (a<0).\end{cases}$$

$$(\sqrt[3]{a})^3=a，(a\in \mathbf{R})；\sqrt[3]{a}=-\sqrt[3]{-a}.$$

n 为偶数：$\sqrt[n]{a^n}=|a|$

n 为奇数：$(\sqrt[n]{a})^n=a\ (a\in \mathbf{R})$

3. 情感态度与价值观：从度量到数系的扩展，既是生产、生活实际的需要，又是数学内部矛盾的运动. 只有数系的扩张，才能认识实数的连续性，才能使一次方程的理论向二次方程延伸，使代数的学习继续深入. 由实数与数轴上的点一一对应，使数形结合思想的深入展开，为学习平面直角坐标系、函数打下必要的基础. 这些认识势必激励学习的动力，建立正确的价值观.

4. 重点与难点：重点是实数概念与平方根、立方根概念，简单根式的运算. 难点是无理数的认识与算术根、n 次方根的把握与运用.

教材解读(三基落实)

数学与生活

数来源于对量的度量，以量两点之间的距离为例说明如下：

量距离首先选取长度单位，例如用米作为长度单位，如果 A、B 之间恰为米的整数倍，则 A、B 之间距离之值为整数，例如是 85 米；如果 85 米多一些，则可再用米的十分之一(即分米)去量所余部分，如果为分米的整数倍，则 A、B 之间的距离为 85.6 米(此为有限小数，可以化为分数). 如果仍有剩余，则用米的百分之一(即厘米)，再量剩余部分，则用米的千分之一(即毫米)，再量剩余部分. 如果恰为毫米的整数倍，则 A、B 之间距离为 85.625 米(为有限小数，可化为分数). 如果还有剩余，再可用米的万分之一，重复上述过程，如此下去，有三种可能：

(1) 在度量了有限次后，恰好量尽，所得的值为有限小数(包括整数)；

(2) 在度量了有限次后仍有剩余，还可使用更小的长度单位，一直量下去，所得的值是无限小数，这时又可分成两类：

① 无限小数出现循环现象，所得值是无限循环小数(可以化成分数). 以上两种值都是有理数.

② 通过有限次度量后，仍有剩余可以无限次度量下去，所得的值是无限小数，但无循环现象，结果是无限不循环小数，它不是有理数，不能化为分数 $\frac{p}{q}$ (p、q 是整数，且 p、q 互素)，它是一种新数，叫做无理数. 无理数不是无道理可讲，而是无法用 $\frac{p}{q}$ (p,q 是互素的整数)表示，亦即不能用两个整数的比表示的数. 人类对无理数的认识，从公元前 400 年左右一直到 19 世纪才比较完整地认识它. 中学阶段的认识尚难完整，抓住实数与数轴上的点一一对应(实数的连续性)，为后续学习打下必要的基础，就可达到本章学习的目的.

知识点详解

知识点 1　无理数概念

无限不循环小数叫做无理数，也就是不能用两整数比表示的数. 通过教材本章阅读材料“无理数的由来”，可以加深这一认识.

知识点 2　实数概念

实数是有理数与无理数的统称.

实数的分类：

$$实数\begin{cases}有理数\begin{cases}正有理数\\ 0\\ 负有理数\end{cases}\\ 无理数\begin{cases}正无理数\\ 负无理数\end{cases}\end{cases}$$

教材 p. 5 练习 12. 1②可完成如下：

- 实　数
  - 有理数（可表示为$\frac{p}{q}$的形式，且 p、q 互素，$q\neq 0$）
    - 整数（$q=1$）
      - 非负整数 $p\geqslant 0$
      - 负整数 $p<0$
    - 分数 $q\neq 1$
  - 无理数（无限不循环小数）

典例剖析

例 1　下列表述是否正确，并说明理由：

(1) 一个实数，不是正数，就是负数.
(2) 有限小数都是有理数，无限小数都是无理数.
(3) 一个有理数不是正数，就是负数.
(4) 一个无理数，不是正数就是负数.
(5) 一个实数不是有理数，就是无理数.

[解]　因为零是实数，但它既不是正数也不是负数，在(1)的实数分类中没有把零包括在内，所以(1)不正确.
无限小数包括无限循环小数和无限不循环小数，而无限循环小数是有理数，所以(2)不正确.
因为零是有理数，它既不是正数，也不是负数，在(3)的有理数分类中没有把零包括在内，所以(3)不正确.
无理数可分为正无理数和负无理数，所以(4)正确.
实数是有理数与无理数的统称，所以(5)正确.
注意：零在实数中仍是正、负数的分界点，不可忽视.

例 2　选择题：

(1) 在实数范围内，有一个数不是正实数，这个数一定是　　(　　)

(A) 负实数　　(B) 负有理数　　(C) 非正实数　　(D) 非负实数

(2) 实数 $1\frac{3}{4}$，π，-3.14，0，$-0.\dot{5}8\dot{9}$，$\sqrt{7}$，0. 110 110 011 000…(两个 11 之间依次多一个 0)中，无理数的个数有　　(　　)

(A) 2 个　　(B) 3 个　　(C) 4 个　　(D) 5 个

[解]　(1) 按实数可以分为正实数，零，负实数，非正实数，即零或负实数，选(C).
(2) 判断无理数应根据无理数的概念“无限不循环小数是无理数”来断定，应选(B).

例 3　填空题：

分别将下列各数填入相应的横线上：$\frac{33}{39}$，$\sqrt{3}$，$-\frac{7}{15}$，$-\sqrt{10}$，$\frac{\pi}{3}$，0. 343 213 432 134 321…(34321 重复出现)，3. 141 6，2. 131 131 113…(每两个 3 之间 1 的个数依次多 1)

有理数是________________________________

无理数是________________________________

[分析]　有理数是能表示为$\frac{a}{b}$(a、b 是整数，且 $b\neq 0$)形式的数，无理数是无限不循环小数，分别用这两条标准去检验上面的数得出正确结果.

[解]　有理数是：$\frac{33}{39}$，$-\frac{7}{15}$，0. 343 213 432 134 321…(34321 重复出现)，3. 141 6；

无理数是：$\sqrt{3}$，$-\sqrt{10}$，$\frac{\pi}{3}$，2. 131 131 113…(每两个 3 之间 1 的个数依次多 1).

12.2 平方根和开平方

教材解读(三基落实)

数学与生活(温故知新)

成书于两千年前的《九章算术》第四章“少广”第十二题:“今有积五万五千二百二十五步,问为方几何?答曰:二百三十五步”.意思是“现有面积为55 225[方]步,问如果是正方形,它的边长是多少?答:235步”.用现在的代数知识,就是:如设正方形边长为x,则$x^2=55\,225$,求x.当时,运用开方法则求得x之值.把这一问题一般化,就有了平方根和开平方的新概念,我们祖先在两千年前就已经掌握开平方法则,这是极不简单的.

知识点详解

知识点1　平方根

如果一个数的平方等于a,那么这个数叫做a的平方根,也可叙述为:“如果$x^2=a$,那么x就叫做a的平方根.”

知识点2　开平方

求一个数a的平方根的运算叫做开平方,a叫做被开方数.

知识点3　平方根的性质

一个正数有两个平方根,它们互为相反数.正数a的两个平方根可以用“$\pm\sqrt{a}$”表示,其中$\sqrt{a}$表示a的正平方根(又叫算术平方根),读作“根号a”;$-\sqrt{a}$表示a的负平方根,读作“负根号a”.

零的平方根记作$\sqrt{0}$,$\sqrt{0}=0$.

因为任何一个正数、负数或零的平方都不是负数,所以负数没有平方根.

知识点4　开平方与平方的关系

开平方与平方互为逆运算,根据平方根的意义,“如果$x^2=a$,那么x叫做a的平方根”,x记作$\pm\sqrt{a}$,我们得到:

(1) 一个正数的平方根的平方等于这个数,即:当$a>0$时,$(\sqrt{a})^2=a$,$(-\sqrt{a})^2=a$;

(2) 一个正数的平方的正平方根等于这个数,即:当$a>0$时,$\sqrt{a^2}=a$.

一个负数的平方的正平方根等于这个数的相反数,即:当$a<0$时,$\sqrt{a^2}=-a$.

方法与技能:搞清平方根与开平方概念.开平方是一种运算,平方根是开平方运算的结果;搞清开平方与平方互为逆运算的关系;要掌握平方根的性质,尤其要理解负数没有平方根的理由;要分清平方根与算术平方根的区别,并知道它们之间的联系,防止相互混淆;要注意审题,弄清用自然语言或符号语言所表述的题意与要求.如果a^2(a是实数)的算术平方根为x,则x是方程$x^2=a^2$的非负实根,即$\sqrt{a^2}$,所以,

$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a & (a\geqslant 0);\\ -a & (a<0).\end{cases}$(这与(2)的结论一致)弄清这一公式的来龙去脉,是防止失误的根本.

典例剖析

例1　判断下列说法是否正确:

(1) 1的平方根是1.　　(2) -16的平方根是±4.　　(3) ±3的平方根是9.

(4) $\sqrt{81}=\pm9$.　　(5) -7是49的平方根.　　(6) $\sqrt{16}$的平方根是±4.

[解]　(1) 不正确.因为1是正数,1的平方根有两个,是±1.

(2) 不正确.因为-16是负数,负数没有平方根.

(3) 不正确.应该是±3的平方是9.

(4) 不正确.$\sqrt{81}$表示81的正的平方根.它是一个正数,$\sqrt{81}=9$,而$\sqrt{81}\neq-9$.

(5) 正确.因为$(-7)^2=49$，根据平方根的概念，-7是49的平方根，但反过来说，49的平方根是-7就错了.

(6) 不正确. $\sqrt{16}=4$，$\sqrt{16}$的平方根即为4的平方根，所以$\sqrt{16}$的平方根应是±2.

[说明] 解答这类题目是对巩固和掌握平方根的概念和性质不可忽视的基本训练.

例2 求下列各式的值：

(1) $\sqrt{144}$　　(2) $-\sqrt{\frac{9}{16}}$　　(3) $\pm\sqrt{0.01}$　　(4) $-\sqrt{(-6)^2}$

[分析] 求$\sqrt{144}$的值就是求144的正的平方根(即144的算术平方根)；求$-\sqrt{\frac{9}{16}}$的值就是求$\frac{9}{16}$的负的平方根$\left(即\frac{9}{16}的算术根的相反数\right)$；求$\pm\sqrt{0.01}$的值就是求0.01的平方根；求$-\sqrt{(-6)^2}$的值就是求$(-6)^2$的算术平方根的相反数.搞清各式的符号语言的意义，是得到正确解的关键.

[解] (1) $\sqrt{144}=12$　　(2) $-\sqrt{\frac{9}{16}}=-\frac{3}{4}$

(3) $\pm\sqrt{0.01}=\pm0.1$　　(4) $-\sqrt{(-6)^2}=-\sqrt{36}=-6$

例3 求下列各数的平方根：

(1) 0.64　　(2) $\frac{25}{64}$　　(3) 0　　(4) $\left(-1\frac{5}{4}\right)^2$

[解] (1) $\because(\pm0.8)^2=0.64$，$\therefore$ 0.64的平方根是±0.8. 即：$\pm\sqrt{0.64}=\pm0.8$.

(2) $\because\left(\pm\frac{5}{8}\right)^2=\frac{25}{64}$，$\therefore\frac{25}{64}$的平方根是$\pm\frac{5}{8}$，即：$\pm\sqrt{\frac{25}{64}}=\pm\frac{5}{8}$.

(3) $\because 0^2=0$，$\therefore$ 0的平方根是0，即：$\pm\sqrt{0}=0$.

(4) $\because\left(-1\frac{5}{4}\right)^2=\left(-\frac{9}{4}\right)^2=\frac{81}{16}$，而$\left(\pm\frac{9}{4}\right)^2=\frac{81}{16}$，

$\therefore\left(-1\frac{5}{4}\right)^2$的平方根是$\pm\frac{9}{4}$，即：$\pm\sqrt{\left(-1\frac{5}{4}\right)^2}=\pm\frac{9}{4}$.

[说明] 运用平方运算求一个非负数的平方根是常用的方法.用符号语言表示一个非负数的平方根，应由不习惯到习惯，这对加深平方根概念和性质的理解有好处.

例4 已知$2x-1$的平方根是±5，$x-3y$的平方根是±2，求$x+y$的平方根.

[分析] 由已知得：$2x-1=(\pm5)^2$，$x-3y=(\pm2)^2$，即：$2x-1=25$ ①，$x-3y=4$ ②，解由方程①和②组成的方程组得x和y的值，再求$x+y$的平方根.

[解] 由已知得$\begin{cases}2x-1=25 & ①\\ x-3y=4 & ②\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=13\\ y=3\end{cases}$. $x+y=13+3=16$，$\therefore x+y$的平方根是±4.

12.3 立方根和开立方

教材解读(三基落实)

数学与生活(温故知新)

我们已经知道，已知一个正方形的面积，可以用开平方的方法，求出面积的平方根就能知道这个正方形的边长了.那么已知一个正方体的体积是27立方分米，能不能用体积来算出这个正方体的棱长呢？我们可以类似求平方根那样，设正方体的棱长为x分米，则有$x^3=27$，求棱长x的问题就成了“已知一个数的立方，求这个数”.这就是我们接着要学习的立方根和开立方运算.

知识点详解

知识点 1 立方根

与平方根类似,有:

如果一个数的立方等于 a,那么这个数叫做 a 的立方根,用“$\sqrt[3]{a}$”表示,读作“三次根号 a”,$\sqrt[3]{a}$中的 a 叫做被开方数,“3”叫做根指数;也可叙述为“如果 $x^3=a$,那么 x 就叫做 a 的立方根”,x 记作 $\sqrt[3]{a}$.

知识点 2 开立方

求一个数 a 的立方根的运算叫做开立方.开立方与立方互为逆运算.

知识点 3 立方根的性质

我们已学过正数的立方是一个正数,负数的立方是一个负数,零的立方等于零,由立方运算可知正数有一个正立方根,负数有一个负立方根,零的立方根是零,也就是说任意一个数都有立方根,而且只有一个立方根.

类似于平方与开平方之间的关系,根据立方根的意义,可以得到

$$(\sqrt[3]{a})^3=a,\ \sqrt[3]{a^3}=a.\text{(以上 }a\text{ 为实数)}$$

方法与技能:一个数的立方根记作“$\sqrt[3]{a}$”,根指数 3 不能省略.

由于 $2^3=8$,有$\sqrt[3]{8}=2$,$(-2)^3=-8$,有 $\sqrt[3]{-8}=-2$,可见 $\sqrt[3]{-8}=-\sqrt[3]{8}$.一般地,如果 $a>0$,则 $\sqrt[3]{-a}=-\sqrt[3]{a}$,如果把非负数的立方根叫做算术立方根,那么负数的立方根可以由它的相反数的算术立方根的相反数来表示,也就是把“$-$”号提到根号外面来.

典例剖析

例 1 求下列各式的值:

(1) $\sqrt[3]{64}$　　(2) $\sqrt[3]{-64}$　　(3) $\sqrt[3]{-\frac{27}{125}}$　　(4) $\sqrt[3]{-1}$

[解] (1) $\because 4^3=64$, $\therefore \sqrt[3]{64}=4$.

(2) $\because (-4)^3=-64$, $\therefore \sqrt[3]{-64}=-4$.

也可以这样求:$\sqrt[3]{-64}=-\sqrt[3]{64}=-4$.

(3) $\because \left(-\frac{3}{5}\right)^3=-\frac{27}{125}$, $\therefore \sqrt[3]{-\frac{27}{125}}=-\frac{3}{5}$.

(4) $\because (-1)^3=-1$, $\therefore \sqrt[3]{-1}=-1$.

[说明] 由立方根的意义,如果 $x^3=a$,那么x就叫做a 的立方根,x记作 $\sqrt[3]{a}$,可知a的立方根 $\sqrt[3]{a}$ 的立方:$(\sqrt[3]{a})^3=a$.

例 2 判断题(对的打“√”,错的打“×”):

(1) 1 的立方根是±1.　( )

(2) 任何数都有立方根.　( )

(3) 如果 $\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{b}$,那么 $a-b=0$.　( )

(4) 两个互为相反数的立方根也是互为相反数.　( )

(5) 一个数的立方根和平方根都是它本身,这个数是 0 或 1.　( )

(6) $\sqrt[3]{4^6}$的平方根是±4.　( )

[解] (1) (×).1 的立方根是 1.

(2) (√).任何实数 a 都有唯一的立方根,记作 $\sqrt[3]{a}$.

(3) (√).因为 $\sqrt[3]{a}$是 a 的立方根,则$(\sqrt[3]{a})^3=a$;同理,$(\sqrt[3]{b})^3=b$.由$\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{b}$ 可推出$(\sqrt[3]{a})^3=(\sqrt[3]{b})^3$,即$a=b$.
$\therefore a-b=0$.

(4) (√). $\because \sqrt[3]{a}=-\sqrt[3]{-a}$, $\therefore$ 两个互为相反数的立方根也互为相反数.

(5) (×). ∵ 如果一个数 x 的立方根是它本身，则 $\sqrt[3]{x}=x$，∴ $x^3=x$，$x(x^2-1)=0$. ∴ $x=0$ 或 ± 1. 如果一个数 x 的平方根是它本身，则 $\pm\sqrt{x}=x$，则 $x^2=x$，$x(x-1)=0$，所以 $x=0$ 或 1.

(6) (√). $\sqrt[3]{4^6}=\sqrt[3]{(16)^3}=16$，它的平方根为 ± 4.

例 3 若 $a<0$，则 $\sqrt{a^2}+\sqrt[3]{a^3}=$ ________.

[**解**] ∵ $a<0$，$\sqrt{a^2}=-a$，$\sqrt[3]{a^3}=a$，∴ $\sqrt{a^2}+\sqrt[3]{a^3}=-a+a=0$.

例 4 求下列各数的立方根：

(1) 0.216　　(2) $-3\dfrac{3}{8}$　　(3) ± 125

[**解**] (1) ∵ $0.6^3=0.216$

∴ 0.216 的立方根是 0.6，即 $\sqrt[3]{0.216}=0.6$.

(2) ∵ $-3\dfrac{3}{8}=-\dfrac{27}{8}$，而 $\left(-\dfrac{3}{2}\right)^3=-\dfrac{27}{8}$

∴ $-3\dfrac{3}{8}$ 的立方根是 $-\dfrac{3}{2}$，即 $\sqrt[3]{-3\dfrac{3}{8}}=-\dfrac{3}{2}$.

(3) ∵ $5^3=125$，$(-5)^3=-125$

∴ 125 的立方根是 5，即 $\sqrt[3]{125}=5$；

-125 的立方根是 -5，即 $\sqrt[3]{-125}=-5$.

[**说明**] 运用立方运算求一个数的立方根是常用的方法，求带分数的立方根，要先将带分数化为假分数. 用 $\sqrt[3]{-a}=-\sqrt[3]{a}$ 这个性质有 $\sqrt[3]{-125}=-\sqrt[3]{125}=-5$，但对于平方根来说不能适用，因为负数没有平方根.

12.4 n 次方根

教材解读(三基落实)

温故知新

平方根和立方根是常见的方根，在乘方运算中有平方、立方以及 n 次方(n 是大于 3 的整数)等运算，我们已经学习了平方和立方的逆运算——开平方和开立方，懂得了平方根和立方根的概念，接下来我们将平方根和立方根的概念加以推广，学习 n 次方(n 是大于 3 的整数)运算的逆运算.

知识点详解

知识点 1 n 次方根

如果一个数的 n 次方(n 是大于 1 的整数)等于 a，那么这个数叫做 a 的 n 次方根，也可以叙述为"如果 $x^n=a$(n 是大于 1 的整数)，那么 x 就叫做 a 的 n 次方根. 平方根和立方根是 n 次方根的特例.

知识点 2 开 n 次方

求一个数 a 的 n 次方根的运算叫做开 n 次方，a 叫做被开方数，n 叫做根指数.

有时 n 次方根简称为"方根"；开 n 次方简称"开方".

知识点 3 n 次方根的性质

由于 n 次方根包含平方根和立方根在内，而平方根和立方根有不同的性质，这使得研究 n 次方根的性质时，必然要把指数按奇数或偶数分别进行研究.

与立方根类比：实数 a 的奇次方根有且只有一个，用"$\sqrt[n]{a}$"表示，其中被开方数 a 是任意一个实数，根指数 n 是大于 1 的奇数.

与平方根类比：正数 a 的偶次方根有两个，它们互为相反数，正 n 次方根用"$\sqrt[n]{a}$"表示，读作"n 次根号 a"，

负 n 次方根用“$-\sqrt[n]{a}$”表示，其中被开方数 $a>0$，根指数 n 是正偶数（当 $n=2$ 时，在 $\pm\sqrt[n]{a}$ 中省略 n），负数的偶次方根不存在.

因为零的 n 次方等于零，所以零的 n 次方根等于零，表示为 $\sqrt[n]{0}=0$.

方法与技能：研究 n 次方根，必须用分类思想把指数分为奇数和偶数来考虑，学习奇次根式时与立方根类比，学习偶次根式时与平方根类比，这种类比方法是数学思维重要方法之一.

综上，无论 n 为奇数还是偶数，对于正数 a 的正 n 次方根都记作 $\sqrt[n]{a}$，称为正数 a 的 n 次算术根.（0 的 n 次算术根为零）正数 a 的 n 次算术根，有下列重要性质：

$$\sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}.\text{（}n\text{ 为大于或等于 2 的整数）}$$

即根指数与被开方数的指数如果有公因数则可以约去，这一公式可以顺用，即将 $\sqrt[nk]{a^{mk}}$ 化为 $\sqrt[n]{a^m}$. 反过来，也可以将 $\sqrt[n]{a^m}$ 化为 $\sqrt[nk]{a^{mk}}$. 这是算术根的基本性质，可以作出严格证明，这里就不展开了. 非算术根不能应用这一公式，这是难点，许多错误都来源于此. 注意看后面 12.7“分数指数幂”的“典例剖析”中，疑难与错解辨析例 5.

典例剖析

例 1 求值：

(1) 32 的五次方根　(2) -32 的五次方根　(3) 16 的四次方根

(4) 64 的六次方根　(5) 0.000 064 的六次方根　(6) $-\dfrac{32}{243}$ 的五次方根

[解] (1) $\because 2^5=32$

$\therefore$ 32 的五次方根 $=\sqrt[5]{32}=2$

(2) $\because (-2)^5=-32$

$\therefore -32$ 的五次方根 $=\sqrt[5]{-32}=-2$

(3) $\because (\pm 2)^4=16$

$\therefore$ 16 的四次方根 $=\pm\sqrt[4]{16}=\pm 2$

(4) $\because (\pm 2)^6=64$

$\therefore$ 64 的六次方根 $=\pm\sqrt[6]{64}=\pm 2$

(5) $\because (\pm 0.2)^6=0.000\,064$

$\therefore$ 0.000 064 的六次方根 $=\pm\sqrt[6]{0.000\,064}=\pm 0.2$

(6) $\because \left(-\dfrac{2}{3}\right)^5=-\dfrac{32}{243}$

$\therefore -\dfrac{32}{243}$ 的五次方根 $=\sqrt[5]{-\dfrac{32}{243}}=-\dfrac{2}{3}$

[说明] 运用乘方运算求方根的值是常用的方法，对于正数的偶次方根有两个，它们互为相反数要充分理解. 求 n 次方根的值必须考虑指数的奇、偶性，增强分类的意识，学会正确的数学语言表述是很重要的，给书写也带来简便.

例 2 选择题：

1. 下列语句中，正确的是(　　)

(A) 正数 a 的 n 次方根记作 $\sqrt[n]{a}$　(B) 如果 n 是偶数，当且仅当 a 是非负实数时，则 $\sqrt[n]{a}$ 有意义

(C) 零的 n 次方根无意义　(D) 任何实数都能开方

2. $5-x$ 在实数范围内能开偶次方根的条件是(　　)

(A) x 为任意实数　(B) $x\geqslant 5$　(C) $x\leqslant 5$　(D) $x\leqslant 0$

[解] 1. (B)