工科线性代数

崔荣泉　杨泮池　编

陕西科学技术出版社

工科线性代数

崔荣泉　杨泮池　编

陕西科学技术出版社

工 科 线 性 代 数
崔荣泉　杨泮池　编
陕西科学技术出版社出版发行
(西安北大街131号)
陕西省凤翔县印刷厂印刷
850×1168毫米 32开本　5印张　13万字
1991年7月第1版　印数:3001—7000　1993年5月第2次印刷
ISBN 7-5369-1004-5/G.151

定　价:2.70元

前　言

随着计算机技术的迅速发展，解大型的线性方程组、求矩阵的特征值与特征向量等已经成为工程技术人员及其他领域科学工作者经常遇到的课题。而线性代数正是阐述这些问题的有关理论和方法的一门课程，它已成为高等工科院校大学生的一门必修课。

本书是依据1987年经国家教委批准的《线性代数课程教学基本要求》，参照国内外有关教材，并结合我们多年教学体会写成的讲义基础上编写而成的。本书具有以下特点：(1)紧密结合工科院校的情况，重视理论联系实际；(2)突出矩阵方法，注重学生能力的培养；(3)提供在计算机上实现线性代数计算所必需的数值方法(这些内容都标有*号)；(4)问题引入直观，叙述简明易懂，条理清楚，例题丰富，便于自学。

本书中配有一定数量的习题，其中有些是近年来全国工科硕士研究生入学试题。通过这些习题，可以加深对各章内容的理解，并掌握一定的解题方法和技巧。

在此，我们感谢西安冶金建筑学院潘鼎坤教授和黄泽民副教授，他们详细审阅了原稿并提出许多宝贵的建设性意见。同时还感谢刘林副教授、黄长钧副教授和任学明讲师，他们在阅读原稿和试用过程中提出了很多宝贵的修改意见。

由于我们水平有限，错误和不妥之处在所难免，敬请读者批评指正，不胜感激。

编　者

1991年1月

目　录

第一章　矩阵代数基础

矩阵是现代科学技术不可缺少的工具，特别是电子计算机出现之后，矩阵方法得到了更广泛的应用。本章介绍矩阵的有关概念和矩阵代数基础。

§1—1　矩阵概念

工程技术中的许多问题都归结为求解线性代数方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 x_i 为未知量，系数 a_{ij} 和右端 b_i 都是常数。研究这个方程组何时有解、解的构造和求解的方法等构成了线性代数的重要内容。

方程组(1.1)的解取决于系数 a_{ij} 和右端的常数，若将(1.1)左端的系数按其相对位置排成数表，并且括起来成为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

把它看作一个整体，这个矩形数表就是我们要研究的矩阵。

看一个关于矩阵的实例。

图 1.1 表示 A 国的两个机场 A_1、A_2 与 B 国的三个机场 B_1、B_2、B_3 间的通航关系。图中的连线表示两机场间通航，连线上的数字表示航班数目。图 1.1 表示的关系可用如下矩阵表示

$$
\begin{array}{c@{}c}
 & \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\
\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \end{pmatrix}
\end{array}
\tag{1.3}
$$

这个矩阵表达了 A 国与 B 国间的通航关系。

现在给出矩阵的一般定义：

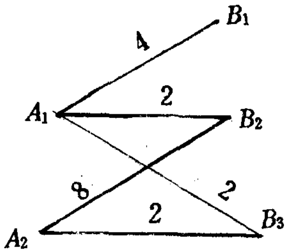

图 1.1 A 国与 B 国间航空网络

定义 1.1 由 $m\times n$ 个元素 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成矩形元素表(1.2)，称这个元素表为 $m\times n$ **维矩阵**。横的各排叫做矩阵的**行**，纵的各列叫做矩阵的**列**，a_{ij} 叫做矩阵第 i 行第 j 列的**元素**。

元素可以是数，也可以是函数，等等。

通常以大写字母 A、B、…等表示矩阵，矩阵(1.2)可以简记为 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，或 $A=(a_{ij})$。

当 $m=n$ 即行数等于列数时，矩阵 A 称为 n **阶方阵**。方阵的左上角到右下角的直线称为**主对角线**，主对角线上的元素 a_{ii} 叫做**主对角元素**。

只有一列的矩阵 $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ 叫做 m **维列矩阵**或**列向量**，列向量常以小写字母 a、b 或 α、β 等表示。类似地称只有一行的矩阵 $(b_1 \quad b_2 \cdots b_n)$ 为 n **维行矩阵**或**行向量**，它也常以小写字母表示。向量中的元素称为坐标或分量。行向量元素间可用逗号分开，以避免混淆，比如 $b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$。在这里指出了向量是特殊形式的矩阵，反过来也可以认为 $m\times n$ 维矩阵是由 n 个 m 维列向量组成，或是由 m 个 n 维行向量组成。

元素全为实数的矩阵称为**实矩阵**，元素中有复数的矩阵称为**复矩阵**。特别地称元素全为零的矩阵为**零矩阵**，记为 0。

今后还常常用到如下一些特殊方阵：

对角方阵

$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

这是主对角线外元素全为零的方阵，简记 $D=diag(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$。

单位方阵

$$I=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

这是主对角元素全为 1 的对角方阵，简记为 I。

上三角矩阵 U 和下三角矩阵 L

$$U=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad L=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

上三角矩阵 U 是主对角线以下元素全为零的方阵，下三角矩阵 L 是主对角线以上元素全为零的方阵。

本节介绍了矩阵的基本概念，矩阵这个词是英国数学家西尔威斯特（*Sylvester*）在 1850 年首先使用的，而矩阵记号则是英国数学家凯莱（*Cayley*）于 1855 年引进的。

§1—2 矩阵基本运算

若矩阵 A 和 B 具有相同的行数与相同的列数，则称 A 与 B 为**同型矩阵或同维矩阵**。当同型矩阵 $A=(a_{ij})$ 与 $B=(b_{ij})$ 的所有对应元素相等即 $a_{ij}=b_{ij}$ 时，称两**矩阵相等**，记为 $A=B$。

一. 线性运算

1. 矩阵加法

同型矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 与 $B=(b_{ij})_{m\times n}$ 的和 $A+B$ 规定为

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

简记为 $A+B=(a_{ij}+b_{ij})$。

对于矩阵加法显然有

$$A+B=B+A,\ (A+B)+C=A+(B+C)。$$

2. 数与矩阵相乘

常数 k 与矩阵 A 的乘积 kA(或 Ak)规定为

$$kA=Ak=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

简记为 $kA=(ka_{ij})$。

A 的**负矩阵**(或**反矩阵**)记为 $-A$,规定 $-A=(-1)A=(-a_{ij})$。由此可规定同型矩阵 $A=(a_{ij})$ 与 $B=(b_{ij})$ 的减法为

$$A-B=A+(-B)=(a_{ij}-b_{ij})。$$

数与矩阵相乘满足以下运算律(其中 k、l 为常数):

(1) $(kl)A=k(lA)$;

(2) $(k+l)A=kA+lA$;

(3) $k(A+B)=kA+kB$。

例 1.1 设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1)求 $3A+5B$;

(2)解矩阵方程 $A+X=-B$。

解

(1) $3A+5B=3\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}3 & -3 & 3\\ 0 & 6 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 5 & 0\\ 5 & -5 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2 & 3\\ 5 & 1 & 5\end{pmatrix};$$

(2)由于 $A+X=-B$,所以

$$X=-B-A$$

$$=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix}。$$

二、矩阵的乘法和矩阵的方幂

1. 矩阵乘法

先看一个实例,图 1.2 的航空网络图表明 A 国到 B 国的航班矩阵 A 和 B 国到 C 国的航班矩阵 B 分别为

$$A=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}B_1 & B_2 & B_3\end{array}\\ \begin{pmatrix}4 & 2 & 6\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c}A_1\\ A_2\end{array},\quad B=\begin{array}{c}\begin{array}{cc}C_1 & C_2\end{array}\\ \begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 0\\ 0 & 8\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c}B_1\\ B_2\\ B_3\end{array}$$

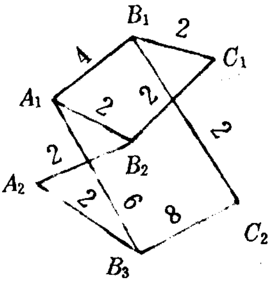

图 1.2 A 国经 B 国到 C 国的航空网络

试求由 A 国经 B 国到 C 国的航班矩阵 C。

先求由 A_1 到 C_1 的航班数:由 A_1 经 B_1 到 C_1 的航班有 4×2 个;由 A_1 经 B_2 到 C_1 的航班有 2×2 个;由 A_1 经 B_3 到 C_1 的航班有 6×0 个;

因此由 A_1 到达 C_1 的航班总数为

$$4\times2+2\times2+6\times0\text{ 个}。$$

同样可算出 A_1 到达 C_2 的航班总数为 $4\times2+2\times0+6\times8$ 个。

由 A_2 到达 C_1 和 C_2 的航班总数的计算与上述算法相同。总起来，航班矩阵 C 为

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} C_1 & C_2 \end{array} \\ C = & \begin{pmatrix} 4\times2+2\times2+6\times0 & 4\times2+2\times0+6\times8 \\ 0\times2+2\times2+2\times0 & 0\times2+2\times0+2\times8 \end{pmatrix} \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} \end{array}$$

$$\doteq \begin{pmatrix} 12 & 56 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}。$$

再看一个例子，设变量 y 能用变量 x 线性地表示为

$$\begin{cases} y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 \\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 \end{cases} \tag{1.4}$$

变量 x 能用变量 z 线性地表示为

$$\begin{cases} x_1=b_{11}z_1+b_{12}z_2 \\ x_2=b_{21}z_1+b_{22}z_2 \\ x_3=b_{31}z_1+b_{32}z_2 \end{cases} \tag{1.5}$$

其中系数 a_{ij} 和 b_{ij} 都是常数。

(1.4)所表示的变量 x 到变量 y 的变换称为**线性变换**，同样(1.5)表示了变量 z 到变量 x 的线性变换。

将(1.5)代入(1.4)得到变量 z 到变量 y 的线性变换

$$\begin{cases} y_1=(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31})z_1+(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32})z_2 \\ y_2=(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31})z_1+(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32})z_2 \end{cases} \tag{1.6}$$

若设(1.4)，(1.5)的系数矩阵分别为 A 和 B，即

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

设(1.6)的系数矩阵为 C，则有

$$C=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} \end{pmatrix}。$$

由以上两例不难看出它们的共同点是，两例中矩阵 C 的元素都是由矩阵 A 和 B 的元素按同样计算规则得到，我们把按这种计算规则得到的矩阵 C 规定为矩阵 A 与 B 的乘积，这就是如下矩阵乘积

的定义。

定义 1.2 设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times s}$，$B=(b_{ij})_{s\times n}$，如果矩阵 $C=(c_{ij})$ 的元素规定为

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj} \tag{1.7}$$

$$(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

则称矩阵 C 为矩阵 A 与 B 的**乘积**，记为 $C=AB$。

注意：只有在矩阵 A 的列数与矩阵 B 的行数相同时，乘积 AB 才有意义，这时称 A 与 B 为可乘矩阵，乘积 $AB=C$ 的维数关系是

$$(a_{ij})_{m\times s}(b_{ij})_{s\times n}=(c_{ij})_{m\times n}$$

根据定义 1.2，航行例中航班矩阵 C 即为矩阵 A 与 B 的乘积

$$C=AB=\begin{pmatrix}4&2&6\\0&2&2\end{pmatrix}\begin{bmatrix}2&2\\2&0\\0&8\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}12&56\\4&16\end{pmatrix}。$$

线性变换例中连续两次线性变换的计算可用矩阵乘法表示为

$$C=AB=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{pmatrix}\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\\b_{31}&b_{32}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}&a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}\\a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}&a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}\end{pmatrix}。$$

由矩阵乘法规则可将线性方程组(1.1)表示为

$$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{bmatrix} \tag{1.8}$$

若以 A 表示系数矩阵，$\boldsymbol{x}$ 表示未知数列向量，$\boldsymbol{b}$ 表示常数列向量，那么(1.1)或(1.8)可简记为

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \tag{1.9}$$

这是线性方程组(1.1)的矩阵形式，这种简捷的表示法为以后的讨

论带来许多方便。

矩阵乘法可以用来表示象连续的两次飞行、连续的两次线性变换这类问题，使得矩阵在工程技术中得到了广泛的应用。

例 1.2 (1)将微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=y+z,\quad \frac{dy}{dt}=z+x,\quad \frac{dz}{dt}=x+y$$

写成矩阵形式；

(2)求出下式中待定的 a_{11},a_{21},a_{22}

$$x^2+2xy-2y^2=(x,y)\begin{pmatrix}a_{11} & 1\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}。$$

解 (1) 由于

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}= \quad y+z\\ \dfrac{dy}{dt}=x \quad +z\\ \dfrac{dz}{dt}=x+y\end{cases}$$

那么

$$\begin{bmatrix}dx/dt\\ dy/dt\\ dz/dt\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$$

(2) $x^2+2xy-2y^2$

$$=(x,y)\begin{pmatrix}a_{11} & 1\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=(a_{11}x+a_{21}y,x+a_{22}y)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

$$=a_{11}x^2+(a_{21}+1)xy+a_{22}y^2$$

比较两端的系数，得

$$a_{11}=1,\quad a_{21}=1,\quad a_{22}=-2。$$

例 1.3 对下面各对矩阵确定是否可作运算 $A+B$, AB 与 BA，对可作的运算求出结果：

(1) $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$;

(2) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$;

(3) $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\\ -3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$。

解 (1)可作运算 $A+B$,AB 与 BA,

$$A+B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & -2\end{pmatrix},\quad AB=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad BA=\begin{pmatrix}-2 & -2\\ 2 & 2\end{pmatrix};$$

(2)仅可作运算 $A+B$

$$A+B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 2 & 5 & 3\end{pmatrix};$$

(3)仅可作运算 AB,

$$AB=\begin{pmatrix}-1 & -8\\ 1 & -2\\ 9 & 22\end{pmatrix}。$$

由(1)看出 $AB\neq BA$,即矩阵乘法不象数的乘法那样一定满足交换律,因此在谈到 A 乘 B 时,必须指明 A 左乘 B 还是右乘 B。若矩阵 A、B 满足 $AB=BA$,则称它们是关于乘法**可换**的。任何可换矩阵都是方阵。单位方阵与任何同阶的方阵关于乘法都可换,并且 $IA=AI=A$。

由(1)还看出,虽然 $A\neq 0$ 且 $B\neq 0$,却有 $AB=0$,换句话说 $AB=0$ 未必一定有 $A=0$ 或 $B=0$。

以上两点是矩阵乘法与数的乘法不同之处。

对于矩阵的加法与乘法运算有下列运算律:

结合律　$(AB)C=A(BC)$,

左分配律　$A(B+C)=AB+AC$,

右分配律　$(B+C)A=BA+CA$。

2. 方阵的方幂

根据矩阵的乘法可以定义**方阵的方幂**为

$$A^1=A,\quad A^2=AA,\quad \cdots,\quad A^{k+1}=A^kA\quad (k\text{ 为正整数})。$$

由此可以推出

$$A^kA^l=A^{k+l},\quad (A^k)^l=A^{kl}\qquad (k、l\text{ 为任何正整数})。$$

注意,一般地$(AB)^k\neq A^kB^k$,例如

设 $$A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},$$

那么 $$(AB)^2=\begin{pmatrix}2&3\\3&5\end{pmatrix},\quad \text{而}\quad A^2B^2=\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix},$$

可见 $$(AB)^2\neq A^2B^2。$$

例 1.4 求证

$$\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\cos n\theta&-\sin n\theta\\\sin n\theta&\cos n\theta\end{pmatrix}$$

证 应用数学归纳法,$n=1$ 时等式显然成立,设 $n=k$ 时等式也成立,即有

$$\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}\cos k\theta&-\sin k\theta\\\sin k\theta&\cos k\theta\end{pmatrix},$$

那么

$$\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}^{k+1}=\begin{pmatrix}\cos k\theta&-\sin k\theta\\\sin k\theta&\cos k\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos k\theta\cos\theta-\sin k\theta\sin\theta&-\cos k\theta\sin\theta-\sin k\theta\cos\theta\\\sin k\theta\cos\theta+\cos k\theta\sin\theta&-\sin k\theta\sin\theta+\cos k\theta\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos(k+1)\theta&-\sin(k+1)\theta\\\sin(k+1)\theta&\cos(k+1)\theta\end{pmatrix}$$

根据数学归纳法原理,等式得证。

本题结果与几何学中坐标轴旋转变换的结论一致,在几何学中只考虑坐标轴按反时针旋转 θ 角,其转轴公式为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

本例结果表明连续旋转 n 次 θ 角与一次旋转 $n\theta$ 角的变换一致。

三、逆矩阵

规定了矩阵的加法、减法和乘法之后，自然想到如何规定矩阵的除法。还是回到数的除法，我们知道当 $a\neq0$ 时，$b\div a=b\cdot 1/a=b\cdot a^{-1}$，这是把 b 除以 a 化为 b 与 a 的逆元素 a^{-1} 的乘法，所谓 a 的逆元素 a^{-1} 是指满足 $aa^{-1}=a^{-1}a=1$ 的元素，对于矩阵的"除法"可类似地处理，这就是用一个矩阵与另一个矩阵的逆矩阵相乘来代替两矩阵相"除"，因此应当象数的逆元素那样引出逆矩阵的概念。

定义 1.3 对于 n 阶方阵 A，如果存在 n 阶方阵 B 使

$$AB=BA=I$$

则称 B 为 A 的**逆矩阵**，并说 A 是**可逆的**。

由定义知 A 也是 B 的逆矩阵，即 A 与 B 互为逆矩阵。若 A 可逆，可以证明其逆矩阵唯一〔见习题一 14(1)〕，于是 A 的逆矩阵记为 A^{-1}，据定义 $AA^{-1}=A^{-1}A=I$。

对于线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，若 A 是可逆方阵，并能求出 A^{-1}，那么对 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 左乘 A^{-1}，得 $A^{-1}A\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}$$

这就是线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解。

若 A 可逆，显然有性质：

(1) $(A^{-1})^{-1}=A$；

(2) $(kA)^{-1}=\frac{1}{k}\cdot A^{-1}$(数 $k\neq0$)；

若 A,B 皆为可逆矩阵，并且 A,B 同阶，则 AB 可逆，并且

(3) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$。

事实上，$(B^{-1}A^{-1})(AB)=B^{-1}(A^{-1}A)B=B^{-1}B=I$，

及 $(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AA^{-1}=I$，

根据逆矩阵定义，

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}。$$

一般地，有

$$(A_1A_2\cdots A_n)^{-1}=A_n^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}。$$