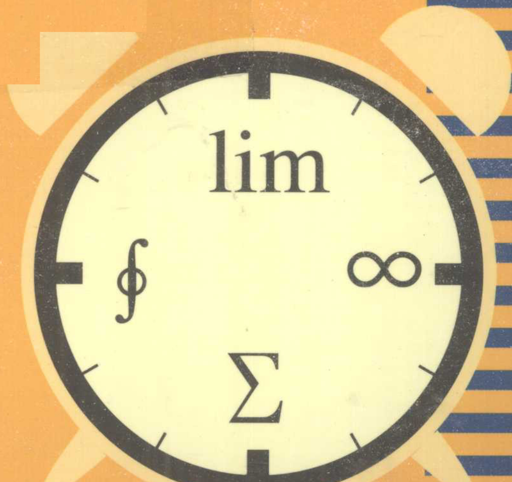
大学生数学竞赛习题精讲

陈兆斗　郑连存　王　辉　李为东　编



清华大学出版社

大学生数学竞赛习题精讲

陈兆斗　郑连存　王　辉　李为东　编

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书依据首届全国高校大学生数学竞赛中关于非数学类的竞赛内容，分极限与连续、微分学、积分学、无穷级数、常微分方程五个专题，对竞赛所涉及的知识点和考点进行分类整合，精选了120多道典型例题和600多道习题并进行讲解或解答，化解难点．这些题目中，既有基础题目，也有综合面广或技巧性强的题目．为使读者了解数学竞赛（非数学类）的赛题难度，书中给出了首届全国大学生数学竞赛试题（初试、决赛）和近5年北京市大学生数学竞赛的试题．

本书中的题目由易到难编排，很适合作为大学生数学竞赛辅导课程的教材．由于每题都有解答，它也适合学生自学之用．

图书在版编目(CIP)数据

大学生数学竞赛习题精讲/陈兆斗等编．--北京：清华大学出版社，2010.8

ISBN 978-7-302-23222-3

Ⅰ．①大…　Ⅱ．①陈…　Ⅲ．①高等数学－高等学校－解题　Ⅳ．①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第127241号

责任编辑：刘　颖
责任校对：王淑云
责任印制：孟凡玉
出版发行：清华大学出版社　　**地　址**：北京清华大学学研大厦A座
http://www.tup.com.cn　　**邮　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京国马印刷厂
经　销：全国新华书店
开　本：185×230　**印　张**：25　**字　数**：546千字
版　次：2010年8月第1版　**印　次**：2010年8月第1次印刷
印　数：1～4000
定　价：38.00元

产品编号：035951-01

前言

FOREWORD

数学竞赛是数学教育的一个重要组成部分，具有悠久的历史．大学生数学竞赛在国际上已有很长的历史．近年来在国内很多地区也分别举办了大学生数学竞赛，其中北京市大学生数学竞赛历史最久，已经连续举办了 20 届．综合各地区多年来进行大学生数学竞赛的经验和需求，2009 年 10 月举行了全国首届大学生数学竞赛的初赛，2010 年 5 月又在首届初赛的基础上进行了决赛（http://www.cmathc.com）．该项最新的全国性赛事分为非数学专业和数学专业两类，并将每年举行．这些活动促进了数学课程的改革和建设，极大地增强了大学生学习数学的兴趣．配合这种形势的需要，我们编写了此书．

本书是针对非数学专业的数学竞赛编写的，此竞赛涉及的内容仅限于理工科大学高等数学（微积分）课程的知识范围，书中的例题和习题的选配也仅限于此．书中很多题目选自国内、外大学生数学竞赛的一些特色赛题．考虑到数学竞赛综合性的特点，全书分为 5 章（极限与连续、微分学、积分学、无穷级数、常微分方程），共有 120 多道例题和 600 多道习题．这些题目是作者在多年教学实践和有关辅导过程中总结和精选的，它们都被作者反复斟酌和编写，并加以分类整合．依照教学上由浅入深的原则，习题从易到难被分为三类．第一类题是有关内容的基本方法和常用技巧，它们被置于每节后的练习题中，难度不算太大；第二类题有一定的技巧性和综合性，其难度不超过一般的考研数学试题；第三类题具有很高的难度和技巧，往往是一些挑战性的题目．第二、三类题安排在每章最后一节的综合题中，其中第三类题被标以“*”号．因此每章的综合题是本书重要的部分．

数学竞赛中的题目大多对解题的技巧性和方法的综合性要求较高，所以书中一些习题解法的章节跨度很大．为了便于

读者对自己所做的题目进行检验，书中安排了“各章习题解答”的内容.但我们建议读者通过独立思考来完成各章的习题，而只是将书中的解答作为一种检验方式，或许你的解法比书中所给的方法更简单、更直观，这对于提高大学生的数学素质是一个很好的训练，这也正是本书的特色.

为了使读者了解大学生数学竞赛(非数学类)的赛题难度，在书的附录中给出了首届全国大学生数学竞赛试题(初试、决赛)和比较有代表性的北京市大学生数学竞赛的近5年的试题.

本书可作为大学生数学竞赛的辅导教材(约40学时)，讲授时每一节的例题应作为讲解的重点，辅之以选讲与之有关的一些习题.每节的例题涵盖了有关内容常见习题类型的求解思路、方法、技巧等，它们是被作者精心选择的.每一章的“内容要点”简略地给出了这一章所涉及的知识内容，如定义、定理、性质、公式等，以便解题时查阅.由于书中的每一道题都附有解答，这也为学生自学提供了极大的方便.

本书的第1章、第4章由陈兆斗老师编写，第2章由李为东老师编写，第3章由王辉老师编写，第5章由郑连存老师编写.作者中一些教师曾多次从事北京市大学生数学竞赛的命题工作，并有长期的竞赛辅导和考研辅导的教学经验.书中的习题有一些是教师原创的，有些是摘自其他一些参考资料.由于此书不同于一般的教学参考书，若有不当之处请读者指正，我们的联系邮箱为 zkchxy@163.com.

作者

2010年7月

目 录

CONTENTS

第1部分 例题精讲与习题

第 2 部分 各章习题解答

第1部分

例题精讲与习题

第1章

极限与连续

内容要点

1. 极限的定义

极限分为函数 $y=f(x)$ 极限和数列 $\{x_n\}$ 极限.其中数列可以看作是定义在正整数集上的函数 $x_n=f(n)(n=1,2,\cdots)$.各种极限的基本含义是自变量的变化趋势引起的因变量的变化趋势.

自变量的变化趋势共有七种类型：

$n\to\infty$，$x\to x_0$（双侧极限），$x\to x_0^+$（右极限），$x\to x_0^-$（左极限），$x\to\infty$（双侧极限），$x\to+\infty$，$x\to-\infty$；

因变量 α 的变化趋势共有四种类型：

$\alpha\to A$（有限数），　$\alpha\to+\infty$，　$\alpha\to-\infty$，　$\alpha\to\infty$.

因变量与自变量组合的各种极限类型共有 28 种.当且仅当 $\lim\alpha=A$（有限数）时才称极限存在.

注　由于在一般的高等数学课程中，不要求读者掌握和运用“ε-N”和“ε-δ”语言来定义极限，与其相关的极限定义此处省略.

2. 极限的性质

(1) 双侧极限与单侧极限

① $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的充要条件是左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 与右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 都存在且相等；

② $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在的充要条件是极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 都存在且相等.

总而言之，双侧极限存在的充要条件为两个单侧极限都存在且相等.

(2) 有界性

① 若数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，则存在 $M>0$，对于一切 n 都有 $|x_n|\leqslant M$ 成立；

② 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，则存在$\delta>0$及$M>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时就有$|f(x)|\leqslant M$成立.

(3) 保号性

① 若存在$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>B$，则存在$\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时就有$f(x)>B$成立；

② 若存在$\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时$f(x)\geqslant B$，并且存在着极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则$A\geqslant B$.

注 函数极限的有界性也称为局部有界性；所有极限的保号性都是局部保号的. 由于极限类型的多样性，请读者自述其他类型极限的局部有界性和局部保号性.

3. 极限的四则运算

设因变量α,β有相同的自变量，并且在自变量的同一变化趋势中极限$\lim\alpha,\lim\beta$都存在，则：

(1) $\lim(\alpha\pm\beta)=\lim\alpha\pm\lim\beta$；

(2) $\lim(\alpha\cdot\beta)=\lim\alpha\cdot\lim\beta$；

(3) $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\lim\alpha}{\lim\beta}$，其中$\lim\beta\neq0$.

4. 单调有界原理

(1) 若$\{x_n\}$是单调有界数列，则极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

(2) 若$\{x_n\}$单调增加且无界，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$.

(3) 若$\{x_n\}$单调减小且无界，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty$.

5. 夹逼准则

设α,β,γ是自变量相同的三个因变量，在自变量的同一变化趋势中满足$\alpha\leqslant\gamma\leqslant\beta$，且$\lim\alpha=\lim\beta=A$，则$\lim\gamma=A$.

6. 无穷小与无穷大

当因变量$\alpha\to0$时，称α为无穷小；当因变量$\alpha\to\infty$时，称α为无穷大.

(1) 有限个无穷小的和(乘积)是无穷小；

(2) 有限个无穷大的乘积是无穷大；

(3) 有界函数与无穷小的乘积是无穷小；

(4) 有界函数与无穷大的和是无穷大；

(5) 无穷大的倒数是无穷小，无穷小($\alpha\neq0$)的倒数是无穷大.

7. 洛必达法则

(1) $\dfrac{0}{0}\left(\text{或}\ \dfrac{\infty}{\infty}\right)$型不定式的洛必达法则

设函数$f(x),g(x)$可导，其中$g'(x)\neq0$，且$\lim f(x)=\lim g(x)=0$(或∞)，如果

$\lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$存在(或为$\infty$),则 $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

(2) $\dfrac{\infty}{\infty}$型不定式洛必达法则的推广

设 $f(x)$,$g(x)$可导,$g'(x)\neq 0$,$\lim g(x)=\infty$,如果 $\lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$存在或为$\infty$,则

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(3) 设α,β都是自变量x的函数,则下列不定式都可转化为$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$型的不定式,从而可使用洛必达法则来求极限.

① $0\cdot\infty$型的转化:若 $\alpha\to 0$,$\beta\to\infty$,则 $\alpha\cdot\beta=\dfrac{\alpha}{\frac{1}{\beta}}$转化为$\dfrac{0}{0}$型,或 $\alpha\cdot\beta=\dfrac{\beta}{\frac{1}{\alpha}}$转化为$\dfrac{\infty}{\infty}$型.

② $\infty\pm\infty$型的转化:若 $\alpha\to\infty$,$\beta\to\infty$,则 $\alpha\pm\beta=\dfrac{\frac{1}{\beta}\pm\frac{1}{\alpha}}{\frac{1}{\alpha\beta}}$,转化为 $\dfrac{0}{0}$型.

③ 1^{∞}型的转化:若 $\alpha\to 1$,$\beta\to\infty$,由 $\alpha^{\beta}=e^{\beta\ln\alpha}$,则 $\beta\ln\alpha$ 为 $0\cdot\infty$型,最终转化为 $\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$型.

④ 0^0 与∞^0 型都用公式 $\alpha^{\beta}=e^{\beta\ln\alpha}$最终转化为$\dfrac{0}{0}$或 $\dfrac{\infty}{\infty}$型.

8. 等价无穷小的代换

给定因变量 γ 及两对等价无穷小 $\alpha\sim\alpha'$,$\beta\sim\beta'$. 则:

(1) 分式型代换:$\lim \dfrac{\alpha}{\beta}=\lim \dfrac{\alpha'}{\beta'}$;

(2) 乘积型代换:$\lim\alpha\gamma=\lim\alpha'\gamma$;

(3) 幂指型代换:$\lim(1+\alpha)^{\frac{1}{\beta}}=\lim(1+\alpha')^{\frac{1}{\beta'}}$.

注 以上各个等式两端的极限同时存在或不存在.

9. 常用的等价无穷小

当 $x\to 0$ 时,下列各对变量是等价无穷小:

(1) $\sin x\sim x$; (2) $\tan x\sim x$; (3) $1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$; (4) $\arcsin x\sim x$;

(5) $\arctan x\sim x$; (6) $e^x-1\sim x$; (7) $\ln(1+x)\sim x$; (8) $(1+x)^{\lambda}-1\sim\lambda x(\lambda\neq 0)$.

10. 无穷小阶的运算

设 m,n 是正整数，$x\to 0$ 时，$f(x)=o(x^m)$，$g(x)=o(x^n)$，其中 $m>n$，则

(1) $f(x)=o(x^n)$， 记为 $o(x^m)=o(x^n)$.

(2) $f(x)\pm g(x)=o(x^n)$， 记为 $o(x^m)\pm o(x^n)=o(x^n)$.

(3) $f(x)g(x)=o(x^{m+n})$， 记为 $o(x^m)\times o(x^n)=o(x^{m+n})$.

(4) $\dfrac{f(x)}{x^n}=o(x^{m-n})$， 记为 $o(x^m)\div x^n=o(x^{m-n})$.

注 应熟练掌握以上运算. 上列各式中等号的意义为“左边等于右边”，而反之不然.

11. 归结原则(Heine 定理)

(1) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ 的充要条件为：

对于任何趋向于 a 的数列 $\{x_n\}$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$，其中 $x_n\neq a$.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 的充要条件为：对于任何趋向于 $+\infty$ 的数列 $\{x_n\}$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

(3) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$ 的充要条件为：

对于任何趋向于 a 的数列 $\{x_n\}$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\infty$，其中 $x_n\neq a$.

注 Heine 定理是沟通数列极限与函数极限的桥梁，这使得很多数列极限可以转化为函数极限来讨论. 请读者自述其他类型极限的 Heine 定理.

12. 子数列

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 的充要条件是对于 $\{x_n\}$ 任何子数列 $\{x_{k_n}\}$ 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{k_n}=A$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$ 的充要条件是对于 $\{x_n\}$ 任何子数列 $\{x_{k_n}\}$ 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{k_n}=\infty$.

(3) 设数列 $\{x_n\}$ 被分为 m 个互不相交的子数列，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 的充要条件是这些子数列的极限都是 A.

特别有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=A$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=A$.

13. 施笃兹定理(Stolz)

设数列 $\{b_n\}$ 单调增加且 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$，如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}$ 存在或为 $\pm\infty$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}$.

注 施笃兹定理被称为数列极限的洛必达法则(可参见菲赫金哥尔茨《微积分学教程》第一卷)

14. 常用极限

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x=\mathrm{e}^a$， $\lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^a$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{x}=a$；

(3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to -\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$；

(4) $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$，$\lim\limits_{x\to +\infty}\ln x=+\infty$；

(5) 若 $a>1$,则 $\lim\limits_{x\to +\infty}a^x=+\infty$，$\lim\limits_{x\to -\infty}a^x=0$； 若 $0<a<1$,则 $\lim\limits_{x\to +\infty}a^x=0$，$\lim\limits_{x\to -\infty}a^x=+\infty$；

(6) 对任何 $a>0$,都有 $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^a}{e^x}=0$；

(7) 对任何 $a>0$,都有 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^a\ln x=0$；

(8) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x=1$；

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\begin{cases}\infty, n>m,\\ 0, n<m,\\ \dfrac{a_n}{b_m}, n=m;\end{cases}$

(10) $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=\begin{cases}0, |q|<1,\\ \infty, |q|>1;\end{cases}$

(11) 设 $a>0$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$；

(12) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$；

(13) 下列极限不存在也不为∞：

$$\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}},\quad \lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x},\quad \lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x},\quad \lim_{x\to\infty}\sin x,\quad \lim_{x\to\infty}\cos x.$$

15. 一元函数的连续性

(1) 设 $f(x)$在点 x_0 的某邻域内有定义,增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. 如果$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(f(x_0+\Delta x)-f(x_0))=0$,则称 $f(x)$在点 x_0 连续.

(2) $f(x)$在点 x_0 连续的充要条件是$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

(3) 若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$,则称 $f(x)$在点 x_0 右连续,若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$,则称 $f(x)$在点 x_0 左连续.

$f(x)$在点 x_0 连续的充要条件是 $f(x)$在点 x_0 左连续且右连续.

(4) 初等函数在其定义区间内处处连续.

16. 连续函数的性质

(1) 闭区间上连续函数的性质：设 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,则下列结论成立.

① 最值定理

$f(x)$在闭区间$[a,b]$上有最大值和最小值.从而 $f(x)$在$[a,b]$上有界.

② 介值定理

介于 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上最大值 M 和最小值 m 之间的一切数值 c,至少存在一点 $\bar{x}\in[a,b]$,使得 $f(\bar{x})=c$.

③ 零点定理

若 $f(a)f(b)<0$,则至少存在一点 $x_0\in(a,b)$使得 $f(x_0)=0$.

(2) 若函数 $f(x)$在区间 I 上连续且 $f(x)\neq 0$,则恒有 $f(x)>0$ 或恒有 $f(x)<0$.

(3) 设函数 $f(x)$在区间 I 上连续,如果对于任何 $x_1,x_2\in I$ 且 $x_1\neq x_2$,总有 $f(x_1)\neq f(x_2)$,则 $f(x)$是区间 I 上的单调函数.

1.1 极限

1. 例题选讲

例 1 设 $a>0$,求极限$\lim\limits_{n\to\infty}n^2(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a})$.

解 方法 1 对函数 $y=a^x$ 在$\left[\dfrac{1}{n+1},\dfrac{1}{n}\right]$上应用拉格朗日中值定理可知

$$\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a}=a^{\xi_n}\ln a\cdot\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right),$$

其中 $\dfrac{1}{n+1}<\xi_n<\dfrac{1}{n}$. 当 $n\to\infty$时,则 $\xi_n\to 0$,从而得

$$原极限=\lim_{n\to\infty}a^{\xi_n}\ln a\cdot\frac{n^2}{n(n+1)}=\ln a.$$

方法 2 利用乘积型的等价无穷小的代换.因

$$a^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}-1\sim\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\ln a(n\to\infty),$$

故

$$原极限=\lim_{n\to\infty}n^2a^{\frac{1}{n+1}}(a^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}-1)=\lim_{n\to\infty}n^2a^{\frac{1}{n+1}}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\ln a=\ln a.$$

评注 等价无穷小的代换是求极限中常用的方法.读者应掌握从已知的等价无穷小中派生出各种等价无穷小的方法.本题中,由 $e^x-1\sim x$ 变为 $a^x-1=e^{x\ln a}-1\sim x\ln a$,再令 $x=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$而派生出来的.

例 2 用施笃兹定理(见本章内容要点)证明极限的平均值定理:

(1) 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在或为$\pm\infty$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

(2) 设 $a_n>0$ $(n=1,2,\cdots)$. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在或为 $+\infty$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

证 (1) 由施笃兹定理得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)-(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})}{n-(n-1)}=\lim_{n\to\infty}a_n$$

(2) 先将 $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ 变形为 $\mathrm{e}^{\frac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n}{n}}$,再由施笃兹定理得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\exp\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n}{n}\right)=\exp\left(\lim_{n\to\infty}\ln a_n\right)=\lim_{n\to\infty}a_n.$$

评注 (1) 中 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ 称为算术平均值的极限,(2)中 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ 称为几何平均值的极限.

例 3 设 $c>0$, $x_1=\sqrt{c}$, $x_{n+1}=\sqrt{c+x_n}$ $(n=1,2,\cdots)$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 方法 1 先用数学归纳法证明数列 $\{x_n\}$ 单调增加. 事实上,因 $x_2-x_1>0$,假定 $x_{k+1}-x_k>0$,由

$$x_{k+2}-x_{k+1}=\frac{x_{k+1}-x_k}{\sqrt{c+x_{k+1}}+\sqrt{c+x_k}},$$

可知 $x_{k+2}-x_{k+1}>0$,故该数列单调增加.

再用数学归纳法证明 $\{x_n\}$ 有上界 $\sqrt{c}+1$. 事实上, $x_1<\sqrt{c}+1$,假定 $x_k<\sqrt{c}+1$,则

$$x_{k+1}<\sqrt{c+\sqrt{c}+1}<\sqrt{(\sqrt{c}+1)^2}=\sqrt{c}+1.$$

于是该数列有上界. 由单调有界原理知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,设此极限为 a. 在递推公式两端取极限得到 $a=\sqrt{c+a}$. 解此方程得到 $a=\dfrac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$.

方法 2 假设存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则有

$$a=\sqrt{c+a}=\frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}>1.$$

只需证明 $|x_n-a|\to0(n\to\infty)$. 事实上由

$$\begin{aligned}|x_n-a|&=|\sqrt{c+x_{n-1}}-\sqrt{c+a}|\\&=\left|\frac{x_{n-1}-a}{\sqrt{c+x_{n-1}}+\sqrt{c+a}}\right|\leqslant\left|\frac{x_{n-1}-a}{\sqrt{a}}\right|\leqslant\cdots\leqslant|x_1-a|\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^{n-1}\to0,\end{aligned}$$

可知结论成立.

评注 很多数列的定义都是由递推公式 $x_{n+1}=f(x_n)$ 给出的,其中 $f(x)$ 通常是连续函数. 如果有 $a=f(a)$ 成立,则称 a 是 $f(x)$ 的不动点,它是方程 $x=f(x)$ 的根. 当递推公式所确定的数列 $\{x_n\}$ 有极限时,该极限值必是 $f(x)$ 的不动点. 从几何上讲,不动点 a 是直线 $y=$