大学专科高等数学基础简明教材系列

高等数学基础（丙）

简明概率论与数理统计学习指导

JIAN MING GAI LÜ LUN YU SHU LI TONG JI XUE XI ZHI DAO

（经济类与管理类）

周誓达 编著

随书赠送

中国人民大学出版社

大学专科高等数学基础简明教材系列

高等数学基础(丙)

简明概率论与数理统计学习指导

（经济类与管理类）

周誓达 编著

中国人民大学出版社

·北京·

目　录

第一章

随机事件及其概率

一　学习要点

1. 事件之间的关系

包含关系　若事件 B 发生必然导致事件 A 发生，即构成事件 B 的基本事件都是构成事件 A 的基本事件，则称事件 A 包含 B，记作 $A \supset B$ 或 $B \subset A$.

相等关系　若事件 A 与 B 是同一个事件，即构成事件 A 的基本事件与构成事件 B 的基本事件完全相同，则称事件 A 与 B 相等，记作 $A = B$.

互斥关系　若事件 A 与 B 不可能同时发生，即构成事件 A 的基本事件与构成事件 B 的基本事件无一相同，则称事件 A 与 B 互斥，或称事件 A 与 B 互不相容.

2. 事件之间的运算

和事件　事件 A 与 B 中至少有一个事件发生，即事件 A 发生或事件 B 发生，这个事件称为事件 A 与 B 的和事件，记作 $A + B$.

积事件　事件 A 与 B 同时发生，即事件 A 发生且事件 B 发生，这个事件称为事件 A 与 B 的积事件，记作 AB.

对立事件　事件 A 不发生，这个事件称为事件 A 的对立事件，记作 $\overline{A}$.

事件 A,B 互斥，有 $AB=\varnothing$；事件 $A,\overline{A}$ 对立，有 $A\overline{A}=\varnothing$ 且 $A+\overline{A}=\Omega$.

3. 古典概型

古典概型具有两个特征：

特征 1 基本事件的总数为有限个；

特征 2 每个基本事件发生的可能性是等同的.

设古典概型的一个试验共有 n 个基本事件，而事件 A 包含 m 个基本事件，则事件 A 发生的概率

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

在古典概型的一个试验中，如何计算所有基本事件的个数?如何计算事件 A 包含基本事件的个数?若试验属于元素不重复的排列问题，则归结为计算排列数；若试验属于元素可重复的排列问题，则归结为计算元素可重复排列的个数；若试验属于组合问题，则归结为计算组合数；对于一般情况，则根据基本原理计算相应方法的种数.

4. 条件概率

在事件 A 已经发生的条件下，事件 B 发生的概率称为事件 B 对 A 的条件概率，记作 $P(B|A)$. 相应地，也称概率 $P(B)$ 为无条件概率. 注意：在事件 A 已经发生的条件下，事件 A 就是必然事件.

5. 加法公式

加法公式 对于任意两个事件 A,B，都有概率

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

加法公式的特殊情况

(1) 如果事件 A,B 互斥，则有概率

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

(2) 对于任意事件 A，都有概率

$$P(A)=1-P(\overline{A})$$

加法公式特殊情况的推广 如果事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥，则有概率

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

判断两个事件是否互斥的方法是：考察在任何一次试验中，这两个事件有无可能同时发生. 若有可能同时发生，则这两个事件非互斥即相容；若无可能同时发生，则这两个事件互斥.

6. 事件相互独立

若事件 A 与 B 中一个事件对另外一个事件的条件概率不受另外一个事件发生

与否的影响，即条件概率

$$P(B|A)=P(B)$$

或条件概率

$$P(A|B)=P(A)$$

则称事件 A 与 B 相互独立.

在四组事件 $A,B;A,\overline{B};\overline{A},B;\overline{A},\overline{B}$ 中，如果有一组事件相互独立，则其余三组事件也相互独立.

事件 A 与 B 相互独立，等价于概率

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

当概率 $P(A)>0,P(B)>0$ 时，事件 A,B 相互独立与事件 A,B 互斥不能同时成立.

考虑 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，若其中任何一个事件发生的可能性都不受其他一个或几个事件发生与否的影响，则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立. 如果 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则把其中任意一个或几个事件换成其对立事件后，所得到的 n 个事件仍然相互独立.

7. 乘法公式

乘法公式　对于任意两个事件 A,B，都有概率

$$\begin{aligned}P(AB)&=P(A)P(B|A)\\&=P(B)P(A|B)\end{aligned}$$

乘法公式的特殊情况　如果事件 A,B 相互独立，则有概率

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

乘法公式特殊情况的推广　如果事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则有概率

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$$

8. 全概公式

完备事件组　已知事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，若它们同时满足：

(1) 两两互斥

(2) 和事件 $A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$

则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成一个完备事件组.

事件 $A,\overline{A}$ 构成最简单的完备事件组.

全概公式　如果事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成一个完备事件组，则对于任意事件 B 都有概率

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A_1B+A_2B+\cdots+A_nB)\\&=P(A_1B)+P(A_2B)+\cdots+P(A_nB)\\&=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+\cdots+P(A_n)P(B|A_n)\end{aligned}$$

全概公式的特殊情况 对于任意两个事件 A,B,都有概率

$$P(B)=P(AB+\bar{A}B)=P(AB)+P(\bar{A}B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})$$

二 习题一详细解答

1.01 口袋里装有若干个黑球与若干个白球,每次任取 1 个球,共抽取两次,设事件 A 表示第一次取到黑球,事件 B 表示第二次取到黑球,问:

(1) 和事件 $A+B$ 表示什么?

(2) 积事件 AB 表示什么?

(3) 两次都取到白球应如何表示?

(4) 两次取到球的颜色不一致应如何表示?

解:(1) 和事件 $A+B$ 意味着事件 A 与 B 中至少有一个事件发生,即第一次取到黑球与第二次取到黑球两个试验结果中至少有一个试验结果发生,因此它表示两次抽取中至少有一次取到黑球.

(2) 积事件 AB 意味着事件 A 发生且事件 B 发生,即第一次取到黑球且第二次取到黑球,因此它表示两次都取到黑球.

(3) 两次都取到白球,意味着第一次取到白球且第二次也取到白球,即事件 A 与 B 同时不发生,可用积事件 $\bar{A}\,\bar{B}$ 表示.

(4) 两次取到球的颜色不一致,意味着第一次取到黑球且第二次取到白球,或者第一次取到白球且第二次取到黑球,即积事件 $A\bar{B}$ 发生或积事件 $\bar{A}B$ 发生,可用和事件 $A\bar{B}+\bar{A}B$ 表示.

1.02 随机安排甲、乙、丙三人在星期一到星期三各学习一天,求:

(1) 恰好有一人在星期一学习的概率;

(2) 三人学习日期不相重的概率.

解:注意到试验是随机安排甲、乙、丙三人在星期一到星期三各学习一天,必须依次经过三个步骤:第 1 个步骤是安排甲学习,从星期一到星期三挑出一天作为甲的学习日期,有 3 种方法;第 2 个步骤是安排乙学习,从星期一到星期三挑出一天作为乙的学习日期,也有 3 种方法;第 3 个步骤是安排丙学习,从星期一到星期三挑出一天作为丙的学习日期,也有 3 种方法. 若以星期一、星期二、星期三作为元素,则试验相当于从 3 个不同元素中每次取出 3 个元素的元素可重复排列,排在前面的是甲的学习日期,排在中间的是乙的学习日期,排在后面的是丙的学习日期. 根据乘法原理,完成试验共有 $3\times3\times3=3^3=27$ 种方法,即试验共有 27 个基本事

件. 又由于是随机安排，从而每个基本事件发生的可能性是等同的，说明这个问题属于古典概型.

(1) 设事件 A 表示恰好有一人在星期一学习，完成事件 A 必须依次经过两个步骤：第 1 个步骤是从三人中挑出一人，安排他在星期一学习，有 3 种方法；第 2 个步骤是安排剩下的两人分别在其余两天学习，有 $2\times 2=4$ 种方法. 根据乘法原理，完成事件 A 有 $3\times 4=12$ 种方法，即事件 A 包含 12 个基本事件. 根据古典概型计算概率的公式，得到概率

$$P(A)=\frac{12}{27}=\frac{4}{9}$$

所以恰好有一人在星期一学习的概率为 $\frac{4}{9}$.

(2) 设事件 B 表示三人学习日期不相重，完成事件 B 意味着从星期一到星期三这 3 天排队，不妨规定排在前面的是甲的学习日期，排在中间的是乙的学习日期，排在后面的是丙的学习日期，相当于从 3 个不同元素中每次取出 3 个不同元素的元素不重复全排列，有 P_3^3 种方法，即事件 B 包含 P_3^3 个基本事件. 根据古典概型计算概率的公式，得到概率

$$P(B)=\frac{\mathrm{P}_3^3}{27}=\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$$

所以三人学习日期不相重的概率为 $\frac{2}{9}$.

1.03　箱子里装有 4 个一级品与 6 个二级品，任取 5 个产品，求：

(1) 其中恰好有 2 个一级品的概率；

(2) 其中至多有 1 个一级品的概率.

解：注意到试验是从 10 个产品中任取 5 个产品，在取产品时并不计较这些产品的先后顺序，即不需要将它们排队，试验相当于从 10 个不同元素中每次取出 5 个不同元素的组合，完成试验共有 C_{10}^5 种取法，即试验共有 C_{10}^5 个基本事件. 又由于是任意抽取，从而每个基本事件发生的可能性是等同的，说明这个问题属于古典概型.

(1) 设事件 A 表示任取 5 个产品中恰好有 2 个一级品，即所取 5 个产品中有 2 个一级品与 3 个二级品，完成事件 A 必须依次经过两个步骤：第 1 个步骤是从 4 个一级品中取出 2 个一级品，有 C_4^2 种取法；第 2 个步骤是从 6 个二级品中取出 3 个二级品，有 C_6^3 种取法. 根据乘法原理，完成事件 A 有 $\mathrm{C}_4^2\mathrm{C}_6^3$ 种取法，即事件 A 包含 $\mathrm{C}_4^2\mathrm{C}_6^3$ 个基本事件. 根据古典概型计算概率的公式，得到概率

$$P(A)=\frac{C_4^2C_6^3}{C_{10}^5}=\frac{6\times 20}{252}=\frac{10}{21}$$

所以任取 5 个产品中恰好有 2 个一级品的概率为$\frac{10}{21}$.

(2) 设事件 B 表示任取 5 个产品中至多有 1 个一级品,包括恰好有 1 个一级品与没有一级品两类情况,完成事件 B 有两类方式:第 1 类方式是任取 5 个产品中恰好有 1 个一级品,即所取 5 个产品中有 1 个一级品与 4 个二级品,有 $C_4^1C_6^4$ 种取法;第 2 类方式是任取 5 个产品中没有一级品,即所取 5 个产品中有 0 个一级品与 5 个二级品,有 $C_4^0C_6^5$ 种取法. 根据加法原理,完成事件 B 有 $C_4^1C_6^4+C_4^0C_6^5$ 种取法,即事件 B 包含 $C_4^1C_6^4+C_4^0C_6^5$ 个基本事件. 根据古典概型计算概率的公式,得到概率

$$P(B)=\frac{C_4^1C_6^4+C_4^0C_6^5}{C_{10}^5}=\frac{4\times 15+1\times 6}{252}=\frac{11}{42}$$

所以任取 5 个产品中至多有 1 个一级品的概率为$\frac{11}{42}$.

1.04 某地区一年内刮风的概率为$\frac{4}{15}$,下雨的概率为$\frac{2}{15}$,既刮风又下雨的概率为$\frac{1}{10}$,求:

(1) 刮风或下雨的概率;

(2) 既不刮风又不下雨的概率.

解:设事件 A 表示刮风,事件 B 表示下雨,既刮风又下雨意味着事件 A 与 B 同时发生,可用积事件 AB 表示. 由题意得到概率

$$P(A)=\frac{4}{15}$$

$$P(B)=\frac{2}{15}$$

$$P(AB)=\frac{1}{10}$$

(1) 刮风或下雨,意味着事件 A 发生或事件 B 发生,可用和事件 $A+B$ 表示. 根据加法公式,得到概率

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{4}{15}+\frac{2}{15}-\frac{1}{10}=\frac{3}{10}$$

所以刮风或下雨的概率为$\frac{3}{10}$.

(2) 既不刮风又不下雨,意味着事件 A,B 都不发生,可用积事件 $\overline{A}\,\overline{B}$ 表示,而有关系式 $\overline{A}\,\overline{B}=\overline{A+B}$. 考虑到既不刮风又不下雨是刮风或下雨的对立事件,根据

加法公式的特殊情况，得到概率

$$P(\overline{A}\,\overline{B})=1-P(A+B)=1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$$

所以既不刮风又不下雨的概率为$\frac{7}{10}$.

1.05 盒子里装有 5 张壹角邮票、3 张贰角邮票及 2 张叁角邮票，任取 3 张邮票，求其中至少有 2 张邮票面值相同的概率.

解：注意到试验是从 10 张邮票中任取 3 张邮票，共有 C_{10}^3 种取法，即共有 C_{10}^3 个基本事件.

设事件 A 表示任取 3 张邮票中至少有 2 张邮票面值相同，包括恰好有 2 张邮票面值相同与恰好有 3 张邮票面值相同两类情况，由于直接计算其概率 $P(A)$ 比较麻烦，因此考虑事件 A 的对立事件 $\overline{A}$. 事件 $\overline{A}$ 表示任取 3 张邮票面值各不相同，即所取 3 张邮票中有 1 张壹角邮票、1 张贰角邮票及 1 张叁角邮票，有 $C_5^1C_3^1C_2^1$ 种取法，即事件 $\overline{A}$ 包含 $C_5^1C_3^1C_2^1$ 个基本事件. 根据加法公式的特殊情况与古典概型计算概率的公式，得到概率

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{C_5^1C_3^1C_2^1}{C_{10}^3}=1-\frac{5\times3\times2}{120}=\frac{3}{4}$$

所以任取 3 张邮票中至少有 2 张邮票面值相同的概率为$\frac{3}{4}$.

1.06 市场上供应的某种商品只由甲厂与乙厂生产，甲厂占 60%，乙厂占 40%，甲厂产品的次品率为 7%，乙厂产品的次品率为 8%. 从市场上任买 1 件这种商品，求：

(1) 它是甲厂次品的概率；

(2) 它是乙厂次品的概率.

解：设事件 A 表示甲厂产品，从而事件 $\overline{A}$ 表示乙厂产品，再设事件 B 表示次品. 由题意得到概率

$$P(A)=60\%$$
$$P(\overline{A})=40\%$$
$$P(B|A)=7\%$$
$$P(B|\overline{A})=8\%$$

(1) 甲厂次品意味着既是甲厂产品又是次品，即事件 A 与 B 同时发生，可用积事件 AB 表示. 根据乘法公式，得到概率

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=60\%\times7\%=4.2\%$$

所以从市场上任买 1 件这种商品是甲厂次品的概率为 4.2%.

(2) 乙厂次品意味着既是乙厂产品又是次品，即事件 $\overline{A}$ 与 B 同时发生，可用积事件 $\overline{A}B$ 表示. 根据乘法公式，得到概率

$$P(\overline{A}B) = P(\overline{A})P(B|\overline{A}) = 40\% \times 8\% = 3.2\%$$

所以从市场上任买 1 件这种商品是乙厂次品的概率为 3.2%.

1.07 某单位同时装有两种报警系统 A 与 B，当报警系统 A 单独使用时，其有效的概率为 0.70，当报警系统 B 单独使用时，其有效的概率为 0.80，在报警系统 A 有效的条件下，报警系统 B 有效的概率为 0.84. 若发生意外时，求：

(1) 在报警系统 B 有效的条件下，报警系统 A 有效的概率；

(2) 两种报警系统中至少有一种报警系统有效的概率.

解：设事件 A 表示报警系统 A 有效，事件 B 表示报警系统 B 有效，由题意得到概率

$$P(A) = 0.70$$

$$P(B) = 0.80$$

$$P(B|A) = 0.84$$

(1) 所求在报警系统 B 有效的条件下，报警系统 A 有效的概率为条件概率 $P(A|B)$，根据乘法公式

$$P(AB) = P(B)P(A|B)$$

得到条件概率

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{0.588}{0.80} = 0.735$$

所以在报警系统 B 有效的条件下，报警系统 A 有效的概率为 0.735.

(2) 两种报警系统中至少有一种报警系统有效，意味着报警系统 A 有效或报警系统 B 有效，即事件 A 发生或事件 B 发生，可用和事件 $A+B$ 表示. 根据加法公式，得到概率

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.70 + 0.80 - 0.588 = 0.912$$

所以两种报警系统中至少有一种报警系统有效的概率为 0.912.

1.08 口袋里装有 6 个黑球与 3 个白球，每次任取 1 个球，不放回取两次，求：

(1) 第一次取到黑球且第二次取到白球的概率；

(2) 两次取到球的颜色一致的概率.

解：设事件 A 表示第一次取到黑球，事件 B 表示第二次取到黑球.

(1) 第一次取到黑球且第二次取到白球，意味着第一次取到黑球且第二次不取到黑球，即事件 A 发生且事件 B 不发生，可用积事件 $A\overline{B}$ 表示. 根据乘法公式，得到概率

$$P(A\overline{B}) = P(A)P(\overline{B}|A) = \frac{6}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{4}$$

所以第一次取到黑球且第二次取到白球的概率为$\frac{1}{4}$.

(2) 两次取到球的颜色一致，意味着两次都取到黑球，或者两次都取到白球，即积事件 AB 发生或积事件$\overline{A}\,\overline{B}$ 发生，可用和事件 $AB+\overline{A}\,\overline{B}$ 表示. 由于在任意两次抽取中，不可能既是两次都取到黑球，又同时是两次都取到白球，说明积事件 AB 与$\overline{A}\,\overline{B}$ 不可能同时发生，即积事件 AB 与$\overline{A}\,\overline{B}$ 互斥. 根据加法公式的特殊情况与乘法公式，得到概率

$$\begin{aligned}P(AB+\overline{A}\,\overline{B}) &= P(AB)+P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(\overline{B}|\overline{A})\\&= \frac{6}{9}\times\frac{5}{8}+\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

所以两次取到球的颜色一致的概率为$\frac{1}{2}$.

1.09 在一批产品中有 80% 是合格品，验收这批产品时规定，先从中任取 1 个产品，若它为合格品就放回去，然后再任取 1 个产品，若仍为合格品，则接收这批产品，否则拒收. 求：

(1) 检验第一个产品为合格品且检验第二个产品为次品的概率；

(2) 这批产品被拒收的概率.

解：设事件 A_1 表示检验第一个产品为合格品，事件 A_2 表示检验第二个产品为合格品，由题意得到概率

$$P(A_1)=80\%$$
$$P(A_2)=80\%$$

(1) 检验第一个产品为合格品且检验第二个产品为次品，意味着检验第一个产品为合格品且检验第二个产品不为合格品，即事件 A_1 发生且事件 A_2 不发生，可用积事件 $A_1\overline{A}_2$ 表示. 由于放回抽取，说明事件 A_1 与 A_2 相互独立，因而事件 A_1 与 $\overline{A}_2$ 也相互独立. 根据乘法公式的特殊情况与加法公式的特殊情况，得到概率

$$\begin{aligned}P(A_1\overline{A}_2) &= P(A_1)P(\overline{A}_2) = P(A_1)(1-P(A_2)) = 80\%\times(1-80\%)\\&= 16\%\end{aligned}$$

所以检验第一个产品为合格品且检验第二个产品为次品的概率为 16%.

(2) 再设事件 A 表示这批产品被接收，从而事件 $\overline{A}$ 表示这批产品被拒收. 这批产品被接收，意味着检验第一个产品为合格品且检验第二个产品也为合格品，即事件 A_1 发生且事件 A_2 发生，于是事件 $A=A_1A_2$. 由于放回抽取，因而事件 A_1，A_2 相互独立. 根据乘法公式的特殊情况，有概率

$$P(A)=P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)=80\%\times 80\%=64\%$$

再根据加法公式的特殊情况，得到概率

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 64\% = 36\%$$

所以这批产品被拒收的概率为 36%.

1.10 一场排球比赛采用“三局两胜”制，在甲、乙两队对阵中，若甲队在各局取胜与否 互不影响，且在每局取胜的概率皆为 0.6，求甲队在一场比赛中取胜的概率.

解：设事件 A_1 表示甲队在第一局取胜，事件 A_2 表示甲队在第二局取胜，事件 A_3 表示甲队在第三局取胜，事件 A 表示甲队在一场比赛中取胜. 由题意得到概率

$$P(A_1) = 0.6$$
$$P(A_2) = 0.6$$
$$P(A_3) = 0.6$$

甲队在一场比赛中取胜，包括甲队在第一局与第二局皆取胜(这时不必进行第三局比赛)、在第一局取胜第二局负且第三局取胜及在第一局负且第二局与第三局皆取胜三类情况，即事件 A 发生意味着积事件 A_1A_2 发生或积事件 $A_1\overline{A}_2A_3$ 发生或积事件 $\overline{A}_1A_2A_3$ 发生，于是事件 A 当然等于积事件 $A_1A_2, A_1\overline{A}_2A_3, \overline{A}_1A_2A_3$ 的和事件，即事件

$$A = A_1A_2 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3$$

由于在任意一场比赛中，不可能既是甲队在第一局与第二局皆取胜，又同时是甲队在第一局取胜第二局负且第三局取胜或在第一局负且第二局与第三局皆取胜，说明积事件 $A_1A_2, A_1\overline{A}_2A_3, \overline{A}_1A_2A_3$ 中的任何两个积事件不可能同时发生，即积事件 $A_1A_2, A_1\overline{A}_2A_3, \overline{A}_1A_2A_3$ 两两互斥. 由于甲队在各局取胜与否互不影响，因而事件 A_1, A_2, A_3 相互独立，事件 $A_1, \overline{A}_2, A_3$ 也相互独立，事件 $\overline{A}_1, A_2, A_3$ 也相互独立. 根据加法公式特殊情况的推广与乘法公式特殊情况的推广，得到概率

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(A_1A_2 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3) \\
&= P(A_1A_2) + P(A_1\overline{A}_2A_3) + P(\overline{A}_1A_2A_3) \\
&= P(A_1)P(A_2) + P(A_1)P(\overline{A}_2)P(A_3) + P(\overline{A}_1)P(A_2)P(A_3) \\
&= P(A_1)P(A_2) + P(A_1)(1 - P(A_2))P(A_3) \\
&\quad + (1 - P(A_1))P(A_2)P(A_3) \\
&= 0.6 \times 0.6 + 0.6 \times (1 - 0.6) \times 0.6 + (1 - 0.6) \times 0.6 \times 0.6 \\
&= 0.648
\end{aligned}$$

所以甲队在一场比赛中取胜的概率为 0.648.

1.11 甲、乙、丙三人相互独立向同一目标各射击一次，甲击中目标的概率为

0.8,乙击中目标的概率为0.7,丙击中目标的概率为0.6,求目标被击中的概率.

解:设事件 A 表示甲击中目标,事件 B 表示乙击中目标,事件 C 表示丙击中目标.由题意得到概率

$$P(A)=0.8$$
$$P(B)=0.7$$
$$P(C)=0.6$$

目标被击中,意味着甲、乙、丙三人中至少有一人击中目标,可用和事件 $A+B+C$ 表示.它包括恰好有一人击中目标、恰好有两人击中目标及恰好三人都击中目标三类情况,由于直接计算其概率比较麻烦,因此考虑它的对立事件.它的对立事件是目标没有被击中,即甲、乙、丙三人都没有击中目标,可用积事件 $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ 表示.由于甲、乙、丙三人相互独立射击,说明事件 A,B,C 相互独立,因而事件 $\overline{A},\overline{B},\overline{C}$ 也相互独立.根据加法公式的特殊情况与乘法公式特殊情况的推广,得到概率

$$\begin{aligned}P(A+B+C)&=1-P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=1-P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})\\&=1-(1-P(A))(1-P(B))(1-P(C))\\&=1-(1-0.8)\times(1-0.7)\times(1-0.6)=0.976\end{aligned}$$

所以目标被击中的概率为0.976.

1.12　市场上供应的某种商品由甲厂、乙厂及丙厂生产,甲厂占50%,乙厂占30%,丙厂占20%,甲厂产品的正品率为88%,乙厂产品的正品率为70%,丙厂产品的正品率为75%,求:

(1) 从市场上任买1件这种商品是正品的概率;

(2) 从市场上已买1件正品是甲厂生产的概率.

解:设事件 A_1 表示甲厂产品,事件 A_2 表示乙厂产品,事件 A_3 表示丙厂产品,事件 B 表示正品.由题意得到概率

$$P(A_1)=50\%$$
$$P(A_2)=30\%$$
$$P(A_3)=20\%$$
$$P(B|A_1)=88\%$$
$$P(B|A_2)=70\%$$
$$P(B|A_3)=75\%$$

(1) 由于事件 A_1,A_2,A_3 构成一个完备事件组,从而对于事件 B,有关系式

$$B=A_1B+A_2B+A_3B$$

这是容易理解的,注意到正品包括甲厂正品、乙厂正品及丙厂正品三个部分,即事

件 B 发生意味着积事件 A_1B 发生或积事件 A_2B 发生或积事件 A_3B 发生，于是事件 B 当然等于积事件 A_1B,A_2B,A_3B 的和事件. 根据全概公式，得到概率

$$\begin{aligned}P(B) &= P(A_1B+A_2B+A_3B) = P(A_1B)+P(A_2B)+P(A_3B)\\&= P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)\\&= 50\%\times 88\%+30\%\times 70\%+20\%\times 75\% = 80\%\end{aligned}$$

所以从市场上任买 1 件这种商品是正品的概率为 80%.

(2) 注意到所求概率为条件概率 $P(A_1|B)$，根据乘法公式

$$P(B)P(A_1|B) = P(A_1)P(B|A_1)$$

得到条件概率

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{50\%\times 88\%}{80\%} = 55\%$$

所以从市场上已买 1 件正品是甲厂生产的概率为 55%.

1.13 盒子里装有 5 支红圆珠笔与 8 支蓝圆珠笔，每次任取 1 支圆珠笔，不放回取两次，求：

(1) 两次都取到红圆珠笔的概率；

(2) 第二次取到红圆珠笔的概率.

解：设事件 A 表示第一次取到红圆珠笔，从而事件 $\overline{A}$ 表示第一次取到蓝圆珠笔，再设事件 B 表示第二次取到红圆珠笔.

(1) 两次都取到红圆珠笔，意味着第一次取到红圆珠笔且第二次也取到红圆珠笔，即事件 A 与 B 同时发生，可用积事件 AB 表示. 根据乘法公式，得到概率

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = \frac{5}{13}\times\frac{4}{12} = \frac{5}{39}$$

所以两次都取到红圆珠笔的概率为$\frac{5}{39}$.

(2) 由于事件 $A,\overline{A}$ 构成最简单的完备事件组，从而对于事件 B，有关系式

$$B = AB+\overline{A}B$$

这是容易理解的，注意到第二次取到红圆珠笔，包括第一次取到红圆珠笔且第二次也取到红圆珠笔与第一次取到蓝圆珠笔但第二次取到红圆珠笔两类情况，即事件 B 发生意味着积事件 AB 发生或积事件 $\overline{A}B$ 发生，于是事件 B 当然等于积事件 AB 与 $\overline{A}B$ 的和事件. 根据全概公式的特殊情况，得到概率

$$\begin{aligned}P(B) &= P(AB+\overline{A}B) = P(AB)+P(\overline{A}B) = P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})\\&= \frac{5}{13}\times\frac{4}{12}+\frac{8}{13}\times\frac{5}{12} = \frac{5}{13}\end{aligned}$$

所以第二次取到红圆珠笔的概率为$\frac{5}{13}$.

1.14　设A,B为两个事件,且已知概率$P(A)=0.5,P(B)=0.6,P(B|\overline{A})=0.4$,求:

(1) 概率$P(\overline{A}B)$;

(2) 概率$P(AB)$;

(3) 条件概率$P(B|A)$;

(4) 概率$P(A+B)$.

解:(1) 根据乘法公式与加法公式的特殊情况,得到概率

$$P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B|\overline{A})=(1-P(A))P(B|\overline{A})=(1-0.5)\times 0.4=0.2$$

(2) 根据全概公式的特殊情况

$$P(B)=P(AB)+P(\overline{A}B)$$

得到概率

$$P(AB)=P(B)-P(\overline{A}B)=0.6-0.2=0.4$$

(3) 根据乘法公式

$$P(AB)=P(A)P(B|A)$$

得到条件概率

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.4}{0.5}=0.8$$

(4) 根据加法公式,得到概率

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.5+0.6-0.4=0.7$$

1.15　填空题

(1) 甲、乙各射击一次,设事件A表示甲击中目标,事件B表示乙击中目标,则甲、乙两人中恰好有一人不击中目标可用事件______表示.

解:甲、乙两人中恰好有一人不击中目标,意味着甲不击中目标且乙击中目标,或者甲击中目标且乙不击中目标,即积事件$\overline{A}B$发生或积事件$A\overline{B}$发生,可用事件$\overline{A}B+A\overline{B}$表示,于是应将"$\overline{A}B+A\overline{B}$"直接填在空内.

(2) 已知甲、乙两个盒子里各装有2个新球与4个旧球,先从甲盒中任取1个球放入乙盒,再从乙盒中任取1个球,设事件A表示从甲盒中取出新球放入乙盒,事件B表示从乙盒中取出新球,则条件概率$P(B|A)=$______.

解:在事件A已经发生的条件下,事件B发生的概率意味着从甲盒中取出1个新球放入乙盒后再从乙盒中取出1个新球的概率. 由于从甲盒中取出1个新球放

入乙盒后，乙盒里有 3 个新球与 4 个旧球，因此这时从乙盒中取出 1 个新球的概率为$\frac{3}{7}$，即条件概率

$$P(B|A)=\frac{3}{7}$$

于是应将“$\frac{3}{7}$”直接填在空内.

(3) 设 A,B 为两个事件，且已知概率 $P(A)=0.4,P(B)=0.3$，若事件 A,B 互斥，则概率 $P(A+B)=$ ______.

解：根据加法公式的特殊情况，得到概率

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=0.4+0.3=0.7$$

于是应将“0.7”直接填在空内.

(4) 设 A,B 为两个事件，若概率 $P(B)=\frac{3}{10},P(B|A)=\frac{1}{6},P(A+B)=\frac{4}{5}$，则概率 $P(A)=$ ______.

解：根据加法公式与乘法公式，有

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)P(B|A)$$

将已知数值代入，得到关系式

$$\frac{4}{5}=P(A)+\frac{3}{10}-\frac{1}{6}P(A)$$

即有

$$\frac{5}{6}P(A)=\frac{1}{2}$$

因此概率

$$P(A)=\frac{3}{5}$$

于是应将“$\frac{3}{5}$”直接填在空内.

(5) 设 A,B 为两个事件，且已知概率 $P(\overline{A})=0.7,P(B)=0.6$，若事件 A,B 相互独立，则概率 $P(AB)=$ ______.

解：根据乘法公式的特殊情况与加法公式的特殊情况，得到概率

$$P(AB)=P(A)P(B)=(1-P(\overline{A}))P(B)=(1-0.7)\times 0.6=0.18$$

于是应将“0.18”直接填在空内.

(6) 设 A,B 为两个事件，且已知概率 $P(A)=0.4,P(B)=0.3$，若事件 A,B 相互独立，则概率 $P(A+B)=$ ______.