面向21世纪应用型本科规划教材

线性代数

杜素勤 主编

厦门大学出版社
XIAMEN UNIVERSITY PRESS

面向21世纪应用型本科规划教材

线性代数

主　编　杜素勤
副主编　郑书富　邱育锋

厦门大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/杜素勤主编. 一厦门:厦门大学出版社,2010
ISBN 978-7-5615-3431-1

Ⅰ.线… Ⅱ.杜… Ⅲ.线性代数 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 009518 号

厦门大学出版社出版发行
地址:厦门市软件园二期望海路 39 号 邮编:361008)
http://www.xmupress.com
xmup @ public.xm.fj.cn
厦门市明亮彩印有限公司印刷
2010 年 1 月第 1 版 2010 年 1 月第 1 次印刷
开本:787×960 1/16 印张:11.75
字数:204 千字 印数:1～3 000 册
定价:19.00 元

前　言

线性代数是研究矩阵和向量空间的一门数学分支.随着科学技术的发展,线性代数的应用已经深入到自然科学、社会科学、工程技术、经济和管理等各个领域,因此线性代数已经成为高等学校理、工、经管类各专业的一门基础课程.本书编写按照21世纪新形势下教材改革的精神,总结了多年的教学经验和实践,本着加强基础、强化应用、整体优化的原则,注重理论与应用相结合,力争做到科学性、系统性和可行性相统一,传授数学知识和培养数学素养相统一,先进性和实用性相统一。同时,本书吸取了国内外同类教材的优点.通俗易懂,易教易学.本书的编写力求达到以下特点:

1. **体现由浅入深,由具体到抽象的启发性教学规律,注重概念的数学背景**.例如第一章行列式中,先具体分析二、三阶行列式的运算结构与运算性质,然后抽象归纳出高阶行列式的定义与运算性质,有利于读者对高阶行列式概念与运算的理解和掌握.

2. **对知识结构适当分类、整合,并进行模块化处理**.例如第二章第二节特殊矩阵中,将线性代数中常用的特殊矩阵归纳在一起,并分别介绍了它们的一些特殊运算性质,使读者能够正确区分并灵活地运用它们,从而有利于读者系统地掌握各种特殊矩阵及其特殊运算方法.

3. **突出解题方法和解题技巧**.例如第六章二次型中,给出了化二次型为标准形的几种具体方法和详细的解答步骤,便于读者理解.并使读者学会正确地解答相关题型.

4. **注重理论知识的实际背景和应用**.例如第二章矩阵及其运算中.给出了矩阵的实际背景,通过具体实例分析矩阵的运算规则,使读者了解所学知识的来龙去脉,从而加深对矩阵的概念及其运算的理解;在第七章基于线性代数的数学模型中,介绍了线性代数在不同领域中的几种应用,由此进一步突出了线性代数的应用性,有利于培养读者利用所学的知识解决实际问题的能力,也使得读者体会到学习线性代数的必要性,从而增强读者学习这门课程的兴趣.

本书例题全面,习题丰富,书中最后给出了习题参考答案或提示,以供读者参考.本书可作为高等院校非数学类理工、经管等各专业"线性代数"课程教

材或教学参考书.

本书由三明学院数学与计算机科学系杜素勤(第二章、第七章)、刘墨德(第一章、第三章、第四章)、郑书富(第五章、第六章)编写,全书由杜素勤、郑书富、邱育锋校正、统稿、定稿.

本书的编写、出版得到三明学院数学与计算机科学系系主任卢昌荆教授的关心和支持,得到厦门大学出版社眭蔚的关心和支持,得到三明学院与龙岩学院的有关领导和教师的关心和支持,编者在此表示衷心的感谢.由于编者水平有限,书中难免有不妥之处,欢迎读者批评指正.

编者

2010 年 1 月

目 录

第一章 行列式

行列式是为了求解线性方程组而引入的，在解较低阶的线性方程组或一些特殊的线性方程组时，行列式是很有效的. 行列式还是一种重要的计算工具，它在许多数学分支中有着广泛的应用，本课程的每一章都将使用行列式这个运算工具. 本章的主要内容是介绍二、三阶行列式的定义、性质、计算方法，然后按由具体到抽象，由特殊到一般的认识规律，将二、三阶行列式推广到 n 阶行列式，最后利用克莱姆法则求解 n 元线性方程组.

第一节 二阶与三阶行列式

在初等代数中，已由解线性方程组的问题给出了二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 的定义：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

类似地，可得到下面三阶行列式的定义.

定义 1 称 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 为**三阶行列式**，规定

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

三阶行列式简记为 D.

例 1 $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 2\times6-5\times(-3)=27.$

例 2 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\times5\times9+2\times6\times7+2\times4\times8-1\times6\times8-2\times4\times9-2\times5\times7=3.$

根据定义计算二阶行列式是容易的，但用定义计算三阶行列式不一定容易，为此下面给出三阶行列式的性质，其主要作用是简化三阶行列式的计算.

定义 2 设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，将 D 的行(列)换成同序数的列(行)所得的行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$，称为 D 的**转置行列式**，简记为 D^{T}.

性质 1 行列式与它的转置行列式相等，即 $D^{\mathrm{T}}=D$.

证明 因为 $D=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$，$D^{\mathrm{T}}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$，故 $D^{\mathrm{T}}=D$.

性质 1 表明行列式的行与列的地位相等，凡是对行(列)成立的性质一律对列(行)成立，这就为行列式的计算打开了自由度.

性质 2 对调行列式的两行(列)，行列式改变符号.

例如 $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \xlongequal{r_1\leftrightarrow r_3} -\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix},$$
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \xlongequal{c_1\leftrightarrow c_2} -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$
其中 $r_1\leftrightarrow r_3$ 表示将第一行与第三行对调，$c_1\leftrightarrow c_2$ 表示将第一列与第二列对调.

证明 将左右两边的三阶行列式按定义展开，即可得证.

性质 3 若行列式的某行(列)的各元素均是两项之和，则该行列式可分解为相应的两个行列式之和.

例如 $$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

证明 与性质 2 证法相同.

性质 4 将行列式某行(列)各元素乘以同一个常数 k,等于 k 乘以这个行列式.

例如:$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

证明 与性质 2 证法相同.

性质 4 表明:行列式中某行(列)的公因子可以提到行列式的记号外面,这可简化行列式中的数据.

例 3 求$\begin{vmatrix} 5 & -10 & 15 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 8 & -9 \end{vmatrix}$.

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 5 & -10 & 15 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 8 & -9 \end{vmatrix}&=5\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 8 & -9 \end{vmatrix}\\ &=5\times2\times3\times\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix}\\ &=30\times(-14)=-420.\end{aligned}$$

性质 5 下列情形之一的行列式为零:

(1)行列式中有一行(列)的元素全为零;

(2)行列式中有两行(列)相同;

(3)行列式中有两行(列)的对应元素成比例.

证明 (1)按定义展开即可.

(2)不失一般性,设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$,则 $D\overset{r_1\leftrightarrow r_2}{=}-D$,于是 $2D=0$,

即 $D=0$.

(3)不失一般性,设第一列与第二列的对应元素成比例,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{11} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{21} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{31} & a_{33} \end{vmatrix}，则\ D=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=k\cdot 0=0.$$

例如
$$\begin{vmatrix} a & 0 & d \\ b & 0 & e \\ c & 0 & f \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 6 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}=0,$$
$$\begin{vmatrix} 2 & -10 & 7 \\ 1 & -5 & 8 \\ -3 & 15 & 9 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}=0.$$

性质 6 将行列式某行(列)的各元素乘以同一个数 k 后，再加到另一行(列)的对应元素上，行列式不变.

不失一般性，在三阶行列式中选证

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \xlongequal{r_3+k\times r_1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{11}+a_{31} & ka_{12}+a_{32} & ka_{13}+a_{33} \end{vmatrix},$$

其中 $r_3+k\times r_1$ 表示将第 1 行各元素乘以 k 后，再加到第 3 行上.

证明 右边$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=0+D=D=$左边.

可见，只要选择好恰当的 k 就可以使得 $ka_{11}+a_{31}=0$(取 $k=-\frac{a_{31}}{a_{11}}$)或 $ka_{12}+a_{32}=0$ 或 $ka_{13}+a_{33}=0$，这表明可通过性质 6 来制作行列式的零元素，这对计算行列式是十分有利的，因此性质 6 是行列式性质中较为常用的性质之一. 类似地，将第 i 列各元素乘以 k 后，再加到第 j 列的对应元素上(记为 $c_j+k\times c_i$)，行列式的值不变.

例 4 计算 $D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix}$.

解 $$D\xlongequal[c_3+(-1)\times c_1]{c_2+2\times c_1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & -5 \end{vmatrix}=-25-3=-28.$$

定义 3 在三阶行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$中，划去 a_{ij} 所在的第 i 行及第 j 列

的元素之后，剩余下来的元素按原来的相对位置所构成的二阶行列式称为 a_{ij} 的**余子式**，记作 M_{ij}，称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 a_{ij} 的**代数余子式**.

例如 a_{21} 的余子式 $M_{21}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，$a_{23}$ 的代数余子式 $A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$，$a_{31}$ 的代数余子式 $A_{31}=(-1)^{3+1}M_{31}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$.

性质 7 行列式 D 中任一行(列)的各元素与它对应的代数余子式乘积之和等于该行列式，即

(1)按行展开 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{cases} a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13} \\ a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}; \\ a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33} \end{cases}$

(2)按列展开 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{cases} a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31} \\ a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32}. \\ a_{13}A_{13}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33} \end{cases}$

证明 不失一般性，只证 $D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$，因为

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32},$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=-a_{21}a_{33}+a_{23}a_{31},$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31},$$

所以 $a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})+a_{12}(-a_{21}a_{33}+a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}=D.$

性质 7 告诉我们，高阶行列式可以化为低阶行列式，因此性质 7 是简化行列式计算的又一条常用的性质. 在实际计算中，较为理想的计算方案是：选择性质 6 制造行列式的零元素，然后再选择性质 7 对高阶行列式作降阶处理.

例 5 计算 $D=\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

解 $D \xlongequal[c_3+(-1)\times c_1]{c_2+(-1)\times c_1} \begin{vmatrix} a^2 & ba-a^2 & b^2-a^2 \\ 2a & b-a & 2(b-a) \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$\xlongequal{按 r_3 展开} 1\times A_{31}+0\times A_{32}+0\times A_{33}$

$=1\times(-1)^{3+1}\times\begin{vmatrix} a(b-a) & (b-a)(b+a) \\ b-a & 2(b-a) \end{vmatrix}$

$=(b-a)^2\begin{vmatrix} a & b+a \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

$=(b-a)^2(2a-b-a)=(a-b)^3.$

例 6 计算 $D=\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 6 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 9 \end{vmatrix}$.

解 $D \xlongequal{c_3+(-2)\times c_2} \begin{vmatrix} 3 & 5 & -3 \\ 6 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

$\xlongequal[r_1+3\times r_3]{r_2+1\times r_3} \begin{vmatrix} -3 & 17 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

$\xlongequal{按 c_3 展开} 0\times A_{13}+0\times A_{23}+1\times A_{33}$

$=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -3 & 17 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$

$=2\begin{vmatrix} -3 & 17 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-86.$

例 7 证明 $D=\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}=(a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$.

证明 左边$=a\begin{vmatrix} x & ay+bz & az+bx \\ y & az+bx & ax+by \\ z & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}+b\begin{vmatrix} y & ay+bz & az+bx \\ z & az+bx & ax+by \\ x & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}$

$\xlongequal[第二个行列式的 c_2+(-a)\times c_1]{第一个行列式的 c_3+(-b)\times c_1} a^2\begin{vmatrix} x & ay+bz & z \\ y & az+bx & x \\ z & ax+by & y \end{vmatrix}+b^2\begin{vmatrix} y & z & az+bx \\ z & x & ax+by \\ x & y & ay+bz \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[\text{第二个行列式的}c_3+(-a)\times c_2]{\text{第一个行列式的}c_2+(-b)\times c_3} a^3\begin{vmatrix}x&y&z\\y&z&x\\z&x&y\end{vmatrix}+b^3\begin{vmatrix}y&z&x\\z&x&y\\x&y&z\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{第二个行列式的}r_1\leftrightarrow r_3,r_2\leftrightarrow r_3}(a^3+b^3)\begin{vmatrix}x&y&z\\y&z&x\\z&x&y\end{vmatrix}=\text{右边}.$$

性质 8 行列式中任一行(列)的各元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式的乘积的和等于零.

证明 不失一般性,在三阶行列式 $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$ 中,选证 $a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33}=0$.

$$\begin{aligned}&a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33}\\&=a_{11}(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{22}&a_{23}\end{vmatrix}+a_{12}(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{21}&a_{23}\end{vmatrix}+a_{13}(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}\\&=a_{11}a_{12}a_{23}-a_{11}a_{22}a_{13}-a_{12}a_{11}a_{23}+a_{12}a_{13}a_{21}+a_{13}a_{11}a_{22}-a_{13}a_{12}a_{21}=0.\end{aligned}$$

设 $D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$, $\delta_{ij}=\begin{cases}1&i=j\\0&i\neq j\end{cases}(i,j=1,2,3)$,则性质 7 与性质 8 可合并成

$$\sum_{k=1}^{3}a_{ik}A_{jk}=\begin{cases}D&i=j\\0&i\neq j\end{cases}=D\delta_{ij}\text{ 或 }\sum_{k=1}^{3}a_{ki}A_{kj}=\begin{cases}D&i=j\\0&i\neq j\end{cases}=D\delta_{ij}\ (i,j=1,2,3).$$

第二节 n 阶行列式

n 阶行列式是二阶与三阶行列式的推广,为了得到 n 阶行列式的定义,可以先分析二阶与三阶行列式的结构,找出它们共同的运算律,然后再将这种共

定义 2 一个排列中的一对数，如果大数排在小数之前，就称这两个数构成一个**逆序**. 一个全排列中，逆序的总数称为这个排列的**逆序数**，对于排列$(s_1 s_2 \cdots s_n)$，记逆序数为 $J(s_1 s_2 \cdots s_n)$. 逆序数为偶（奇）数的排列称为**偶（奇）排列**.

显然，排列$(s_1 s_2 \cdots s_n)$的逆序数 $J(s_1 s_2 \cdots s_n) =$(s_1 后面比 s_1 小的数字个数)+(s_2 后面比 s_2 小的数字个数)$+\cdots+$(s_{n-1}后面比 s_{n-1}小的数字个数).

例 2 求 $J(45132)$.

解 $J(45132)=3+3+1=7$，得 45132 是奇排列.

例 3 确定 i 和 j，使 $3972i15j4$ 为偶排列.

解 显然，$i=6$ 且 $j=8$ 或 $i=8$ 且 $j=6$. 当 $i=6$ 且 $j=8$ 时，$J(397261584)=2+7+5+1+3+1+1=20$ 为偶数；当 $i=8$ 且 $j=6$ 时，$J(397281564)=2+7+5+1+4+1+1=21$ 为奇数，所以 $i=6$ 且 $j=8$ 时 $3972i15j4$ 为偶排列.

根据逆序数的概念，就可以分析出二、三阶行列式的结构及共同的运算律.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = (-1)^{J(12)}a_{11}a_{22} + (-1)^{J(21)}a_{12}a_{21}$$

$$= \sum_{jk} (-1)^{J(jk)} a_{1j}a_{2k},$$

其中 $\sum\limits_{jk}$ 表示对所有 2 级排列 jk 求和.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \\
&= (-1)^{J(123)}a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^{J(312)}a_{13}a_{21}a_{32} + (-1)^{J(231)}a_{12}a_{23}a_{31} + \\
&\quad (-1)^{J(321)}a_{13}a_{22}a_{31} + (-1)^{J(132)}a_{11}a_{23}a_{32} + (-1)^{J(213)}a_{12}a_{21}a_{33} \\
&= \sum_{ijk} (-1)^{J(ijk)} a_{1i}a_{2j}a_{3k},
\end{aligned}$$

其中 $\sum\limits_{ijk}$ 表示对所有 3 级排列 ijk 求和.

可见，二阶与三阶行列式具有相同的结构和运算律，将这种结构及运算律推广到 n 阶行列式，即可得 n 阶行列式的定义.

定义 3 称 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 为 $n(n\in \mathbf{N})$ 阶行列式，规定

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{J(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

其中 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 表示位于 n 阶行列式第 i 行第 j 列的元素，项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 为取自于不同行不同列的 n 个元素的乘积，$J(j_1 j_2\cdots j_n)$ 为 n 级排列 $j_1 j_2\cdots j_n$ 的逆序数，$\sum\limits_{j_1 j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列 $j_1 j_2\cdots j_n$ 求和，共有 $n!$ 项.

由定义 3 可知 n 阶行列式是一种具有特定结构的和式.

n 阶行列式的转置行列式、余子式、代数余子式的定义与三阶行列式的转置行列式、余子式、代数余子式的定义方式相同(只要将阶数 3 改成 n 即可)，三阶行列式的 8 个性质可推广到 n 阶行列式. 同样在 n 阶行列式的计算中也可以利用相应的性质 6 制造行列式的零元素，再利用相应的性质 7 作降阶处理，从而可以简化 n 阶行列式的计算.

例 4 问 8 阶行列式的项 $a_{14}a_{26}a_{31}a_{45}a_{52}a_{68}a_{73}a_{87}$ 之前应配什么符号？

解 $J(46152837)=3+4+2+2=11$，因为 $(-1)^{J(46152837)}=(-1)^{11}=-1$，所以项 $a_{14}a_{26}a_{31}a_{45}a_{52}a_{68}a_{73}a_{87}$ 之前应配负号.

例 5 计算 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-2} & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-2} & a_{2n-1} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n-2} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

解 因为 n 阶行列式的项是取自不同行不同列的 n 个元素的乘积，所以在 D 中仅剩一项 $a_{1n}a_{2n-1}a_{3n-2}\cdots a_{n1}$ 不一定为零，而其余的项全为零，又因为

$$J(nn-1n-2\cdots 1)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{(n-1)n}{2}.$$

所以

$$D=\sum_{(j_1 j_2\cdots j_n)} (-1)^{J(j_1 j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2n-1}a_{3n-2}\cdots a_{n1}.$$