应用数学

Ying yong Shu xue

朱蕾 编著

中国人民公安大学出版社

PHCPPSU

应 用 数 学

朱　蕾　编著

中国人民公安大学出版社
·北　京·

图书在版编目（CIP）数据

应用数学/朱蕾编著.—北京：中国人民公安大学出版社，2009.8

ISBN 978-7-81139-728-4

Ⅰ.应… Ⅱ.朱… Ⅲ.应用数学—高等学校—教材 Ⅳ.029

中国版本图书馆CIP数据核字（2009）第148022号

应用数学

YINGYONG SHUXUE

朱　蕾　编著

出版发行：中国人民公安大学出版社
地　　址：北京市西城区木樨地南里
邮政编码：100038
经　　销：新华书店
印　　刷：北京市泰锐印刷厂

版　　次：2009年8月第1版
印　　次：2009年8月第1次
印　　张：6.625
开　　本：850毫米×1168毫米　1/32
字　　数：160千字

书　　号：ISBN 978-7-81139-728-4/O·002
定　　价：20.00元

网　　址：www.phcppsu.com.cn　www.porclub.com.cn
电子邮箱：cpep@public.bta.net.cn　zbs@cppsu.edu.cn

营销中心电话（批销）：（010）83903254
警官读者俱乐部电话（邮购）：（010）83903253
读者服务部电话（书店）：（010）83903257
教材分社电话：（010）83903259
公安图书分社电话：（010）83905672
法律图书分社电话：（010）83905637
公安文艺分社电话：（010）83903973
杂志分社电话：（010）83903239
电子音像分社电话：（010）83905727

编 者 的 话

现代化社会要求高等教育培养高素质的优秀人才。数学思维兼具抽象性、逻辑性和许多形象思维的特征，它的精神、思想、方法教育了一代又一代人。数学教育在人的品德与才智，特别是在人的抽象、认知、处理信息等能力的培养上有着无可替代的作用，所以数学教学在高等院校的人才培养方案中占有十分重要的地位。

按照2008年南京森林公安高等专科学校各专业教学计划的要求，“高等数学”将更名为“应用数学”，作为全校性公共课开设。其中，包括针对相关专业讲授高等数学的部分知识和国家公务员录用考试的“数量关系、资料分析”等知识，针对其他专业讲授国家公务员录用考试的“数量关系、资料分析”等知识。鉴于我校的特殊性质，学生毕业时参加国家公务员录用考试的结果至关重要，因此该课程的作用十分关键。

确定教学内容时，笔者结合20多年高等数学的教学经验和多年招警考试的辅导经验，对于高等数学部分的组织，以“重理念而轻理论，重体验而轻体系”为原则，以加强学生的思维训练和计算能力的训练为目标；对于数量关系、资料分析等有关内容，则以问题为切入点，以解决问题为终极目标，试图通过大量的例题讲解、练习、测试，提高学生观察、分析、归纳、解决问题的能力。同时，笔者从数学的角度，对大量公务员考试辅导资料的题型分类、解题谋略进行了梳理、归并，使其更具科学性、规律性，更易于为学生所掌握。

本课程服务于各专业人才培养目标的要求，着眼于培养学

生科学的思维方法和创新精神，着眼于对学生的认知、抽象、推理演绎、综合分析等方面能力的训练，必将有力地促进学生科学素质和综合素养的提高。

在本书编写过程中，陶珑老师在审稿、校对等方面付出了辛勤的劳动，曹雱、张春霞、韩法旺等老师也给予了大力的支持和帮助，在此一并表示感谢。

由于编者水平的局限，加上时间仓促，本书错误之处在所难免，敬请各位读者批评指正，以利改进。

编 者

2009 年 7 月

目　录

第一章　函数与极限

第一节　函　数

一、集合与区间

1. 集合

集合，是数学中的一个基本概念。所谓集合，是指具有特定性质的一些事物的总体，组成这个集合的事物称为该集合的元素。本书用大写字母 A，B，C，…等表示集合，而用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 等表示集合的元素。如果 a 是集合 A 的元素，就记为“$a \in A$”（读作 a 属于 A）；如果 a 不是集合 A 的元素，就记为“$a \notin A$”（读作 a 不属于 A）。

由有限个元素组成的集合称为有限集。有限集可用列举出它的全体元素的方法来表示。例如，由元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的集合 A，可记作

$$A = \{a_1,a_2,\cdots,a_n\}。$$

由无穷多个元素组成的集合称为无限集。无限集通常用如下的方式表示：设集合 A 由具有某种特定性质的元素 x 所组成，就记作

$$A = \{x \mid x\text{ 所具有的特征}\}。$$

本书用到的集合主要是实数集，即元素都是实数的集合。如果没有特别声明，以后提到的数都是实数。我们将全体自然数的集合记作 N（在本书中，自然数集 N 是指由零和全体正整数所组成的数集），全体整数的集合记作 Z，全体有理数的集合记

作 Q，全体实数的集合记作 R。有时我们在表示数集的字母右上角添加“+”“-”等上标，表示该数集的特定子集。以实数集 R 为例，R^+ 表示全体正实数之集，R^- 表示全体负实数之集。推而广之，可得出其他数集的类似记号的含义。

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，即若 $x \in A$，则必有 $x \in B$，就说 A 是 B 的子集，记作 $A \subset B$（读作 A 包含于 B）或 $B \supset A$（读作 B 包含 A）。例如，有

$$N \subset Z \subset Q \subset R。$$

如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，就称集合 A 与 B 相等，记作 $A = B$。由集合相等的概念可知，集合中的重复元素实际上可看作一个元素。

不含任何元素的集合称为空集。例如，对于

$$\{x \mid x \in R, x^2 + 1 = 0\}$$

来说，因为满足条件 $x^2 + 1 = 0$ 的实数是不存在的，所以该集合为空集。空集一般记作 Φ；同时约定，空集为任何集合的子集。

读者在中学里已经学过，实数与数轴上的点之间可以建立一一对应的关系。因此，有时为了突出几何直观，就把数 x 称为点 x，这时就是指数轴上与数 x 对应的那个点。相应的，数集也可称为（数轴上的）点集。有时还根据点集的几何特征来对数集命名，下面介绍的“区间”就是这样的例子。

2. 区间

区间是用得较多的一类数集。设 a 和 b 都是实数，且 $a < b$。

数集 $\{x \mid a < x < b\}$ 称为开区间，记作 (a,b)，即

$$(a,b) = \{x \mid a < x < b\}。$$

其中 a 和 b 称为开区间 (a,b) 的端点，这里 $a \notin (a,b)$，$b \notin (a,b)$。

数集 $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ 称为闭区间，记作 $[a,b]$，即

$$[a,b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}。$$

a 和 b 也称为闭区间 $[a,b]$ 的端点，这里 $a \in [a,b]$，$b \in [a,b]$。

类似地可说明

$$[a,b)=\{x \mid a \leqslant x < b\}$$

$$(a,b]=\{x \mid a < x \leqslant b\}。$$

$[a,b)$ 和 $(a,b]$ 都称为半开区间。

以上这些区间都称为有限区间。数 $b-a$ 称为这些区间的长度。从数轴上看，这些有限区间是长度为有限的（不包括端点或包括一个、两个端点的）线段（图 1－1）。

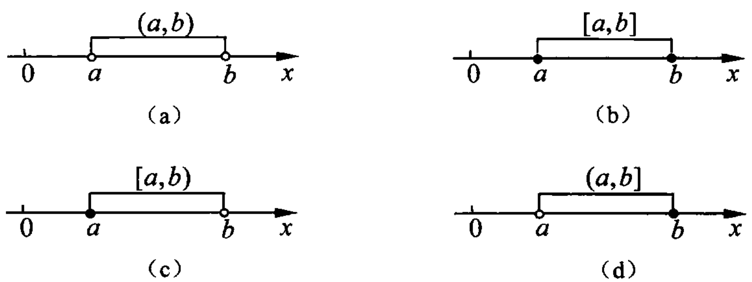


图 1－1

$$[a,+\infty)=\{x \mid a \leqslant x\},$$

此外，还有所谓无限区间。引进记号 $+\infty$（读作正无穷大）及 $-\infty$（读作负无穷大），则无限的半开或开区间表示如下：

$$[a,+\infty)=\{x \mid a \leqslant x\},$$

$$(-\infty,b]=\{x \mid x \leqslant b\},$$

$$(a,+\infty)=\{x \mid a < x\},$$

$$(-\infty,b)=\{x \mid x < b\}。$$

这些区间在数轴上表现为长度为无限的半直线（图 1－2）。

全体实数的集合 R 也可记作 $(-\infty,+\infty)$，它也是无限的开区间。

图 1－2

要注意的是，记号 $+\infty$、$-\infty$ 都只是表示无限性的一种记号，它们都不是某个确定的数，因此也不能参与数的运算。

3. 邻域

定义　设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$。数集 $\{x \mid |x-a|<\delta\}$ 称为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}。$$

点 a 叫做邻域 $U(a,\delta)$ 的中心，δ 叫做 $U(a,\delta)$ 的半径。

点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后，称为点 a 去心的 δ 邻域，记作 $U(\hat{a},\delta)$，即

$$U(\hat{a},\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}。$$

二、函数的概念

1. 函数的定义

定义　给定两个数集 D 和 M，如果按照某种对应法则 f，对于 D 中的任一值 x，集合 M 中都有唯一确定的值 y 与之对应，则称 y 是定义在 D 上的函数。记为

$$y=f(x)$$

其中，D 称为函数的定义域，x 称为自变量，所有函数值 y 的集合 M 称为函数的值域。

关于函数的定义，做如下几点说明：

（1）从函数的定义可以看出，确定一个函数有两个要素，即定义域 D 和对应法则 f，两个函数相等，当且仅当它们的定义

域和对应法则都相等。

（2）如果自变量在定义域内任取一个数值 x 时，对应的 y 是唯一的，这时的函数称为单值函数，否则称为多值函数。本书所讨论的函数如果不加特别的说明，都是指单值函数。

（3）在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的。在数学中，有时不考虑函数的实际意义，而抽象地研究用算式表达的函数。这时我们约定，函数的定义域就是自变量所能取的使算式有意义的一切实数所组成的集合。

例 1. 求下列函数的定义域：

(1) $y = \dfrac{1}{4-x^2} + \sqrt{x+2}$；　　(2) $y = \ln(1-x^2)$。

解：(1) $\because \begin{cases} 4-x^2 \neq 0 \\ x+2 \geqslant 0 \end{cases}$，　解得 $\begin{cases} x \neq \pm 2 \\ x \geqslant -2 \end{cases}$

所以该函数的定义域为 $(-2,2) \cup (2,+\infty)$。

(2) $\because 1-x^2>0$　解得 $-1<x<1$

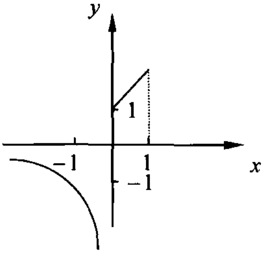
所以该函数的定义域为 $(-1,1)$。

2. 分段函数

有些函数在其定义域的不同部分，对应法则由不同的解析式表达，这样的函数称为分段函数。

例 2. 已知 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & x<0 \\ x+1 & 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$ 求：

(1) $f(x)$ 的定义域；(2) $f(-1)$，$f(\dfrac{1}{2})$；(3) 作出函数 $f(x)$ 的图像。



解：(1) $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,1]$

(2) $f(-1) = \dfrac{1}{x}\Big|_{x=-1} = -1$，

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=(x+1)\Big|_{x=\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}$$

(3) $f(x)$ 的图像如右图。

三、函数的几种特性

1. 单调性

定义　设有函数 $y=f(x)$，如果对于 (a,b) 内的任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称此函数在区间 (a,b) 内是单调增加的；如果当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称此函数在区间 (a,b) 内是单调减少的。

2. 奇偶性

定义　设函数 $y=f(x)$，$D=(-a,a)$。如果对于任意的 $x\in D$，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数；如果对于任意的 $x\in D$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数。

显然，$f(x)$ 为奇函数或偶函数的必要条件是其定义域关于原点对称。奇函数的图像关于原点对称，偶函数的图像关于 y 轴对称。

3. 周期性

定义　设函数 $y=f(x)$，$x\in D$，如果存在一个正数 T，使得对于任意的 $x\in D$，都有 $f(x+T)=f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 叫 $f(x)$ 的周期（通常指最小正周期）。

4. 有界性

定义　设函数 $y=f(x)$，$x\in D$，如果存在一个正数 M，使得对于任意的 $x\in D$，都有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称 $f(x)$ 在 D 上有界；如果这样的 M 不存在，则称 $f(x)$ 在 D 上无界。

四、反函数

定义　设 $y=f(x)$ 是定义在 D 上的一个函数，其值域为 M。

如果对于 M 中的任一值 y，都可以由关系式 $y=f(x)$ 确定唯一的值 x，则得到一个定义在 M 上的以 y 为自变量的函数，称之为 $y=f(x)$ 的反函数，记为

$$x=f^{-1}(y)\text{。}$$

在函数式 $x=f^{-1}(y)$ 中，字母 y 表示自变量，字母 x 表示因变量。但习惯上一般用 x 表示自变量，所以反函数 $x=f^{-1}(y)$ 通常表示为 $y=f^{-1}(x)$。以后如无特殊说明，函数 $y=f(x)$ 的反函数都是指以 x 为自变量的反函数 $y=f^{-1}(x)$。

说明：

(1) 单调且单值的函数一定存在反函数；

(2) 函数 $y=f(x)$ 的图像与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称。

例 3. 求 $y=\dfrac{3x+1}{x-2}$ 的反函数。

解：由 $y=\dfrac{3x+1}{x-2}$，　解得 $x=\dfrac{1+2y}{y-3}$

将 x 与 y 互换得，所求反函数为 $y=\dfrac{1+2x}{x-3}$ 。

五、复合函数与初等函数

1. 基本初等函数

我们学过的幂函数，$y=x^{\alpha}$（α 为实数）、指数函数 $y=a^{x}$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）、对数函数 $y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数。

2. 复合函数

先举一个例子，设 $y=\sqrt{u}$，而 $u=1+x^2$，将 $u=1+x^2$ 代入 $y=\sqrt{u}$ 中，得

$$y=\sqrt{1+x^2}$$

我们说，函数 $y=\sqrt{1+x^2}$ 是由 $y=\sqrt{u}$ 及 $u=1+x^2$ 复合而成的复合函数。

定义　设函数 $y=f(u)$，$u\in D_1$；$u=\varphi(x)$，$u\in D_2$，且 $D_1\cap D_2\neq\Phi$，将 $u=\varphi(x)$ 代入 $y=f(u)$ 中，得函数 $y=f[\varphi(x)]$，则称此函数是由 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，简称复合函数，其中 u 为中间变量。

例 4. 指出下列函数的复合过程：

(1) $y=\sqrt{1+x^2}$；　　(2) $y=\sin^2 x$ 。

解：(1) $y=\sqrt{1+x^2}$ 是由 $y=\sqrt{u}$ 及 $u=1+x^2$ 复合而成的；

(2) $y=\sin^2 x$ 是由 $y=u^2$ 及 $u=\sin x$ 复合而成的。

复合函数也可以由两个以上的函数经过复合构成。

例如：设 $y=\sqrt{u}$，$u=\cot v$，$v=\dfrac{x}{2}$，则得复合函数

$$y=\sqrt{\cot\frac{x}{2}}$$

这里 u 及 v 都是中间变量。

应该指出的是：并不是任意两个函数都可以构成一个复合函数。例如，$y=\arcsin u$，$u=2+x^2$ 就不能进行复合构成一个复合函数，因为 $y=\arcsin u$ 的定义域为 $D_1=[-1,1]$，而 $u=2+x^2$ 的值域为 $D_2=[2,+\infty)$，$D_1\cap D_2=\Phi$，因此，这两个函数不能进行复合。

对于复合函数我们往往需要掌握将一个较为复杂的复合函数分解为构成它的若干个简单函数的方法。

例 5. 指出下列复合函数是由哪些简单函数复合而成的？

(1) $y=e^{\sin\frac{1}{x}}$；　　(2) $y=\cos^2(2x+1)$ 。

解：(1) $y=e^{\sin\frac{1}{x}}$ 是由 $y=e^u$，$u=\sin v$，$v=\dfrac{1}{x}$ 复合而成的；

(2) $y=\cos^2(2x+1)$ 是由 $y=u^2$，$u=\cos v$，$v=2x+1$ 复

合而成的。

注意：将一个复合函数分解时，要从外向里，一层一层地拆下去，直至拆到每一个函数都是基本初等函数或基本初等函数和常数经过四则运算所形成的函数。为方便起见，我们把基本初等函数或基本初等函数和常数经过四则运算所形成的函数称为简单函数。

3. 初等函数

由基本初等函数和常数经过有限次的四则运算及有限次的复合过程所构成并且可以用一个式子表示的函数，称为初等函数。例如：

$$y=\sqrt{1-x^2},\quad y=\sin^2 x,\quad y=\sqrt{\cot\frac{x}{2}},$$

都是初等函数。

一般的，分段函数不是初等函数。

习题 1-1

1. 下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\lg x^2$, $g(x)=2\lg x$；

(2) $f(x)=x$, $g(x)=\sqrt{x^2}$；

(3) $f(x)=x+1$, $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$；

(4) $f(x)=x$, $g(x)=(\sqrt{x})^2$；

(5) $f(x)=\ln\sqrt{x-1}$, $g(x)=\dfrac{1}{2}\ln(x-1)$。

2. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$；　　(2) $y=\sqrt{1-\ln x}$；

(3) $y=e^{\frac{1}{x}}-\ln\sqrt{x+2}$；　　(4) $y=\sqrt{2+x}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}$。

3. 设$f(x)=\begin{cases}2x & |x|\leqslant 1\\ x+1 & x>1\end{cases}$，

(1) 求$f(x)$的定义域；　　(2) 求$f(\frac{1}{2})$，$f(2)$；

(3) 作出函数$f(x)$的图像。

4. 求下列函数的反函数：

(1) $y=1+\ln(x+2)$；　　(2) $y=2\sin 3x, x\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]$。

5. 将下列复合函数分解为若干简单函数。

(1) $y=\cos x^2$；　　(2) $y=\ln\sqrt{x^2-1}$；

(3) $y=\arccos(1-x^2)$；　　(4) $y=\sin^2(2x+1)$；

(5) $y=e^{\sin\frac{x}{2}}$；　　(6) $y=\sqrt{\ln\tan x}$。

6. 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $(-1,2)$。求出函数 $y=f(2x)$，$y=f(\frac{x}{2})$ 和 $y=f(\lg x)$ 的定义域。