全国硕士研究生入学统一考试

数学复习辅导

概率论与数理统计

硕士研究生入学统一考试数学命题研究中心 编

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

全国硕士研究生入学统一考试

数学复习辅导

——概率论与数理统计

硕士研究生入学统一考试数学命题研究中心　编

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书根据国家教育部考试中心颁发的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》和近年考研数学试卷最新信息编写。全书分为8章，包括：事件和概率，随机变量及其分布，多维随机变量及其联合（概率）分布，随机变量的数字特征，大数定律和中心极限定理，数理统计的基本概念，参数估计，假设检验。内容涵盖《考研大纲》中概率论与数理统计的全部考点。每章均设置考点精要、重点和难点、高分攻略与解题技巧、例题精析等栏目，具有很强的实战性和针对性。

本书可供考研学生复习备考时使用，也适合在校大学生以及专升本学生学习和复习概率论与数理统计时阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

数学复习辅导·概率论与数理统计/硕士研究生入学统一考试数学命题研究中心编. —上海：上海交通大学出版社，2010

（全国硕士研究生入学统一考试）

ISBN 978-7-313-06478-3

Ⅰ. 数... Ⅱ. 硕... Ⅲ. ①概率论—研究生—入学考试—自学参考资料②数理统计—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ. O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第083596号

数学复习辅导

——概率论与数理统计

硕士研究生入学统一考试数学命题研究中心 编

上海交通大学出版社出版发行

（上海市番禺路951号 邮政编码200030）

电话：64071208 出版人：韩建民

常熟文化印刷有限公司 印刷 全国新华书店经销

开本：787mm×960mm 1/16 印张：8.5 字数：155千字

2010年7月第1版 2010年7月第1次印刷

印数：1～3030

ISBN 978-7-313-06478-3/O 定价：18.00元

前　　言

本考研系列是依据国家教育部考试中心颁发的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》和近几年考研试卷的最新信息以及作者历年评阅试卷积累的经验而编写的一套考研应试辅导力作。包括《数学复习辅导——微积分与线性代数》、《数学复习辅导——概率论与数理统计》，对研究生考试课程作系统和提纲挈领式的总结、归纳和梳理，所编内容和选编的例题、练习题涵盖《考研大纲》中的全部考点，充分关注考试内容的重点，反映近年考研试卷的命题趋势和动向。

本系列具有以下特点：

1. 设置栏目，针对性强

为了帮助读者进行复习，提高学习效率，本系列设置了以下栏目：考点精要，高分攻略与解题技巧，例题精析等。凡有练习题或测试题的，书末均附有标准答案，方便读者自测时参考。

2. 题型齐全，形式新颖

本系列选编的例题是编者在筛选和科学测试历年考研试题的基础上精选出的，具有很强的参考性和实战性。对于典型例题，除了提供详尽正确的解题过程外，更有题解前的分析点拨以及题解后总结题型规律的评注，力求收到举一反三、融会贯通之功效。

3. 重视方法，启迪思维

解题既需要掌握常规的方法，更讲究特有的思路和技巧。本系列注重介绍学习方法和获取高分的秘笈，启迪解题思路与解题技巧，传授避错防错的对策和措施。

本考研系列的编者来自上海交通大学、复旦大学等上海一流高校，曾多次参与考研阅卷评分等工作，具有丰富的考研命题规律研究和应试复习辅导经验。本系列主要面向考研学生，供他们复习备考时使用；同时一般在校大学生也可借助本系列作阶段或期末复习时使用，也适合专升本学生复习备考时阅读参考。

《数学复习辅导——概率论与数理统计》由陆少华主编，周汉源、周国标、王铭、陆榕、黄蔚等参加编写。

由于成书时间仓促，书中疏忽和错误之处，恳请广大读者和使用本书的老师、同学批评指正。

编　者

2010 年 6 月

目　　录

1　事件和概率

【考点精要】

A. 随机事件及其运算

（1）随机事件：在试验前不能确定其结果的试验称为随机试验，在随机试验中可能发生也可能不发生的结果称为随机事件，它用大写字母 A,B,C 等表示.

（2）样本空间：随机试验的每一基本结果是一个随机事件，称为基本事件，全体基本事件组成的集合称为样本空间，记为 Ω. 不可能事件记为 $\varnothing$.

（3）事件的关系与运算：详见表 1.1.

表 1.1

语言表达	事件的关系与运算
A 发生必导致 B 的发生	$A\subset B$ 或 $B\supset A$
A 与 B 一方发生必导致另一方的发生	$A=B$
A,B 至少一个发生	$A+B$ 或 $A\cup B$*
A,B 都发生	AB 或 $A\cap B$
A 不发生（或 A 的对立事件）	$\overline{A}$，满足：$A\overline{A}=\varnothing$，$A+\overline{A}=\Omega$
A 发生但 B 不发生	$A-B$ 或 $A\overline{B}$
A,B 不同时发生（称不相容或互斥）	$AB=\varnothing$
常用的还有：	
A,B 恰有一个发生	$A\overline{B}+\overline{A}B$
A,B 最多一个发生	$\overline{A}\,\overline{B}+A\overline{B}+\overline{A}B$ 或 $\overline{AB}$
A,B 不全发生	$\overline{A}+\overline{B}$ 或 $\overline{AB}$

* 本书对“+”与“∪”不作区别，但有的书将“+”仅作为不相交集合的并.

（4）运算律：

交换律：$A+B=B+A$，　　$AB=BA$；

结合律：$(A+B)+C=A+(B+C)$，　$(AB)C=A(BC)$；

分配律：$A(B+C)=AB+AC$，　　$A+BC=(A+B)(A+C)$；

对偶律：$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$，　　$\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$.

常用的关系还有：

$A=AB+A\overline{B}$，　　$AB\subset A\subset A+B$；

$A\subset B\Leftrightarrow AB=A\Leftrightarrow A+B=B$；

$\overline{\overline{A}}=A$.

(5) 完备事件组：若事件组 $B_k(k=1,2,\cdots,n)$满足：

① $B_jB_k=\varnothing$（对任何 $j\neq k$）；

② $\sum\limits_{k=1}^{n} B_k=\Omega$；

则称它为完备事件组.

B. 概率的定义及其运算

(1) 概率的定义：若对 Ω 中的每个事件 A 赋予一个实数 $P(A)$，且满足以下条件：

① $P(A)\geqslant 0$；

② $P(\Omega)=1$；

③ 对可列的两两不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$，有

$$P\Big(\sum_{k=1}^{\infty}A_k\Big)=\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k);$$

则称 $P(A)$为 A 的概率.

(2) 概率的基本性质：

① $P(\varnothing)=0$；

② 有限个两两不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，有

$$P\Big(\sum_{k=1}^{n}A_k\Big)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k);$$

③ $P(A)=1-P(\overline{A})$；

④ 若 $A\subset B$，则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$；

⑤ 加法定理：

$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$,

$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$；

$$P\Big(\sum_{k=1}^{n}A_k\Big)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)-\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}P(A_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

常用的关系还有：

① $P(AB)=P(A)-P(A\overline{B})$或 $P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})$；

② 若 $A\subset B$，则 $P(AB)=P(A)$及 $P(A+B)=P(B)$；

③ $P(A+B)=1-P(\overline{A}\overline{B})$.

(3) 古典型概率：若随机试验的基本事件只有有限个，且每个基本事件发生的可能性相同，定义

$$P(A)=\frac{\text{事件}A\text{包含的基本事件数}}{\Omega\text{包含的基本事件数}},$$

这种概率称为古典型概率.

(4) 设样本空间是一个有限区域 Ω,若样本点落在 Ω 内的任何区域 G 中的事件 A 的概率与区域的几何度量 * 成正比,定义

$$P(A)=\frac{G\text{ 的几何度量}}{\Omega\text{ 的几何度量}},$$

这种概率称为几何型概率.

C. 条件概率

(1) 条件概率:若 $P(A)>0$,则称 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 为 A 发生条件下 B 发生的条件概率.

条件概率 $P(*|A)$ 也是概率,即对任意的事件 B 有:

① $P(B|A)\geqslant 0$;

② $P(\Omega|A)=1$;

③ 对可列的两两不相容的事件 $B_1,B_2,\cdots,B_n,\cdots$,有

$$P\left(\sum_{k=1}^{\infty}B_k\mid A\right)=\sum_{k=1}^{\infty}P(B_k\mid A),$$

因而条件概率具有概率所有的其他概念和性质.

(2) 乘法定理:设 $P(A)>0$,则有

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A);$$

若 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$,则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

(3) 全概公式:若 $B_k(k=1,2,\cdots,n)$是完备事件组,且 $P(B_k)>0(k=1,2,\cdots,n)$,则有

$$P(A)=\sum_{k=1}^{n}P(B_k)P(A\mid B_k).$$

(4) 贝叶斯公式:若 $B_k(k=1,2,\cdots,n)$是完备事件组且 $P(B_k)>0(k=1,2,\cdots,n)$,$P(A)>0$,则有

$$P(B_k\mid A)=\frac{P(B_k)P(A\mid B_k)}{\sum\limits_{k=1}^{n}P(B_k)P(A\mid B_k)}.$$

注意:若 $B_k(k=1,2,\cdots,n)$不是完备事件组,但两两互斥且 $\sum\limits_{k=1}^{n}B_k\supset A$,则全概公式和贝叶斯公式仍成立.

---

* 几何度量指长度、面积、体积等,常为面积.

D. 独立性

(1) 事件独立性：若 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件 A,B 独立. 一般，若对任意 k ($1<k\leqslant n$)，任意 $1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_k\leqslant n$，有

$$P(A_{j_1}A_{j_2}\cdots A_{j_k}) = P(A_{j_1})P(A_{j_2})\cdots P(A_{j_k}),$$

则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.

注意：

① 若 A,B 相互独立，则 $\overline{A}$ 与 B，A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也独立.

② 若 A,B,C 相互独立，则 A 与 BC，A 与 $B+C$，A 与 $B-C$ 都独立.

③ 若 $P(A)>0$，则 A,B 相互独立的充要条件是 $P(B|A)=P(B)$.

④ A,B,C 两两独立，或 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$ 成立，都不能保证 A,B,C 相互独立. 只有这两条同时成立才能保证 A,B,C 相互独立.

⑤ 在实际应用中，事件的独立性往往根据实际意义来判断，例如用放回抽样(取一只，放回后再取下一只)的方法，各次抽样是独立的. 对于不放回抽样，当被抽样对象的数量相对抽样数很大时，各次抽样可以当作是独立的.

(2) 贝努里公式：在 n 次独立重复试验中，每次试验只有两种结果：A 发生或不发生，则

$$P(A\text{ 出现 }k\text{ 次}) = C_n^k p^k(1-p)^{n-k},$$

其中，p 为在每一次试验中 A 出现的概率.

若 $(n+1)p$ 不是整数，当 $k=[(n+1)p]$ 时，公式中概率达到最大，其中[ ]表示取整.

若 $(n+1)p$ 是整数，当 $k=(n+1)p$ 或 $(n+1)p-1$ 时，概率达到最大.

重点：概率的基本性质，条件概率，全概公式，贝叶斯公式，贝努里公式，事件独立性.

难点：条件概率，全概公式，贝叶斯公式.

【高分攻略与解题技巧】

(1) 求概率常先用数学符号(事件 $A,B,\cdots$ 及其运算，概率 P)表示用普通语言表达的随机事件的概率，然后再运用相关的集合运算性质和概率公式计算所求的概率.

(2) 求概率时，在不同条件下要应用不同公式，如：

$$\begin{aligned} P(A+B) &= P(A)+P(B)-P(AB)\ (\text{一般情况}) \\ &= P(A)+P(B)\ (\text{当 }A,B\text{ 互斥}) \end{aligned}$$

$= 1 - P(\overline{A})P(\overline{B})$ (当 A,B 独立)

$= P(B)$ (当 $A \subset B$);

$P(A) = 1 - P(\overline{A})$ [当 $P(\overline{A})$ 容易求时使用]

$= P(AB) + P(A\overline{B})$ [当 $P(AB), P(A\overline{B})$ 容易求时使用]

$= P(B)P(A \mid B) + P(\overline{B})P(A \mid \overline{B})$

(当 A 发生的概率取决于 $B,\overline{B}$ 是否发生时使用)

$= C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$(在贝努里试验中)

$= \cdots$

类似可总结出求 $P(AB)$ 及 $P(A|B)$ 的公式及使用条件.

【例题精析】

1.1 设 A,B,C 为三个随机事件,证明:(1) $(A-AB)\cup B=A\cup B$;(2) $(A\cup B)-B=A-AB=A\overline{B}$;(3) $(A\cup B)-AB=A\overline{B}\cup\overline{A}B$.

证 (1) **证 1** 注意到 $A-C=A\overline{C}$,并运用对偶定理(德摩根定理):

$$A-AB=A\cdot\overline{AB}=A(\overline{A}\cup\overline{B})=A\overline{A}\cup A\overline{B}=A\overline{B}\quad(\text{因 } A\overline{A}=\varnothing),$$

故 $$(A-AB)\cup B=A\overline{B}\cup B=(A-B)\cup B=A\cup B.$$

证 2 由于 $A-AB$ 表示 A 发生而 A、B 不同时发生,即 A 发生 B 不发生,故 $(A-AB)\cup B$ 表示 A 与 B 至少有一个发生,这等价于事件 $A\cup B$ 发生,故

$$(A-AB)\cup B=A\cup B.$$

(2) $(A\cup B)-B=(A\cup B)\overline{B}=A\overline{B}\cup B\overline{B}=A\overline{B}$,又由(1),$A-AB=A\overline{B}$,故

$$(A\cup B)-B=A-AB=A\overline{B}.$$

(3) $$(A\cup B)-AB=(A\cup B)(\overline{AB})=(A\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})$$
$$=[(A\cup B)\overline{A}]\cup[(A\cup B)\overline{B}]=B\overline{A}\cup A\overline{B}.$$

1.2 求 $P[(A\cup B)\overline{B}]+P[A(\overline{A}\cup B)(A\cup\overline{B})B]-P[(A\cup B)(A\cup\overline{B})]$.

解 上式 $=P(A\overline{B}\cup B\overline{B})+P[(A\overline{A}\cup AB)(AB\cup\overline{B}B)]-P(A\cup B\overline{B})$

$=P(A\overline{B})+P(AB)-P(A)=P(A)-P(A)=0.$

评注 集合运算关系式要求会正向用也会反向用,这样化简会快捷许多,如此例 $(A\cup B)(A\cup\overline{B})=A\cup B\overline{B}=A$.

1.3 设事件 A,B 同时发生时 C 必发生,则不正确的是( ).

(A) $P(ABC)=P(AB)$; (B) $P(\overline{A}+\overline{B})\geqslant P(\overline{C})$;

(C) $P(C)<P(A)+P(B)-1$; (D) $P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$.

解 (C),(D)两个命题是互相排斥的,一个正确则另一个必不正确. 由条件 $AB\subset C$ 得

$$P(C)\geqslant P(AB)=P(A)+P(B)-P(A+B)\geqslant P(A)+P(B)-1,$$

所以(D)正确，即(C)不正确.

1.4 设 X,Y 为随机变量，事件 A 表示 $\{X\geqslant C\}$，事件 B 表示 $\{Y\geqslant C\}$，用 A,B 表示下列事件：

$D:\{\max(X,Y)\geqslant C\}$； $E:\{\min(X,Y)\geqslant C\}$；

$F:\{\max(X,Y)<C\}$； $G:\{\min(X,Y)\leqslant C<\max(X,Y)\}$.

解 $\max(X,Y)\geqslant C$ 意味着 X,Y 中至少有一个 $\geqslant C$，故 $D=A\cup B$.

$\min(X,Y)\geqslant C$ 意味着 X,Y 两者均要 $\geqslant C$，故 $E=A\cap B$.

$\max(X,Y)<C$ 意味着 X,Y 都要 $<C$，故 $F=\overline{D}=\overline{A\cup B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$.

$\min(X,Y)<C\leqslant\max(X,Y)$ 正好有一个 $\geqslant C$，而另一个 $<C$，故

$$C=A\overline{B}\cup B\overline{A}.$$

评注 $\max(X,Y)$ 与 $\min(X,Y)$ 是两个主要的随机变量的函数，有关它们的概率分布或概率计算都要利用对本例的正确理解.

1.5 已知 $A\supset B,A\supset C,P(A)=0.9,P(\overline{B}+\overline{C})=0.8$，求 $P(A-BC)$.

解 由已知 $A\supset BC$，

$$\begin{aligned}P(A-BC)&=P(A)-P(BC)=P(A)-[1-P(\overline{B}+\overline{C})]\\&=0.9-(1-0.8)=0.7.\end{aligned}$$

1.6 甲、乙两射手轮流对同一目标进行射击，甲每枪命中率为 p，乙每枪命中率为 r，彼此独立，甲先射，则甲先命中的概率=__________.

解 设 $A_k=\{$第 k 枪甲命中$\}$，$B_k=\{$第 k 枪乙未命中$\}$.

$$\begin{aligned}&P(\text{甲先命中})\\&=P(A_1+\overline{A}_1B_2A_3+\overline{A}_1B_2\overline{A}_3B_4A_5+\cdots)\\&=P(A_1)+P(\overline{A}_1B_2A_3)+P(\overline{A}_1B_2\overline{A}_3B_4A_5)+\cdots\\&=P(A_1)+P(\overline{A}_1)P(B_2)P(A_3)+P(\overline{A}_1)P(B_2)P(\overline{A}_3)P(B_4)P(A_5)+\cdots\\&=p+(1-p)(1-r)p+(1-p)(1-r)(1-p)(1-r)p+\cdots\\&=\frac{p}{1-(1-p)(1-r)}.\end{aligned}$$

1.7 把 10 卷书任意放在书架，其中有两套书，一套 3 卷，另一套 4 卷. 求下列事件的概率：(1) 3 卷一套的放在一起；(2) 4 卷一套的放在一起；(3) 两套各自放在一起；(4) 两套中至少有一套放在一起；(5) 两套各自放在一起，还按卷次顺序排好.

解 设 $A=\{$3 卷一套的放在一起$\}$，$B=\{$4 卷一套的放在一起$\}$，$C=\{$两套各自放在一起$\}$，$D=\{$两套按卷次顺序排好$\}$.

(1) 3 卷一套的放在一起，可把 3 卷看成一个整体，把 10 本书可视为共 8 本书，故共有 8!.

排法;而 3 卷一套之间可以任意排列,共有 3!种排法. 故

$$P(A)=\frac{8!\times3!}{10!}=\frac{1}{15}.$$

(2) 同理可得:$P(B)=\frac{7!\times4!}{10!}=\frac{1}{30}$.

(3) 两套各自放在一起,把两套分别视作两个整体,10 本书可视为 5 本书,不同排法共 5!种. 而 4 卷一套放在一起共有 4!种不同排法,3 卷一套的放在一起共有 3!种不同排法,所以

$$P(C)=P(AB)=\frac{5!\times4!\times3!}{10!}=\frac{1}{210}.$$

(4) {两套中至少有一套放在一起}$=A\cup B$.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{15}+\frac{1}{30}-\frac{1}{210}=\frac{2}{21}.$$

(5) 这是事件 ABD 的概率,而每一套书按卷次顺序排好,只有 2 种排法(顺排与倒排),故

$$P(ABD)=\frac{5!\times2\times2}{10!}=\frac{1}{7\,560}.$$

1.8 从 5 双不同的鞋子中任取 4 只,求:(1) 没有 2 只是配对的概率=__________;(2) 恰有 2 只是配对的概率=__________.

解 设 A={没有 2 只配对},B={恰有 2 只配对},从 5 双不同的鞋子中任取 4 只基本事件总数$=C_{10}^4$.

(1) 从 5 双中先取 4 双,再每双中取 1 只共有 $C_5^4 2^4$ 种方法,

$$P(A)=\frac{C_5^4 2^4}{C_{10}^4}=\frac{8}{21}.$$

(2) 从 5 双中先取 1 双作配对共有 C_5^1 种方法,再从其余 4 双中取 2 双,每双中取 1 只共有 $C_4^2 2^2$ 种方法,B 包含基本事件数$=C_5^1C_4^2 2^2$,

$$P(B)=\frac{C_5^1C_4^2 2^2}{C_{10}^4}=\frac{4}{7}.$$

1.9 将一枚硬币独立掷两次,令:A_1={掷第一次出现正面},A_2={第二次出现正面},A_3={正、反面各出现一次},A_4={正面出现两次},则正确的是( ).

(A) A_1,A_2,A_3 相互独立; (B) A_2,A_3,A_4 相互独立

(C) A_1,A_2,A_3 两两独立; (D) A_2,A_3,A_4 两两独立.

解 $P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{2}$,$P(A_4)=\frac{1}{4}$,

又 $$A_1A_2A_3=\varnothing,\quad A_3\cdot A_4=\varnothing.$$

(A) $P(A_1A_2A_3)=0\neq P(A_1)P(A_2)P(A_3)=\frac{1}{8}$，所以 A_1,A_2,A_3 不独立；

(B) $P(A_1A_2A_4)=0\neq P(A_2)P(A_3)P(A_4)=\frac{1}{16}$，所以 A_2,A_3,A_4 不独立；

(C) $P(A_1A_2)=\frac{1}{4}=P(A_1)P(A_2)$，$P(A_1A_3)=P(\text{第一次正且第二次反})=\frac{1}{4}=P(A_1)P(A_3)$；

$P(A_2A_3)=P(\text{第二次正且第一次反})=\frac{1}{4}=P(A_2)P(A_3)$，所以 A_1,A_2,A_3 两两独立；

(D) $P(A_3A_4)=0\neq P(A_3)P(A_4)=\frac{1}{8}$，所以 A_2,A_3,A_4 不两两独立.

评注 要注意三个事件相互独立的定义：A_1,A_2,A_3 两两独立，且 $P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)$ 时称 A_1,A_2,A_3 相互独立.

1.10 有 5 个人，每人随机上 3 节车厢，求每节车厢至少 1 人的概率.

解 1 设 $A=\{\text{每节车厢至少 1 人}\}$，每人随机上 3 节车厢基本事件总数 $n=3^5$，每节车厢至少 1 人有两种情况，第 1 种 3 节车厢分别为 3，1，1 人，第 2 种为 2，2，1 人，对第 1 种，先确定 3 人的车厢和 3 人有 $3C_5^3$ 种方法，剩下的 2 人分到 2 个车厢有 C_2^1 种方法，因此第 1 种情况包含的基本事件数 $=3C_5^3C_2^1=60$，与此相类似，第 2 种情况包含的基本事件数 $=3C_5^1C_4^2=90$，A 包含的基本事件数 $=60+90=150$.

$$P(A)=\frac{150}{3^5}=\frac{50}{81}.$$

解 2 上述 A 的逆事件表示至少一节车厢无人，设 $B_k=\{\text{第 } k \text{ 节无人}\}$ $(k=1,2,3)$，则

$$P(B_k)=\frac{2^5}{3^5},P(B_jB_k)=\frac{1}{3^5}\ (j\neq k),P(B_1B_2B_3)=0,$$

$$\begin{aligned}P(\overline{A})&=P(B_1+B_2+B_3)\\&=P(B_1)+P(B_2)+P(B_3)-P(B_1B_2)-\\&\quad P(B_2B_3)-P(B_1B_3)+P(B_1B_2B_3)\\&=\frac{2^5}{3^5}+\frac{2^5}{3^5}+\frac{2^5}{3^5}-\frac{1}{3^5}-\frac{1}{3^5}-\frac{1}{3^5}+0=\frac{31}{81}.\end{aligned}$$

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{31}{81}=\frac{50}{81}.$$

评注 古典概型中求事件 A 的概率，一是要求基本事件总数，对它要注意它的前提：每个基本事件要求等概. 二是要求 A 所包含的基本事件数，为此要善于分

类和分步，并熟练运用排列组合的公式，计数时要注意防止重复和遗漏（如 4 人分到两节车厢中去，若一节 3 人，一节 1 人共有 $2C_4^3C_1^1=8$ 种分法；若每节 2 人，则共有 $C_4^2C_2^2=6$ 种分法，而不是 12 种！）. 碰到 $P(A)$ 不易计算时，先求 A 的逆事件的概率往往是好办法. 另外，在解 2 中要注意体会如何选取 B_k，并用 B_k 的和表示 $\overline{A}$ 的方法.

1.11 一间宿舍中有 4 位同学的眼镜都放在桌上，每人任取一副，求每人都没有拿到自己眼镜的概率.

解 设 $B_k=\{$第 k 位拿到自己眼镜$\}$，4 人拿眼镜的基本事件数为 $4!$.

$$P(B_k)=\frac{3!}{4!}=\frac{1}{4},\quad P(B_kB_j)=\frac{2!}{4!}=\frac{1}{12}(k\neq j),$$

$$P(B_kB_jB_i)=\frac{1}{4!}=\frac{1}{24}\quad(k,j,i\text{ 彼此不等}),$$

$$P(B_1B_2B_3B_4)=\frac{1}{4!}=\frac{1}{24},$$

$$\begin{aligned}P(B_1+B_2+B_3+B_4)&=\sum_{k=1}^{4}P(B_k)-\sum_{1\leqslant k<j\leqslant 4}P(B_kB_j)+\\&\quad\sum_{1\leqslant k<j<i\leqslant 4}P(B_kB_jB_i)-P(B_1B_2B_3B_4)\\&=4\times\frac{1}{4}-6\times\frac{1}{12}+4\times\frac{1}{24}-\frac{1}{24}=\frac{5}{8}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(\text{每人都没有拿到自己眼镜})&=1-P(B_1+B_2+B_2+B_4)\\&=1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}.\end{aligned}$$

1.12 9 只产品，其中有 2 只次品，7 只正品，平均分装到 3 只不同的盒子中，求 2 只次品不在一只盒子中的概率.

解 1 设 $A=\{2$ 只次品不在一只盒子中$\}$.

9 只产品平均分装到 3 只不同的盒子中，第一只盒子的 3 只产品有 C_9^3 种选法，第二只盒子的 3 只有 C_6^3 种选法，第三只盒子的 3 只产品只有一种选法，所以，基本事件总数 $n=C_9^3C_6^3=1\,680$.

再算 A 的基本事件数：选一只不装次品的盒子及 3 只正品有 $3C_7^3$ 种选法，余下 4 只正品，2 只次品平分到 2 只盒子有 $C_4^2C_2^1$ 种分法，A 包含的基本事件数 $=3C_7^3(C_4^2C_2^1)=1\,260$，则有

$$P(A)=\frac{1\,260}{1\,680}=\frac{3}{4}.$$

解 2 考虑 A 的逆，$\overline{A}=\{2$ 只次品在一只盒子中$\}$，又设 $B_k=\{2$ 只次品都在第

k 只盒子中}$(k=1,2,3)$，B_k 互斥，只考虑第 k 只盒子的选法；第 k 只盒子任选 3 只产品，基本事件总数 $n=C_9^3$，B_k 包含的基本事件数$=C_7^1C_2^2$.

$$P(B_k)=\frac{C_7^1C_2^2}{C_9^3}=\frac{1}{12},$$

$$P(\overline{A})=P(B_1)+P(B_2)+P(B_3)=\frac{3}{12}=\frac{1}{4},$$

$$P(A)=1-P(\overline{A})=\frac{3}{4}.$$

评注 对同一个问题，从不同的角度可以有不同的基本事件选法，但要保证基本事件等概.

另外，从近年的考题看，复杂的古典概率不是考试的重点，只要适当复习即可.

1.13 甲、乙两人相约 8 点到 9 点之间在某处会面，先到者最多等半小时离开. 若每人在该时段内到达的时间是等可能的，求两人能会面的概率.

解 以 8 点作坐标原点，设甲、乙到达的时间分别为 x,y，则

$$0\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant y\leqslant 1.$$

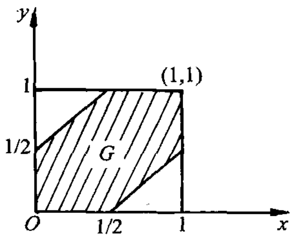

图 1.1

样本空间 Ω 是边长为 1 的正方形，会面的条件是

$$|x-y|\leqslant\frac{1}{2},$$

即(x,y)落在如图 1.1 所示区域 G 内. 所以甲、乙能会面的概率

$$P=\frac{G\text{ 的面积}}{\Omega\text{ 的面积}}=\frac{1-2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{1}=\frac{3}{4}.$$

评注 求几何概率一般先要确定样本空间 Ω 的区域，再根据事件的条件列出应满足的不等式，进而确定事件所在的区域及其面积，然后代公式.

***1.14** 把长为 a 的线段在任意两点处折断成 3 段，求它们可以构成一个三角形的概率.

解 设折成的 3 段长分别为 $x,y,a-x-y$，则 Ω 为满足

$$x>0,\quad y>0,\quad a-x-y>0$$

的区域. 3 段可构成三角形的条件是

$$x+y>a-x-y,$$
$$x+(a-x-y)>y,$$
$$y+(a-x-y)>x,$$

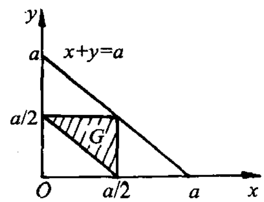

图 1.2

即(x,y)落在如图 1.2 所示的区域G内. 所以可构成一个三角形的概率：

$$P=\frac{G\text{ 的面积}}{\Omega\text{ 的面积}}=\frac{\frac{1}{8}a^2}{\frac{1}{2}a^2}=\frac{1}{4}.$$

1.15 甲袋中有 3 只白球 5 只黑球，乙袋中有 4 只白球 6 只黑球，先从甲袋任取一球放入乙袋，再从乙袋任取一球放回甲袋. 求：(1) 甲袋白球数增加的概率；(2) 甲袋白球数不变的概率；(3) 从乙袋取得一球是白球的概率；(4) 已知从乙袋取得一球是白球，从甲袋取得白球的概率.

解 设B={从甲袋取得白球放入乙袋}，A={从乙袋取得白球放入甲袋}.

(1) $P(\text{甲袋白球数增加})=P(\bar{B}A)=P(\bar{B})P(A|\bar{B})=\frac{5}{8}\times\frac{4}{11}=\frac{5}{22}$.

(2) $P(\text{甲袋白球数不变})=P(BA+\bar{B}\bar{A})=P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})$

$$=\frac{3}{8}\times\frac{5}{11}+\frac{5}{8}\times\frac{7}{11}=\frac{25}{44}.$$

(3) 由全概公式：

$$P(A)=P(B)P(A\mid B)+P(\bar{B})P(A\mid\bar{B})$$
$$=\frac{3}{8}\times\frac{5}{11}+\frac{5}{8}\times\frac{4}{11}=\frac{35}{88}.$$

(4) 由贝叶斯公式：

$$P(B\mid A)=\frac{P(B)P(A\mid B)}{P(A)}=\frac{3}{8}\times\frac{5}{11}\div\frac{35}{88}=\frac{3}{7}.$$

评注 若试验可视作分两步进行，如果第一步的不同结果$B_k(k=1,2,\cdots,n)$(它们组成完备组)会影响第二步的结果A，则求A的概率往往要用全概公式；而若已知第二步结果A，求第一步B_k的概率则要用贝叶斯公式.

1.16 若$P(A)P(B)$都大于 0，则不正确的命题是(　).

(A) 若$P(A|B)=P(A|\bar{B})$，则A,B相互独立；

(B) 若A,B相互独立，则$P(A+\bar{B})=1-P(\bar{A})P(B)$；

(C) 若A,B,C相互独立，则A与$B+C$也独立；

(D) 若A,B相互独立，则A与$A+B$也独立.

解 (A) 由条件及比例中的合比定理：

$$\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{P(AB)+P(A\bar{B})}{P(B)+P(\bar{B})}=\frac{P(A)}{1},$$

得
$$P(AB)=P(A)P(B),\text{即 }A,B\text{ 独立}.$$

(B) 由A,B独立，则$A,\bar{B}$也独立，以及独立条件下的加法定理：

$$P(A+\overline{B}) = 1-P(\overline{A})P(B).$$

(C) $P[A(B+C)]=P(AB+AC)=P(AB)+P(AC)-P(ABC)$

$$\begin{aligned}&=P(A)P(B)+P(A)P(C)-P(A)P(BC)\\&=P(A)[P(B)+P(C)-P(BC)]\\&=P(A)P(B+C),\end{aligned}$$

故 A 与 $B+C$ 独立.

(D) 因 $A\subset A+B$,得 $P[A(A+B)]=P(A)$,它一般不等于$P(A)P(A+B)$,故 A 与 $A+B$ 不独立,选(D).

1.17 已知 $P(A\mid B)=0.3$, $P(B\mid A)=0.4$, $P(\overline{A}\mid\overline{B})=0.7$,则 $P(A)=$__________.

解 1 $P(A|\overline{B})=1-P(\overline{A}|\overline{B})=1-0.7=0.3$,

得
$$P(A\mid\overline{B}) = P(A\mid B),$$
所以 A,B 独立(见 1.16),
$$P(A) = P(A\mid B) = 0.3.$$

评注 解 1 很巧妙,很简单,但要看出 A,B 独立有一定难度,而且若将题中数字 $P(A|B)=0.7$ 改为 0.8,此法就失效了.下面给出一般的方法,它的运算量较大,但思考简单,且可解决 0.7 改为任何数字的问题,以及一般涉及两个事件的问题.

解 2 此法的思路是两个事件的概率只有 3 个独立参数,比如选 $P(A)=a$, $P(B)=b$, $P(AB)=c$,那么这两个事件的其他组合都可以由 a,b,c 表示出来,已知 3 个条件就可以列出 3 个方程,从而解出 a,b,c.

设 a,b,c 如上述,由已知

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{c}{b}=0.3,$$

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{c}{a}=0.4,$$

$$P(\overline{A}\mid\overline{B})=\frac{P(\overline{A}\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{1-P(A+B)}{1-P(B)}=\frac{1-a-b+c}{1-b}=0.7.$$

由上面三个方程容易解得 $a=0.3$,$b=0.4$,$c=0.12$,即 $P(A)=0.3$.

又如要证:若 $P(A|B)+P(\overline{A}|\overline{B})=1$,则 A,B 独立.由条件

$$\begin{aligned}&P(A\mid B)+P(\overline{A}\mid\overline{B})\\&=\frac{P(AB)}{P(B)}+\frac{P(\overline{AB})}{P(\overline{B})}=\frac{P(AB)}{P(B)}+\frac{1-P(A+B)}{1-P(B)}\\&=\frac{c}{b}+\frac{1-a-b+c}{1-b}=1,\end{aligned}$$