

厦门大学  
中国科技思想研究文库  
吴文俊题

主编 郭金彬 徐梦秋  
顾问 吴文俊 席泽宗

# 二十世纪中外数学思想交流

刘秋华 / 著

福建省社会科学研究“十一五”规划重点项目  
湖北师范学院人才引进和湖北师范学院学术著作出版基金资助项目  
厦门大学国学研究院资助项目

中国科技思想研究文库  
二十世纪中外数学思想交流

科学出版社  
北京

## 内 容 简 介

本书是《中国科技思想研究文库》之一，是国内第一部系统探讨 20 世纪中外数学及其思想交流的学术性专著。本书以 20 世纪中外数学交流的重大事件和重要人物为中心，全面展示了 20 世纪中外数学思想交流的曲折历程，剖析了 20 世纪中外数学思想交流在不同阶段的特色。本书史论结合、资料丰富，全面吸收借鉴了同行的有关研究成果，并且在史料上有不少新发现，提出了许多独到的学术观点。

本书可供数学史、数学、科学史工作者以及对此感兴趣的人士阅读、参考。

### 图书在版编目 (CIP) 数据

二十世纪中外数学思想交流 / 刘秋华著 . —北京 : 科学出版社,  
2010.5

(中国科技思想研究文库)

ISBN 978-7-03-027122-8

I . ①二… II . ①刘… III . ①数学史 - 世界 - 20 世纪 IV . ①011

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 056716 号

丛书策划：孔国平 / 责任编辑：孔国平 郭勇斌 楚飞 房阳

责任校对：郑金红 / 责任印制：赵德静 / 封面设计：陈敬

编辑部电话：010-64035853

E-mail: houjunlin@mail.sciencep.com

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

<http://www.sciencep.com>

双 青 印 刷 厂 印 刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2010 年 5 月第 一 版 开本：850 × 1168 1/32

2010 年 5 月第一次印刷 印张：13 5/8

印数：1—3 000 字数：334 000

定 价：45.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

## 总序

20多年来郭金彬教授在中国科技思想史研究领域辛勤耕耘，成绩斐然，他的《中国科学百年风云——中国近现代科学思想史论》(1991年)和《中国传统科学思想史论》(1993年)二书相互辉映，在国内外产生了不小的影响。近年来他在厦门大学哲学系科学技术哲学博士点，与系主任(人文学院副院长)徐梦秋教授合作，组织编写《中国科技思想研究文库》。现在这套丛书的第一批书稿即将付印，真是可喜可贺。从已有的书稿内容来看，我觉得这套丛书的问世，将会把中国科技思想史的研究大大地向前推进一步。《中国传统数学思想史》(郭金彬、孔国平著)、《道教科技与文化养生》(詹石窗著)、《中国技术思想史论》(王前著)、《中国现代科学思潮》(李醒民著)、《先秦名辩学及其科学思想》(周昌忠著)、《管子的科技思想》(乐爱国著)、《性别视角中的中国古代科技》(刘兵著)……从这些书名和作者就可以窥见这套丛书的阵容和水平了。这批作者都是对他们所写的专题深有钻研的专家，而且题目分布面很广，几乎涵盖了中国科技思想史的方方面面。

1980年10月中国科学技术史学会成立，我向大会提交了一份关于开展中国科技思想史研究的报告。这篇报告后来提炼成“中国科学思想史的线索”，发表在《中国科技史料》1982年第2期上。在这篇文章中我提出，科学思想史的研究任务可以分为以下五个相互联系的方面：

第一,以自然科学发展各个阶段为对象,研究每个阶段人们对自然界有哪些主要的看法(自然观),对科学和技术有哪些主要看法(科学观),这些看法与当时的阶级斗争、生产斗争和科学发展水平有什么关系,与当时的各种哲学学派有什么关系,以及对当时和后来的科学发展所起的影响。

第二,以人为对象,研究重要科学家所处的社会环境、所受的教育、所受的哲学学派的影响,做出重大贡献时的思想过程和研究方法。

第三,研究自然科学中一些基本概念的形成和发展。科学上的新飞跃,往往开始于新概念的出现。

第四,研究自然科学中一些重要理论的形成过程,包括建立步骤和经历的曲折道路,以及今天所达到的水平和面临的问题。

第五,研究建立科学概念和科学理论时所使用的方法。

中国科学思想史的研究,就是根据以上五项任务,把中国的经、史、子、集和各种各样的文献,重新阅读一遍,写出一系列的专题研究。这些专题研究的对象可以是一本本著作(如《管子》的科学思想)、一个个人(如沈括的科学思想)、一个个概念(如“气”)、一个个理论(如道家的养生理论)、一个个学科(如中国数学思想史),也可以断代研究(如中国近现代科学思想史),并希望能在专题

研究的基础上，概括出一本简明扼要的、符合历史本来面目《中国科学思想史》。

从那时以来，这 20 多年间中国科学思想史的研究在国内有很大发展，综合性的著作除郭金彬先生的两本外，据我所知还有：

- (1) 李申：《中国古代哲学和自然科学》（从先秦到魏晋南北朝，1989 年；隋唐至清代，1993 年），北京：中国社会出版社。
- (2) 李约瑟：《中国科学技术史》第 2 卷《科学思想卷》（何兆武等译，1990 年），北京：科学出版社。
- (3) 董英哲：《中国科学思想史》，1990 年，西安：陕西人民出版社。
- (4) 李瑶：《中国古代科技思想史稿》，1995 年，西安：陕西师范大学出版社。
- (5) 朱亚宗：《中国科技批评史》，1995 年，长沙：国防科学技术大学出版社。
- (6) 曾近义：《中西科学技术思想比较》，1995 年，广州：广东高等教育出版社。
- (7) 袁运开、周瀚光主编：《中国科学思想史》（上，1998 年；中，2000 年；下，2001 年），合肥：安徽科学技术出版社。
- (8) 席泽宗主编：《中国科学技术史·科学思想卷》，2001 年，北京：科学出版社。

与此相比，专题研究的文章和著作，虽然比改革开放以前是大大增加了，但还是显得少了一些，不能尽如人意。这套丛书的出版，则会改变这一局面。20 多年前我

的一些设想,将要由厦门大学哲学系和科学出版社变成现实,我由衷地感到高兴,故愿为序。

自 1995 年党中央提出“科教兴国”战略以来,科学的内涵已不单指科技成果,如相对论、DNA 双螺旋结构、信息技术等,还包括科学精神、科学思想和科学方法。弘扬科学精神,倡导科学思想,传播科学方法,普及科学知识已成为提高全民科学文化素质、建设社会主义新文化的主旋律。“子在川上曰:逝者如斯夫,不舍昼夜。”《论语·子罕》篇引述孔子的这一句话,生动地描述了时间的连续性、流逝性和流逝的不可逆性。随着时间的流逝,社会在前进,科学总是越来越进步,技术总是越来越高新,方法也会越来越多越巧妙,但科学精神是永恒的。科学思想有一定的持续性,思想能够产生思想。人不仅在现实生活中、在与今人交流中可以产生思想,在读古书中也可以产生出新的思想火花,成为宝贵的财富。1969 年诺贝尔生理学或医学奖获得者德尔布吕克(M. Delbrück)就认为他的分子生物学成就与读亚里士多德的著作有关;2001 年我国首届国家最高科技奖获得者吴文俊院士认为他的数学机械化工作直接得益于汉代以来的中国传统数学思想。由此可见,科学思想史的研究比一般科学史的研究更具有深刻的现实意义,希望国内有志于此的学者能写出更多好的著作来完善这一文库,也希望广大读者参与批评、讨论,大家共同办好这一园地,使它百花盛开,春光满园。

席泽宗

2004 年 2 月 2 日

# 目 录

<b>总序</b> .....	席泽宗(i)
<b>第一章 导言</b> .....	(1)
第一节 19世纪世界主流数学遗产 .....	(1)
第二节 19世纪中国数学概况 .....	(14)
第三节 19世纪中外数学交流概述 .....	(24)
第四节 中国现代数学的分期 .....	(40)
<b>第二章 20世纪中外数学交流的第一页——世纪之初的中日数学交流</b> .....	(43)
第一节 现代数学教育制度的引入 .....	(43)
第二节 清末留日学生对中国数学教育现代化的贡献 ...	(49)
第三节 周达与日本的数学交往 .....	(61)
<b>第三章 民国前期的数学留学</b> .....	(66)
第一节 民国前期数学留美 .....	(66)
第二节 民国前期数学留学法国、德国和日本 .....	(84)
第三节 民国前期数学留学的特点及其对我国数学发展的影响 .....	(103)
<b>第四章 民国前期国外著名数学家访华</b> .....	(109)
第一节 罗素访华 .....	(109)
第二节 法国数学家潘勒韦和博雷尔访华 .....	(111)
第三节 德国数学家布拉施克和施佩纳的访华 .....	(114)
第四节 美国数学家伯克霍夫和奥斯古德来华讲学 ...	(117)
第五节 维纳与中国的数学交往 .....	(118)

---

第六节	阿达马与中国的数学交往	(129)
<b>第五章</b>	<b>民国时期中外中算史研究交流</b>	(145)
第一节	民国时期外国学者中算史研究概述	(145)
第二节	李俨与国外数学史界的交往	(163)
第三节	钱宝琮、章用、陈在新的国际交流活动	(178)
<b>第六章</b>	<b>追随大师成就新大师伟业</b>	(188)
第一节	民国后期华罗庚与国外的数学交往	(188)
第二节	民国后期陈省身与国外的数学交往	(205)
第三节	民国后期许宝𫘧与国外的数学交往	(226)
第四节	普林斯顿与中国数学	(233)
第五节	布尔巴基学派与中国数学	(240)
附录	1917~1955年获得博士学位的中国数学家名录	(250)
<b>第七章</b>	<b>新中国成立初期中苏数学交流</b>	(256)
第一节	概况	(256)
第二节	中国与苏联、东欧数学家之间的学术互访	(259)
第三节	苏联对中国数学的专项援助与50年代中国的 数学留学	(268)
第四节	苏联对中国数学教育的影响	(294)
第五节	对50年代中苏数学交流的评价	(303)
第六节	五六十年代中国与日本、印度和西方资本主义 国家的数学交流	(307)
<b>第八章</b>	<b>数学交流的中断与恢复</b>	(311)
第一节	数学交流中断	(311)
第二节	台湾与国外的数学交流	(319)
第三节	香港与国外的数学交流	(336)

---

第四节	数学交流的恢复	(343)
第九章	改革开放时代的对外数学交流	(353)
第一节	数学交流的全面恢复	(353)
第二节	海外华人数学大师的独特作用	(380)
第三节	中外数学交流的高潮:北京国际数学家大会	(394)
第四节	互联网时代的数学交流	(409)
参考文献		(416)
后记		(425)

# 第一章 导　　言

和科学类似,数学(mathematics)也有多种形象。作为知识体系的数学特指数学科学(sciences of mathematics)。数学科学是由各个具体数学分支组成的体系,这些分支大体上属于纯粹数学、应用数学、数学教育学的某个部门。作为一种社会建制的数学是指促进数学科学进步的学术制度和教育制度的总和。科学是人类理性文明的化身,而数学是人类理性文明的精华。在现代社会,一般的自然科学研究走向了“大科学时代”,而数学仍保留着“小科学”的性质。数学学术研究主要依靠个体数学家的思考与钻研,此外,数学家的相互交流对数学学术研究的发展也起着非常重要的作用。

我国数学在古代曾有过辉煌成就,只是到了近代才落后了。从李善兰时代到现在,经过数代数学家艰苦卓绝的努力,我国数学从近、现代西方数学的系统引入,发展到了与世界数学发展潮流交流渗透并相依共进的新时期。可以说,对外数学交流是中国近现代数学发展的主题之一。本书讨论20世纪中外数学交流,以有关背景——19世纪世界主流数学遗产、19世纪的中国数学、19世纪的中外数学交流等作为本书的开始。

## 第一节 19世纪世界主流数学遗产

16、17世纪,西方数学发生了深刻的变化,其高潮是牛顿(Isaac Newton,1642~1727)、莱布尼茨(Gottfried Wilhelm Leibniz,1646~1716)发明的微积分。这是数学史上的一场重大革命,它

标志着高等数学的诞生,数学从以常量数学为主体的初等数学时期进入了以变量数学为主体的高等数学时期。与西方相比,世界其他地区的数学被远远地抛到了后面。从此,西方数学的发展代表着世界数学发展的主流。18世纪的数学基本沿着17世纪的发展道路,在分析数学领域中取得了重大的突破。18世纪在数学史上又被称为“分析的世纪”。到了19世纪,数学的发展进入了一个全新境界。

1801年,德国伟大数学家高斯(Johann Carl Friedrich Gauss,1777~1855)发表《算术研究》,引领数学进入了19世纪。到了1899年,另一位德国伟大数学家希尔伯特(David Hilbert,1862~1943)出版了《几何基础》,为19世纪的数学画上了句号。在这一百年中,数学出现了全面、空前的发展。分析的算术化、综合几何的复兴、复变函数论的诞生、非欧几何的创立、近世代数的创始、集合论的发明、数学公理化运动的兴起等都是这个世纪数学中的典型成就。19世纪的数学家一边不断地创立全新数学的领域,一边不断地对已有领域进行严格批判,这两个方面的完美结合是19世纪数学发展最重要的特征。这与18世纪的数学家有很大的不同。作为“英雄时代”的18世纪的数学家往往不顾数学的严格性而广泛开辟数学的新疆土。

## 一、19世纪的数论

在数论方面,高斯的《算术研究》揭开了19世纪数学的序幕。在这部伟大著作中,高斯建立了数论的标准化符号。他建立了同余理论,引进了代数数,创立了作为丢番图(Diophantine)分析指导思想的型理论,把19世纪以前数论的一些孤立的结果系统化,并对要研究的问题和解题的已知方法进行了分类。这部著作不仅是现代数论的开始,而且还确定了现代数论研究的工作方向。数论的进一

步发展是由高斯的一些学生——狄利克雷 (Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805 ~ 1859)、库默尔 (Ernst Eduard Kummer, 1810 ~ 1893)、黎曼 (Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826 ~ 1866)、戴德金 (Julius Wilhelm Richard Dedekind, 1831 ~ 1916) 等——做出的。在解析数论方面, 1837 年, 狄利克雷用解析数论证明了数列  $\{a + nb\}$  (其中  $a$  与  $b$  互质) 中有无穷个素数。狄利克雷在《数论讲义》(1863 年由戴德金出版) 中很好地诠释了高斯《算术研究》的思想, 并加入了自己的创造。解析数论的进一步发展是由黎曼做出的。黎曼于 1859 年发表了“论小于给定数的素数个数”, 该文提出了黎曼  $\zeta$  函数, 并将素数的分布问题归结为对该函数的研究, 提出了著名的黎曼猜想。黎曼猜想虽然至今并未解决, 但极大地促进了解析数论的研究。19 世纪解析数论最后一个重大成就是由阿达马 (Jacques Salomon Hadamard, 1865 ~ 1963) 和瓦莱普桑 (Louis de La Vallée Poussin, 1866 ~ 1962) 1896 年做出的, 他们独立证明了素数定理。代数数论是 19 世纪发展起来的新数论分支, 此后一直是数论发展的主流。费马大定理是代数数论的中心问题。受其推动, 库默尔从 1844 年起发表了一系列论文。除 37、59、67 三数没有证明之外, 他证明在 100 以内的其他自然数中费马大定理是正确的。库默尔为此创立了理想数理论。戴德金于 1871 年将高斯的复整数和库默尔的代数数一般化, 创立了现代代数数的理论。他引进了代数整数、数域、理想等概念, 推广了整数的唯一因子分解定理。克罗内克 (Leopold Kronecker, 1823 ~ 1891) 创立了另一种域论 (有理性域), 他于 1881 年引入了未定量的概念, 用增加的未定量去扩域。代表 19 世纪代数数论顶峰的是希尔伯特于 1897 年发表的《代数数域的理论》。希尔伯特用统一的观点和新方法将过去的代数数论的全部结果汇成了一个整体。在超越数论方面, 刘维尔 (Joseph Liouville, 1809 ~ 1892) 于 1844 年实际地构造出了一个超越数, 创立了超越数论。1873 年埃尔米特 (Charles Hermite, 1822 ~ 1901)

证明了  $e$  是超越数。1882 年,林德曼 (Carl Louis Ferdinand von Lindemann, 1852 ~ 1939) 证明了  $\pi$  是超越数,从而完全解决了古希腊“三大作图难题”。 $\pi$  的超越性是林德曼-魏尔斯特拉斯定理的推论。此定理于 1882 年由林德曼首先证明,证明后被魏尔斯特拉斯 (Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, 1815 ~ 1897) 简化。林德曼-魏尔斯特拉斯定理是 19 世纪超越数论的最高成就。

## 二、19 世纪的几何

几何方面包含着 19 世纪最深刻的数学创造——非欧几何。非欧几何脱胎于欧几里得几何,是对欧几里得几何平行公理长达两千多年研究的光辉终结。虽然希腊人和牛顿认为数学空间并不等同于感性空间,但随着牛顿力学的成功,几乎所有的哲学家都认为欧几里得几何是现实空间的唯一正确模型。欧几里得几何的平行公理不像其他公理那样自明,引起了历代数学家的密切关注。到了 19 世纪,高斯、罗巴切夫斯基 (Nikolai Ivanovich Lobachevsky, 1792 ~ 1856) 和波尔约 (János Bolyai, 1802 ~ 1860) 三人各自独立认识到,平行公理是独立于欧几里得几何的其他公理的,是不能在其他公理的基础上得到证明的。他们先后创立了非欧几何。罗巴切夫斯基和波尔约于 1826 年前后修改了欧几里得的平行公理,但由于罗巴切夫斯基的著作《论几何基础》出版于 1829 ~ 1830 年,是公开出版的最早非欧几何文献,所以后人把这种几何称为罗巴切夫斯基几何。罗巴切夫斯基因此又被誉为几何学中的“哥白尼”。非欧几何的发现引发了数学思想的革命,打破了欧几里得几何两千多年的垄断局面。G. 康托尔 (Georg Cantor, 1845 ~ 1918) 曾说过:“数学的本质是自由的。”自由创造的数学精神在非欧几何的建立中得到了完美体现。非欧几何的相容性问题于 1868 年为贝尔特拉米 (Eugenio

Beltrami, 1835 ~ 1899) 所解决, 他把非欧几何的相容性归结为欧几里得几何的相容性, 据此非欧几何得到了确认。

19 世纪几何学发展的一个重要特色是综合几何学的复兴。解析几何和微积分的发明导致在 18 世纪代数方法和分析方法统治着几何研究, 纯几何的综合法被排斥。与解析几何解题的繁琐与机械相比, 纯粹的几何方法由于其内在的直观清晰和过程的优美平易, 总是吸引着一些数学家。蒙日 (Gaspard Monge, 1746 ~ 1818) 是 19 世纪初复兴综合几何研究的关键人物。1799 年他出版了《画法几何学》。在蒙日的倡导下, 他的学生布里昂雄 (Charles Julien Brianchon, 1783 ~ 1864)、卡诺 (Lazare Nicolas Marguerite Carnot, 1753 ~ 1823)、彭赛列 (Jean Victor Poncelet, 1788 ~ 1867) 等为复兴综合几何做出了重大的贡献。卡诺探讨了点与直线的交比及其射影不变性。布里昂雄在 1806 年发表了《二次曲线论》, 证明了射影几何的重要定理——布里昂雄定理。彭赛列于 1822 年出版了《论图形的射影性质》, 他以透射的图形、连续性原理、关于圆锥曲线的极点和极线的概念等三个主导观念为中心, 奠定了现代射影几何的基础。其后, 施泰纳 (Jakob Steiner, 1796 ~ 1863) 运用综合法研究代数曲线和代数曲面, 特别是他用纯几何方法不严格地证明了等周定理。施陶特 (Karl Georg Christian von Staudt, 1798 ~ 1867) 没有运用度量概念而建立了射影几何体系。除了用综合法以外, 射影几何的发展还受代数法的影响。默比乌斯 (August Ferdinand Möbius, 1790 ~ 1868) 和普吕克 (Julius Plücker, 1801 ~ 1868) 引入了齐次射影坐标, 为射影几何的发展增加了活力。

19 世纪几何学发展的另一个特色是与分析结合起来。微分几何几乎和微积分同时诞生。18 世纪微分几何的代表人物有欧拉 (Leonhard Paul Euler, 1707 ~ 1783) 和蒙日等, 主要研究欧几里得空间的曲线、曲面的性质。19 世纪 20 年代, 高斯开始了微分几

何的研究。1827 年,他发表了《关于曲面的一般研究》,提出了可以把曲面本身看做一个空间的思想,由此开创了曲面的内蕴几何学。高斯的思想被黎曼所发展。黎曼被誉为是“最深刻的几何哲学家”<sup>①</sup>。1854 年,他为取得无薪讲师的任职资格,作了“关于几何基础的假说”的演说。在演说中,他提出了流形曲率的概念,推广了欧几里得空间的距离公式,建立了任意维空间的内蕴几何(即黎曼几何)。该演说于 1868 年发表,已成为数学中伟大的基础文献,影响深远。黎曼的思想由贝尔特拉米、克里斯托费尔(Elwin Bruno Christoffel, 1829 ~ 1900) 和利普希茨(Rudolf Otto Sigismund Lipschitz, 1832 ~ 1903) 等所继承和发展。黎曼几何在 20 世纪成为广义相对论的数学基础。

几何学在 19 世纪的发展中呈现出千姿百态的局面。在多样性中寻求统一性的努力是 19 世纪后期几何学发展的一个重要特点。对此,F. 克莱因(Felix Klein, 1849 ~ 1925) 做出了很大的贡献。1872 年,他在爱尔兰根大学评议会上作“关于现代几何学研究的比较考察”的演讲,提出了用变换群的观点对各种几何学进行分类的方案。这就是数学史上著名的“爱尔兰根纲领”(Erlangen Program)。1899 年,希尔伯特在《几何学基础》中,用现代的公理法为欧几里得几何等几何学建立了一个形式化公理系统,掀起了现代数学的公理化运动。

### 三、19 世纪的代数

在代数方面,解方程在历史上是代数的主要内容,19 世纪前期仍以解方程为中心。高斯在《算术研究》中系统讨论了二项方

---

<sup>①</sup> [美]M. 克莱因:《古今数学思想》(第三册),上海:上海科学技术出版社,1980 年,第 309 页。

程,这在正多边形作图中具有重要的意义。后来,根式解方程的工作被阿贝尔(Niels Henrik Abel, 1802 ~ 1829)大大推进了一步。1826年,阿贝尔证明了高于四次的一般一元高次方程不可能有根式解,但对哪些特殊的一元高次方程可用根式求解的问题,阿贝尔还无法回答。这个问题被天才数学家伽罗瓦(Évariste Galois, 1811 ~ 1832)在1829 ~ 1832年明确地回答了。在回答这个问题时,他提出了许多新概念如“伽罗瓦域”、“伽罗瓦群”等,建立了“伽罗瓦理论”,为群论的创立奠定了基础。

19世纪代数的另一个重大进展是由哈密顿(William Rowan Hamilton, 1805 ~ 1865)取得的。在19世纪前期,皮科克(George Peacock, 1791 ~ 1858)和德摩根(Augustus De Morgan, 1806 ~ 1871)等把代数从算术中独立出来,确定了代数理论是作为符号及其组合规则的科学,与复数和实数的性质无关。哈密顿在1837年提出了复数是两个实数的有序偶的概念,这样把复数的逻辑建立在实数的基础上。哈密顿在1843年宣告发现了四元数,四元数的乘法不满足交换律。四元数的发现打破了人们关于数的古老观念,推动了线性结合代数的发展和向量分析的产生。格拉斯曼(Hermann Günther Grassmann, 1809 ~ 1877)对复数作了类似的更大胆的推广。吉布斯(Josiah Willard Gibbs, 1839 ~ 1903)和赫维赛德(Oliver Heaviside, 1850 ~ 1925)建立了三维向量分析。向量分析广泛运用于物理学中。19世纪代数方面取得的另一个成就是由于西尔维斯特(James Joseph Sylvester, 1814 ~ 1897)等的工作使得行列式和矩阵理论的成熟。行列式和矩阵是很好的数学符号,虽然它们没有深刻地影响数学的发展进程,但已成了现代数学必不可少的工具。到了19世纪末期,数学家们从大量分散出现的具体研究对象中抽象出它们的共性进行研究,使代数学的研究对象由方程转变为各种抽象的代数结构。