数学卷

中国科学技术
经·典·文·库

几何定理机器证明的基本原理（初等几何部分）

吴文俊 著

科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

本书论述初等几何机器证明的基本原理，证明了奠基于各种公理系统的各种初等几何，只需相当于乘法交换律的某一公理成立，大都可以机械化. 因此在理论上，这些几何的定理证明可以借助于计算机来实施. 可以机械化的几何包括了多种有序或无序的常用几何、投影几何、非欧几何与圆几何等.

全书共分六章. 前两章是关于几何机械化的预备知识，集中介绍了常用几何；后四章致力于几何的机械化问题. 第 3 章为几何定理证明的机械化与 Hilbert 机械化定理，第 4，5 章分别为（常用）无序几何的机械化定理和（常用）有序几何的机械化定理，第 6 章阐述各种几何的机械化定理.

本书可供数学工作者和计算机科学工作者以及高等院校有关专业的师生参考.

图书在版编目（CIP）数据

几何定理机器证明的基本原理 / 吴文俊著. —北京：科学出版社，2010
(中国科学技术经典文库·数学卷)
ISBN 978-7-03-028377-1

Ⅰ.①几… Ⅱ.①吴… Ⅲ.①几何-定理证明：机器证明 Ⅳ.①O18

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 140727 号

责任编辑：杨家福 邢莉莉 赵彦超 / 责任校对：钟 洋
责任印制：钱玉芬 / 封面设计：王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
1984 年 8 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2010 年 8 月第二次印刷 印张：15 1/2
字数：295 000

定价：65.00 元

导　　言

几何学起源于观天测地这一类实践活动，这一点似已成为定论，无可置疑．但在总结各种经验，综合上升为理论，最后成为一门科学的过程中，却有着不同的方式、方法与途径．恩格斯说过，“纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系”．古希腊时代，对待几何学就有两种不同的方法：一种可以欧几里得的《几何原本》为代表，把数量关系完全排除在外，而单纯追求各种几何事实间的逻辑关系，以此建立几何公理体系，成为数学中演绎推理方法的典范；另一种可以阿基米德的有关著作为代表，着重研究几何图形的数量特征或其量度，诸如圆周率、球面面积以及抛物线弓形面积的计算等等．尽管这二者各具特色，风格殊异，体现了几何发展中的两种不同体系，但都为数学发展作出了巨大贡献．

我国几何学的发展则是始终与数量关系形影不离的．诸如面积、体积的量度以及关于勾股定理的应用，在我国古代几何中一直占据着中心位置．那时我国没有陷入繁琐的成堆公理之中，而是提炼出几条一般原理，并以此作为广泛应用与推理论证的依据．例如，出入相补原理、体积理论中的刘徽原理以及与 16 世纪欧洲出现的 Cavalieri 原理相当的刘祖原理等．所谓阿基米德与欧几里得的两种不同体系，在我国古代几何中兼而有之．勾股定理自然地引起平方根的计算问题，而我国古代求平方根和立方根的方法，其步骤就是以出入相补原理为几何背景逐步索骥而得．由平方根和立方根的计算逐步发展为二次以至高次方程的解法及其理论，最后导致天元术的发现以及几何的代数化、多项式的运算与消去法等．本书所阐述的几何定理证明的机械化问题，从思维到方法，至少在宋元时代就有蛛丝马迹可寻．虽然这是极其原始的，但是，仅就著者本人而言，主要是受中国古代数学的启发．

在古代几何的发展中，由于对数量关系的不同认识而引起了各种倾向，直到 17 世纪解析几何的出现才得到了统一．这使得几何的问题可以用代数的方法来处理，以致可以避免欧几里得那种几何综合证法所需要的高度技巧．虽然几何综合方法以其直观引人入胜，且曾在 19 世纪有过一段复兴的时期，但终究难与解析几何的代数方法相匹敌．现代几何学的许多最重要的领域，例如微分几何与代数几何，往往一开始就假定了一个数系统（一般是一个数域，甚至是特殊的实数域与复数域），由此构成仿射空间或投影空间，然后用坐标或以函数与导数间的代数关系

式来引进各种几何图形, 如曲线、曲面及其几何关系等等. 纯正的从公理出发的综合方法只占据着一个较小的、主要是初等的角落, 且应用这种方法往往是出于对几何学基础上的考虑才对公理间的逻辑关系进行细致的分析, 并不是为了丰富几何学的具体内容而叠瓦添砖. 在数的基础上建立起整个几何学的大厦, 看来已是大势所趋.

然而, 尽管几何学可以从纯粹数量关系的形式上建立起来, 但总不能不考虑几何的直观背景与来源, 也不能不考虑它的基础问题. 如何从原始的现实形象提炼出一套几何学的公理系统（或若干原理）, 又如何从公理系统发展到坐标系统, 使代数方法得以在几何中发挥作用, 这些都是应当说明的问题. 对于称为欧几里得的那种常见常用的几何学, 在 Hilbert 的《几何基础》(见 Hilbert[2]) 这一经典著作中已经作了详尽的论述. 我们容易认为, 从几何公理引入坐标建立解析几何是轻而易举的事情. 但这是由于我们运用了关于实数系统与初等几何的全部知识所产生的错觉. 事实上, 这一过程是颇为曲折与艰难的, 我们仅从 Hilbert 的书如何依据公理系统引入数系统再引入坐标的过程就可以看清楚. 在此过程中, Hilbert 所称的两条 Desargues 公理以及一条 Pascal 公理扮演了极其重要的角色, 而且就像本书第 2 章和第 6 章所指出的那样, 投影几何与仿射几何数系统的引入有很大的区别. 虽然这两者都只依赖 Desargues 公理（以及一些最简单的关联公理等）就可在各直线上引入彼此同构的数系统, 但对于仿射几何, 这些数系统之间有唯一确定(canonical)的同构关系, 而投影几何则只能在所谓 Pappus 公理成立的假定下才能唯一确定这些同构. 一般的几何学著作, 似乎都忽略了这一点, 其原因之一可能是偏重于欧几里得传统, 着眼于公理间的逻辑关系, 而置数系统与坐标的引入于次要的地位, 或直接从数系统出发建立几何学, 而不再考虑几何对象的现实来源与公理基础. 把公理系统与数量关系之间的沟通作为探讨的主题, 迄今为止, Hilbert 的书仍是最具代表性的著作. 由此还可看出, 即使是人所熟知的那种投影几何与仿射几何, 其坐标的引入也绝非如通常想象的那样简单. 至于奠基于种种不同的公理系统之上的各种不同几何, 其数系统与坐标系统引入的困难程度, 就更不难想象了.

不仅如此, 即便从公理系统出发, 到达了坐标系统并建立了相应的解析几何, 使几何定理的证明完全化成纯代数问题, 也并不见得就一定容易. 首先, 由于解决这些代数问题的计算量往往过大, 使人望而却步; 其次, 因为代表几何关系而出现的那些代数关系式往往杂乱无章, 使人无所措手. 从这些杂乱无章的代数关系式中要找出一条途径, 以到达要证明的那些关系式往往需要高度的技巧. 这只要翻阅一下过去的大量著作, 例如 Salmon[1, 2, 3]等书就清楚了. 现在, 由于计算机的

出现，对繁杂的计算已经有了有效的处理办法．因此，如何把杂乱无章的代数关系式整理得井然有序，使计算机得以发挥其威力，便成为整个问题的关键所在．

至此，几何定理的证明问题可以分成下面三个主要步骤：

第一步，从几何的公理系统出发，引进数系统与坐标系统，使任意几何定理的证明问题成为纯代数问题．

第二步，将几何定理假设部分的代数关系式进行整理，然后依确定步骤验证定理终结部分的代数关系式是否可以从假设部分已整理成序的代数关系式中推出．

第三步，依据第二步中的确定步骤编成程序，并在计算机上实施，以得出定理是否成立的最后结论．

我们称第一步为几何的代数化与坐标化，第二步为几何的机械化，至于第三步能否使用计算机作最后验证，完全依赖于第二步机械化之是否可能．由于计算机只能识别有限的事物，因此一个先决条件乃是第二步中的代数关系式必须都以有限的形式出现．所以，如果第二步中的代数关系式牵涉到连续、极限一类概念，甚至以超越函数的形式出现，即排除了使用计算机的可能性．相反，如果这些代数关系式都是以多项式的形式出现，且其系数都是整数，则对于计算机的使用只是依据第二步中所确定的步骤编制程序的问题，不会有任何实质的困难．如果一门几何可以找到这样三步（事实上只要前面两步即可）来完成定理的证明，我们就说这门几何可以**机械化**，并把可以机械化的这一结论称为**机械化定理**．机械化定理是否成立，依赖于第一、二两步能否实现，而这两者完全是纯理论性的问题．

一门几何能否机械化，并不显然．相反，由于通常的各种几何广泛使用了连续、极限一类概念，尤其是微分几何离不开函数与微分，因而从表面上看似乎不能使用计算机进行证明．但事实上并非如此，其道理颇为深奥．按 Hilbert 的《几何基础》，其重要的一点是说，通常几何的基础完全可以排除连续这样一类公理．在该书俄译本 Rashevsky 所作的序言中，就曾明确指出了其中心思想，实质上就是几何学的发展可与连续公理无关．在 Hilbert 的另一篇关于 Bolyai-Lobachevsky 非欧几何的文章(Hilbert [2])之末，也明确指出了这一点．正因为如此，几何的公理、定理与证明，实质上都可以用有限次的构造步骤来叙述以至完成．这也就提供了几何定理证明有可能机械化的依据．就著者所知，最早的一条真正的机械化定理即见于 Hilbert 的《几何基础》一书．本书第 3 章即致力于这一机械化定理的证明，并称之为 *Hilbert 机械化定理*，参见 Wu Wen-jun[4]．

同样的论点也适用于微分几何．如果抛开几何的实质，只从形式逻辑关系来考虑（定理的证明要求这一点已经足够），在微分几何的各种概念与定理的叙述

中出现的那种函数与导数完全可以形式地来对待，而不必考虑其是否与真正的连续性或极限过程有关. 因此，即使是微分几何的定理证明，也存在着通过有限次形式上的构造步骤借助于计算机来进行定理证明的可能性. 事实上，情况也确实如此. 我们已经通过计算机证明了微分几何的某些定理，而且在微型计算机上也做过一些试验，参阅 Wu Wen-jun[2, 3]两文.

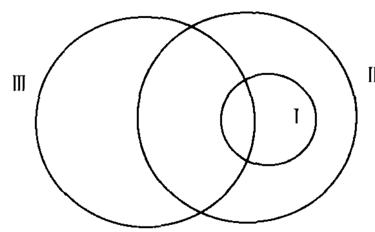
我们把几何按其是否涉及微分而粗略地分成两大类，一类是微分几何，另一类则是所谓的初等几何. 为方便，现改称通常称为欧氏几何的那种初等几何为常用几何. 著者将陆续阐明各种几何机械化的理论与方法. 本书只论述初等几何机械化的基本原理，在另一本与此并行的姐妹篇《几何定理机器证明的理论、方法与实践（初等几何部分）》中，将阐明这一机械化理论与方法在计算机上的具体实施，其中包括程序的编制、计算量的估计、具体定理的证明、新定理的发明以及几何的理论和方法对计算机使用效率的改进与各种应用等等. 在本人以后的有关书籍中则将致力于阐述微分几何的机械化问题以及各种有关的理论问题.

本书共分六章. 前两章是关于几何机械化的预备知识. 作为实例，我们集中讨论常用几何，即通常所称的欧几里得几何，并详细说明从公理出发建立坐标系统的过程. 为简便起见，只讨论平面情形；又为了讨论有所遵循，一切都围绕 Hilbert 所提出的五类公理进行（这五类公理是关联公理、次序公理、全合公理、平行公理与连续公理）. Hilbert 在建立常用几何时摒弃了连续公理，但次序公理和关联公理则贯穿在他的整个体系中，甚至全合概念与全合公理本身都不能独立于次序概念之外来叙述. 如何不依赖于次序概念与次序公理而较早地引入垂直、全合以及其他度量概念，似乎为 Hjelmslev 首先提出，并一直延续到 20 世纪五六十年代，参阅 Bachmann[1] 以及 Klingenberg, Lenz, Reidemeister, Schülte, Sperner, Winternitz 等的著作. 他们的着眼点似在研究反映一些几何主要概念的不同公理组之间的逻辑依存关系. 与此相反，本书的目的在于几何的机械化，而不在于几何的公理化. 对于公理的独立性与相互依存问题不是我们的旨趣所在. 但是就机械化这一主题而论，在机械化的理论与方法上有无次序公理却大不相同. 此外，在一些现代几何，例如代数几何中，主要考虑的是复数域或特征为 0 的任意数域，根本不存在任何次序关系. 即使在有次序关系的几何中，真正涉及到次序关系的定理也并不占主要地位. 凡此种种，说明在从公理出发建立几何时，次序关系有必要退居较次要的地位，为此，在前两章建立常用几何的过程中，次序关系尽量移后，而逐步引入各种无序几何与有序几何. 在引入几何的数系统以完成前面第一步所说的代数化与坐标化时，虽然仍像 Hilbert 一书那样，主要依据以 Desargues 与 Pascal 命名的两条公理，但已不再像 Hilbert 那样把次序公理掺杂其间. 此外，我

们又添加了一条无限公理, 借以排除一切有限几何. 因为从机械化的角度来看, 有限几何可以机械化是显然的.

本书的后四章致力于几何的机械化问题. 传统的欧几里得证明定理的方法要求对个别的定理寻求个别的证法, 而且每一证明总是要求某种新的、往往是奇巧的想法（参阅 Kline[1]的 307—308 页, 中译本的 II. 8）. 本书关于几何定理证明的机械化寻求的是一般方法, 它不仅适用于个别的定理, 而且适用于整个某一类型的定理, 甚至可以说是某一种几何的所有定理. 只要依照书中所述的方法机械地进行, 在有限步之后, 就可对整个一类定理得到统一的证真或证伪, 而无分难易. 要做到这一点, 必须通过以数量关系为主的代数方法, 而几何的代数化乃是关键性的一步. 这正好符合 Descartes 采用代数方法把推理程序机械化以致减小解题工作量的想法（见 Kline[1]）, 也正像早期的几何代数化天元术的创立者之一, 我国元代朱世杰（13 世纪）在《算学启蒙》(1299)中说“以天元演之, 明源活法, 省功数倍”. 总之, 如果真能做到有效的机械化, 则不妨借用 Chasles[1]269 页上的一句话: “为几何巨厦添砖加瓦, 从此就用不着天才那样的人物了.”

并不是每一种几何或任意一类定理都能找到机械化的证法. 对于确实可以进行机械化证明的定理, 我们提出三种不同的类型, 它们可以用三种机械化方法来证明, 并将分别在 3~5 章中讨论. 每一种类型都需假定第一步的代数化与坐标化已经完成, 而且可把几何定理的证明问题化为一些代数关系式的处理问题. 第一种类型定理的特征是假设部分的代数关系式对于某些特定变量都必须是线性的. 这类定理包括所谓一类构造型的纯交点定理, 其证明的机械化方法也见 Hilbert[1]. 为此我们称这一结果为 Hilbert 机械化定理. 第二种类型定理的特征是假设与终结部分的代数关系式都可以多项式的方程来表示. 这种类型定理的机械化证明方法在 Wu Wen-jun [2]一文中首先提出, 并在多种计算机上实施过. 第三种类型定理的特征是假设与终结部分可以是任意的多项式等式或不等式, 但其系数必须在一实闭域中, 因而原来的几何必须有次序关系. 这种类型定理的机械化证法为 Tarski [1]给出, 因而我们称相应的结果为 Tarski 机械化定理. 上述三种机械化定理各有其适用的范围, 特别是第二与第三两种互不包含. 我们的机械化定理不适用于终结含有次序关系的那种定理的证明, 而 Tarski 的机械化定理则只适用于几何数域为实闭域而不能适用于几何数域为复数域或其他一般数域的情形.从适用的角度讲, 三者（各以 I, II, III 表示）的相互关系如图所示;



就方法而论, 则三者各异. 因而在所属范围互相重叠的那些部分, 其定理可用几种

不同的机械化方法来证明. 就证明的效率来讲, I 最高, 即使用手算也可以证明颇不简单的定理. II 次之, 用手算虽难以见功, 但若使用计算机, 即使是一台微型的计算机也可以证明很不简单的定理. 至于 III, 则效率颇低, 迄今为止, 还没有听说过据之以证出什么稍有意义的定理来, 即使用大型快速的计算机也是如此.

由于 Hilbert 的机械化方法使用范围过狭, 而 Tarski 的机械化方法效率又过低, 故在本书的第 3, 5 两章对此分别作了简短的介绍. 重点是第 4 章. 这一章的机械化方法在理论上需要代数几何的帮助. 虽然现代的代数几何是当前数学中最活跃的分支, 但是却不合我们的需要. 原因是现代的代数几何几乎纯粹是存在性的, 而对于机械化的要求来说, 所提供的手段必须是构造性的, 只有这样才有可能将相应的步骤在计算机上逐一实现. 所幸的是, Ritt[1, 2]中早已发展了这种代数几何的构造性理论, 恰好符合我们的需要. 只是 Ritt 的论证使用了分析的方法, 而连续、极限等概念与机械化证法不相容, 所以必须进行适当的改造. 第 4 章中的部分内容即致力于此. 其中如多项式组的约化整序等概念与方法都出自 Ritt, 只是在叙述上有所不同. Ritt 方法还用于微分几何定理的机械化证明, 其简略的叙述见 Wu Wenjun[2, 3]. 对此, 著者在有关的书籍中将有更详尽的论证.

应用这几章的方法来考察几何, 则可证明在第 1, 2 章中通向常用几何的过程中所出现的各种无序的与有序的几何, 从所谓无序 Pascal 几何起, 其定理的证明都可机械化, 即相应的几何机械化定理成立. 在第 6 章中, 我们同样考察了与常用几何有别的一些几何, 如投影几何、双曲型与椭圆型非欧几何、Möbius 与 Laguerre 的两种圆几何学等, 证明了类似的机械化定理. 因为这些几何从公理化到坐标化的过程颇为冗长, 故不能像第 1, 2 章那样再作详细论证.

虽然本书展示了不少可以机械化的几何, 但绝不是任意一种几何都可以机械化, 关键在于 Pappus 或 Pascal 公理是否成立, 或几何数系统中的乘法交换律是否成立. 具体说来, 我们有下面的推测:

推测 Desargues 几何不能机械化.

但我们未能证明这一推测, 数理逻辑的专家们可能会作出正确的答案.

自著者在 1976 年和 1977 年之交发现本书第 5 章所示几何定理的机械化证明方法以来, 已经荏苒五年有余. 这期间, 著者受到了许多鼓励, 有时颇出本人意料之外的热心帮助. 由于人数太多, 无法一一列举, 现只略举三人.

在理论上著者深切感谢胡世华同志和王浩先生的鼓励与支持. 著者关于定理证明机械化的思想和方法与长期形成的传统思想方法相抵触, 如果当时不是胡世华同志从数理逻辑的角度伊始就予以首肯, 中途夭折也不是不可能的. 至于王浩先生, 他在机器证明上突破性的成就早已脍炙人口, 而其有关机器证明的一些精

辟论点，更是发人深省．诸如以量的复杂取代质的困难，以及基础机证与特例机证应有所区别等论点，都使著者在研究过程中深受启发．

孟繁书同志曾设法为著者在长城 203 台式计算机上进行实践提供了许多方便．由于在那台计算机上进行了几个月的实践，才使著者有决心设法购取一台较现代化的台式计算机进行多种试验．这些试验说明我们的方法可以付诸实践，而不致停留在纯理论上，成为纸上谈兵．因此，特向孟繁书同志致以最深切的谢意．

吴文俊

目　　录

第 1 章　Desargues 几何与 Desargues 数系

1.1　常用几何的 Hilbert 公理系统

本书所称常用几何, 也就是通常的欧几里得几何.

Hilbert 的名著《几何基础》第一次为常用几何提出了一个完整的公理系统, 使常用几何从此有了一个真正严实的基础. Hilbert 的公理系统以一些不必要给以定义的基本概念作为讨论的目标. 这些基本概念分成两类 —— 基本对象, 即点、直线以及平面; 这些对象间的基本关系, 即属于、介于以及全合于. 它们服从若干公理, 并作为逻辑推理的出发点. Hilbert 把这些公理分成了五大类, 构成了足以完全地刻画常用几何的一个完备的公理系统. 这五类公理的名称如下:

HI 关联公理 (从属公理)

HII 次序公理

HIII 全合公理

HIV 平行公理

HV 连续公理

Hilbert 的主要目的在于对空间直观给以系统的逻辑分析. 为此, 他详尽地探究了一些公理之间的逻辑关系, 并提出了公理独立性的概念. 但实际上, Hilbert 在建立他的公理系统时并没有真正遵守他的公理独立性的要求. 例如第二类次序公理 HII 必须依赖第一类关联公理 HI 进行表达, 而第三类全合公理 HIII 又必须依赖第一类与第二类的公理才能表达. 在 1899 年《几何基础》第一版中罗列的那些公理并不是完全独立的, 有些公理就可以从其他公理推导出来. 只是在以后的几版中, Hilbert 对他的公理系统作了某些修改后, 才使得这种 “多余” 的公理不再出现. 为此使某些公理显得很不自然, 而且某些直观上极为显然的自明之理也必须从公理推导出来, 而这些推导往往是颇为繁琐冗长的. 我们认为, 仅仅为了减少几个公理而过分追求公理的独立性以致牺牲整个理论的简明性的做法是得不偿失的, 是不足取的. 对于本书的主题, 几何学的机械化说来, 更不能对公理之间的独立与否拘泥太甚.

与公理化的思想相反, Hilbert 的原著实质上已蕴含了与本书主题相符的几何学机械化的思想与方法. 这一点似乎还从来没有人明确地指出过, 甚至 Hilbert 本人对此是否有明确的认识也很难说. 本章以及第 2, 3 章中, 我们将说明 Hilbert 一书在几何学机械化方面所起的巨大作用.

虽然从我们的观点与目的来看并不认为 Hilbert 的公理系统是十分圆满的，但我们仍将依照 Hilbert 原著第八版中修改过的公理系统罗列于下, 以作为本书今后讨论的依据. 同时, 为了简化我们的讨论, 罗列的公理将局限于平面常用几何. 因此, 其基本对象只有两种, 即点与直线. 此外, 为了简化语言的表达, 若非另有说明, 凡说到两个、三个 …… 点或直线时, 都指两个、三个 …… 互不相同的点或直线.

HI 关联公理 (从属公理)

基本关系为点属于直线. 我们也沿用习惯用语, 例如点在直线上、直线经过点、两点的连线、直线相交于一点等等. 公理为

I1 对任意两点 A 与 B, 恒有一直线 a, 既过 A 也过 B.

I2 对任意两点 A 与 B, 既过 A 也过 B 的直线最多只有一条.

I3 一直线上至少有两点, 至少有三个点不在同一条直线上.

依据 I1 和 I2, 由两点 A, B 所唯一确定的直线记为 AB. 两直线 l_1, l_2 相交于一点时, 其交点记为 $l_1 \wedge l_2$.

HII 次序公理

基本关系为一点介于两点之间, 或一点在两点之间. 对于平面的情形包括 Pasch 公理等四条. 依据这些公理可以定义线段、射线或半直线、折线、角, 又可推出直线上一点分隔直线成两侧, 平面上一直线分隔平面成两侧, 以及一角或一多边形分隔平面成内、外两部分等定理. 较详细的叙述可参阅第 2.5 节, 这里从略.

HIII 全合公理

基本关系为线段与角的全合或相等. 公理为

III1 设 A, B 是直线 a 上的两点, A' 是另一直线 a' 上的一点, 则在 a' 被 A' 所分成的任一射线上, 恒有一点 B', 使线段 AB 与 $A'B'$ 全合或相等, 记作

$$AB \equiv A'B'$$

III2 若两线段 $A'B'$ 与 $A''B''$ 都和另一线段 AB 全合, 则线段 $A'B'$ 与 $A''B''$ 也全合.

III3 设两线段 AB 与 BC 在同一直线 a 上, 无公共点. 又设两线段 $A'B'$ 与 $B'C'$ 同在这一直线 a 上或同在另一直线 a' 上, 也无公共点. 若

$$AB \equiv A'B' \qquad BC \equiv B'C'$$

则

$$AC \equiv A'C'$$

III4 设给定了一个角 $\measuredangle(h, k)$、一直线 a' 及其一侧, 又设 a' 上的一点 O' 及其所分成两射线之一 h', 则必恰有一条以 O' 为起点的射线 k', 使角 $\measuredangle(h, k)$ 与角

$\measuredangle(h',k')$ 全合或相等, 而且使角 $\measuredangle(h',k')$ 的内部在 a' 的给定的一侧, 记为

$$\measuredangle(h,k) \equiv \measuredangle(h',k')$$

又每一个角和它自己全合, 即

$$\measuredangle(h,k) \equiv \measuredangle(h,k)$$

III5 两个三角形 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$, 若有下列全合式

$$AB \equiv A'B' \qquad AC \equiv A'C' \qquad \measuredangle BAC \equiv \measuredangle B'A'C'$$

则也恒有全合式

$$\measuredangle ABC \equiv \measuredangle A'B'C'$$

从这些公理以及 HI—HII 可以定义直角与垂直、线段与角的移置、线段与角的相加, 以及线段长短与角的大小的比较等概念.

从公理 HI—HIII 可以证明常用几何中那些有关全合三角形的定理、等腰三角形的定理、垂线的定理, 以及平分线段与平分角的定理等. 此外还可像欧几里得《几何原本》中那样证明一些不等关系的定理, 例如三角形的外角大于任一不相邻的内角, 以及三角形两边之和大于第三边等. 根据这些公理, HI—HIII 只能证明三角形三角之和必小于或等于两直角, 但不能证明必等于两直角.

HIV 平行公理

这类公理只有一条, 即所谓欧几里得公理: 设 a 是任一直线, A 是不在 a 上的任意一点, 则至多有一条直线通过 A 而不与 a 相交.

根据这一公理以及前述的全合等公理, 即可以知道通过 A 而不与 a 相交的直线不仅至多有一条, 而且恰有一条, 还可以证明三角形三内角之和等于两直角等一类定理.

由于以后我们将脱离全合公理或次序公理来进行讨论, 因而我们将对这一平行公理采取一种加强的形式, 这在 Hilbert 原书中记为平行公理 IV*, 我们将迳记为平行公理 IV, 述之如下:

IV 设 a 是任一直线, A 是不在 a 上的任意一点, 则恰有一条直线通过 A, 而不与 a 相交.

称两条不相交的直线 a, b 互相平行, 记作

$$a \parallel b$$

从公理 IV 可知, 两条直线都与第三条直线平行时, 这两条直线也互相平行.

HV 连续公理

不需要再引进新的基本关系, 公理共有两条:

V1(度量公理或阿基米德公理) 若 AB 和 CD 是两条任意线段, 从点 A 起始通过点 B 的射线上必有这样的有限个点: A_1, A_2, $\cdots$, A_n, 使得线段 AA_1, A_1A_2, $\cdots$, $A_{n-1}A_n$ 都和线段 CD 全合, 而使 B 在 A 和 A_n 之间.

V2(直线完全性公理) 一直线上的点所成的点集在保持直线上的次序, 第一条全合公理和阿基米德公理 (即公理 HI, HII, HIII1, HV1) 的条件之下, 不可能再行扩充.

以上五类定理对本书具有特殊意义的是第五类连续公理. 它包括两条公理, 即第一条的度量公理或阿基米德公理和第二条的直线完全性公理. 这一类公理讨论直观上连续的性质, 其作用正如 Hilbert 原书所说, 第一条公理是为连续的要求作准备, 而第二条公理则与其他公理一起, 是为了完成整个公理系统. Hilbert 还指出, 在他的《几何基础》一书的研究中, 主要用第一条阿基米德公理作根据, 而普遍地不假设第二条完全性公理. 事实上, 在该书的第一版中, 第五类连续公理只包括一条阿基米德公理, 只是在以后的几版中才添入了完全性公理. 这一完全性公理的添入是极为生硬的, 目的纯粹是为了填补平面或空间中的 "空隙", 并使所讨论的几何学唯一地成为通常的那种欧几里得几何学. 在 Hilbert 全书的讨论中, 不仅完全性公理不起任何作用, 而且 Hilbert 在建立他的有关几何学的重要理论时也避免使用第一条阿基米德公理. 因而 Hilbert 的欧几里得几何学实质上是一种非阿基米德的几何学. 在 Rashevsky 关于 Hilbert《几何基础》俄文版的序言中, 对此曾有精辟的论述.

指出这一点对于本书所阐述的几何学的机械化是极为重要的. 首先, 连续公理不可避免地要涉及直线或平面上所有点或无穷多个点的集合这一类概念. 另一方面, 在几何学的任一公理或定理的假设与终结中, 涉及的总是有限个点、直线或圆等等. 在一个证明过程中, 也无非是通过有限次的构造性的步骤, 迭次应用公理和已知定理于这些有限多个点、直线或圆上面, 使得论证得以从假设到达终结. 所谓定理证明的机械化乃是指对于某一类定理证明过程的构造性步骤可以通过一种确定的机械方式一步步地给出, 并足以保证在有限步骤之后, 或从假设到达终结, 或指出不可能到达终结. 这种机械的有限步骤在电子计算机上很容易实现, 这正是把证明过程机械化的目的所在. 由于电子计算机只能处理有限的事物, 所以定理叙述与定理证明的有限性也就成为能利用计算机的先决条件. Hilbert 在《几何基础》一书中避开连续公理来发展几何学的研究方式正好为几何学定理证明的机械化以及使用计算机进行这一工作排除了障碍, 为其成功提供了必需的先决条件.

事实上, Hilbert 自己就已给出了关于几何定理证明机械化的具体成果, 详见本书第 3 章. Hilbert 从他的公理系统出发, 不假助于连续公理, 达到了某种程度的机械化并获得了具体的机械化. 他的方法主要在于通过这些公理引进由几何所确定

的数系统. 这一过程可以称为几何的代数化. 通过这种直线上的点与数系统的数之间的对应关系可以引进坐标. 这样, 几何的定理就变为代数关系式之间的定理, 后者证明的机械化问题表达起来就比较明确, 通常也易于解决. 这些代数关系式或者是坐标间的多项式等式, 或者是多项式不等式. 后者反映了几何中的某种次序关系. 但是, 除了平面的初等几何学定理以外, 一般说来真正考虑次序关系的定理是不多见的. 此外, 我们的机械化证明定理的方法在处理相当于多项式等式关系的那种几何定理时有很高的效率, 而在处理多项式不等式关系时则要复杂困难得多 (这是指计算上的复杂度与可行性), 因此, 在理论上就有理由避免使用次序公理以建立较一般的常用几何学. 为此, 在本章以下各节中, 我们将介绍与 Hilbert 公理系统稍有不同的公理系统, 它不仅避免使用连续公理, 也不利用次序公理. 在此公理系统上我们将建立起多种广义的常用几何. 本章以及下一章将说明这种几何如何从公理化走向代数化与坐标化, 而在以后几章中再来说明这种几何定理证明的机械化问题.

1.2 无限公理与 Desargues 公理

在下面所考虑的 (平面) 几何中, 仍以点与直线为基本对象, 点在直线上的关系为基本关系, 并将假定 Hilbert 的关联公理 HI 与平行公理 HIV, 但不引进任何有关次序的概念, 更不假定任何次序公理. 在这种几何中, 线段与射线等词是没有任何意义的, 因而角、三角形、多边形等词至少不能像通常那样来定义. 尽管如此, 我们仍可在这种几何中以另一种方式定义三角形与平行四边形的概念如下. 注意, 提到平行直线时, 总是指不相交也不相同的直线.

定义 1 依一定次序排列的三个点 A,B,C, 如果彼此不同且不在一直线上, 将构成一个三角形, 记作 $\triangle ABC$. 这时 A,B,C 称为这一三角形的顶点, 彼此的连线 AB,AC,BC 称为三角形的边. 对于两个三角形 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$, 来说, 可以依照它们顶点的次序称 A,A'; B,B' 与 C,C' 是三组对应的顶点, 同样称 AB, $A'B'$; AC, $A'C'$ 以及 $BC,B'C'$ 为三组对应的边. 见图 1.1.

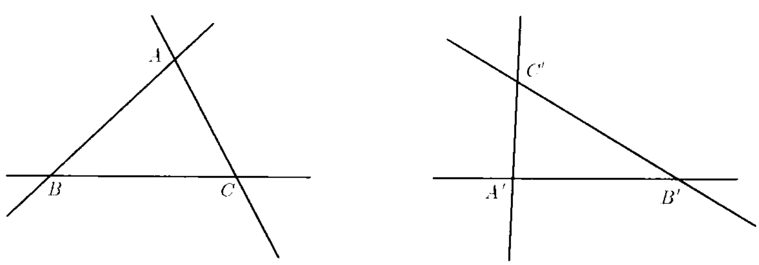


图 1.1

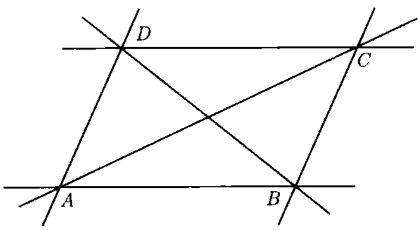


图 1.2

定义 2　依一定次序排列的四个点 A,B,C,D 将构成一个平行四边形, 记作 $\square ABCD$. 如果这四点彼此不同, 也没有三点在一直线上, 而且 A,B 的连线 AB 与 C,D 的连线 CD 平行, A,D 的连线 AD 也与 B,C 的连线 BC 平行, 即 $AB /\!/ CD, AD /\!/ BC$, 这时称 A,B,C,D 为 $\square ABCD$ 的顶点A,C 与 B, D 各为一对顶点. 称直线 AB,BC,CD,AD 为 $\square ABCD$ 的边, 其中 AB,CD 是一组对边, AD,BC 是另一组对边. 又 A, C 的连线 AC 与 B,D 的连线 BD 称为 $\square ABCD$ 的对角线. 见图 1.2.

从两点 A,B 出发, 至少可作出一平行四边形如次. 由公理 HI, 在直线 AB 外必另有一点, 例如 C. 依公理 HIV 可过 B 作直线平行于 AC, 也可过 C 作直线平行于 AB. 仍由公理 HIV, 这两直线不能平行而必相交于一点设为 D, 于是 $ABDC$ 即为一平行四边形.

作为次序公理的一种代替, 我们引入下述的无限公理.

无限公理 I　设直线 l 上任意两点 A_0, A_1, 任作 $\square A_0A_1BC$. 过 B 作直线 $BA_2 /\!/ CA_1$ 交 l 于 A_2, 作 $BA_3 /\!/ CA_2$ 交 l 于 A_3, 依次类推. 又过 C 作直线 $CA_{-1} /\!/ BA_0$ 交 l 于 A_{-1}, 作 $CA_{-2} /\!/ BA_{-1}$ 交 l 于 A_{-2}, 依次类推. 则无穷序列

$$\cdots A_{-2}, A_{-1}, A_0, A_1, A_2, \cdots$$

中无两点相同. 见图 1.3.

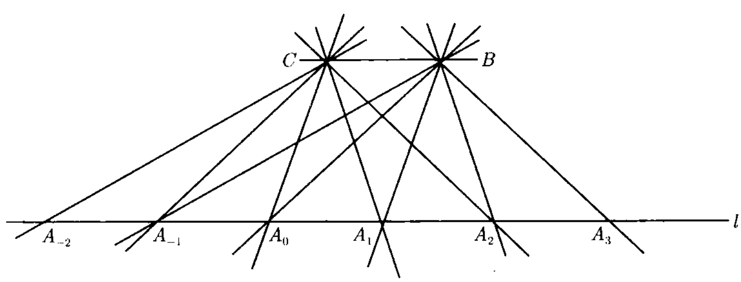


图 1.3

这一公理 I 有时也记为公理 D_∞. 又 $A_2 \neq A_0$ 这一部分相当于 $\square A_0A_1BC$ 的对角线必相交, 在文献中称为 Fano 公理.

公理 I 保证了平行四边形的对角线必相交, 也保证了直线与平面上必有无穷多个点. 由此还易知, 过任意一点也有无穷多条不同的直线.

除上述无限公理 I 外, 我们还将引入两条以 Dasargues 命名的公理, 这两条公理对于建立几何的代数化进而机械化起着决定性的作用. 公理的叙述如下.