



Guidance Series for Mathematics Majors
数学类专业学习辅导丛书

梅向明
编

微分几何

(第四版)

学习指导与习题选解

微分几何的主要内容是三维欧氏空间的曲线论和曲面论。欧拉是微分几何的重要奠基人，他早在1736年就引进了平面曲线的内蕴坐标概念，即以曲线弧长作为曲线上点的坐标，从而开始了曲线的内蕴几何的研究；曲面论的奠基人是19世纪的高斯……



高等教育出版社

数学类专业学习辅导丛书
Guidance Series for Mathematics Majors

微分几何(第四版)

学习指导与 习题选解

高等教育出版社

内容提要

本书是学习《微分几何(第四版)》(梅向明、黄敬之编)的配套参考书。书中第一部分是学习指导及习题,指出各章节的理论要点,并通过例题提高读者对概念、定理的认知水平。第二部分是解题指导与答案,对各类习题给出了详尽的分析和规范的解题过程,以期提高读者的解题能力。

本书可供研读《微分几何(第四版)》的学生、教师,以及自学本课程的读者参考。

图书在版编目(CIP)数据

微分几何(第四版)学习指导与习题选解/梅向明编.

—北京:高等教育出版社,2009.12

ISBN 978-7-04-028078-4

I. 微… II. 梅… III. 微分几何-高等学校-教学参考资料 IV. O186.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 196687 号

策划编辑	李 蕊	责任编辑	李华英	封面设计	张申申
责任绘图	吴文信	版式设计	张 岚	责任校对	胡晓琪
责任印制	韩 刚				

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landaco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landaco.com.cn
印 刷	高等教育出版社印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	850×1168 1/32	版 次	2009年12月第1版
印 张	7.625	印 次	2009年12月第1次印刷
字 数	190 000	定 价	12.10 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 28078-00

前 言

本书是配合我和黄敬之编写的《微分几何(第四版)》教材的教学参考书。《微分几何》一书自从1987年出版以来,被国内许多高等院校的数学专业作为教材,我们深表感谢。但是由于国内的高院校数学专业的师资条件和学生质量很不平衡,而我们的教材又力求用近代的观点来讲授微分几何的基础内容,所以这样一本与教材配套的教学参考书对于部分教师和学生,使他们能更好地掌握教材的内容,是必要的。

这本书的主题思想有两个:一是学习指导,二是习题选解。在“学习指导”部分,我们突出了教材中的重点和难点以及解题所需要的基本概念和基本公式。不过,为了尽量避免和教材重复,对于基本概念,我们只列出名词,具体内容读者可以查阅教材。读者使用这本辅导书时,必须紧密结合教材,“学习指导”只起加深对教材的理解和复习巩固作用,同时为解题做好准备。“习题选解”分成两部分:一部分是习题,除了教材中的习题外,我们还选了一些其他教材中的习题,它们分散列于有关章节的后面;另一部分是习题选解和解题指导,放在这本书的第二部分。

这本书的合作者王汇淳副教授已不幸故去,所以编写和补充的工作由我独自完成。我年事已高,显得有些力不从心,希望使用这本参考书的读者,对本书的错误和不足之处,继续给予批评和指正。

梅向明

2009年1月于首都师范大学

目 录

第一部分 学习指导及习题

第一章 曲线论	3
§ 1 向量函数	3
1.1 向量函数的极限	3
1.2 向量函数的连续性	3
1.3 向量函数的微商及泰勒展开式	4
1.4 向量函数的积分	5
习题 1.1	6
§ 2 曲线的概念	6
习题 1.2	8
§ 3 空间曲线	10
3.1 空间曲线的密切平面	10
3.2 空间曲线的基本三棱形	11
3.3 空间曲线的曲率、挠率和伏雷内公式	14
3.4 空间曲线在一点邻近的结构	17
3.5 空间曲线论的基本定理	17
3.6 一般螺线	18
习题 1.3	19
§ 4 全章小结	23
第二章 曲面论	25
§ 1 曲面的概念	25
1.1 简单曲面及其参数表示	25
1.2 光滑曲面	26

1.3 曲面上的曲线族和曲线网	28
习题 2.1	29
§ 2 曲面的第一基本形式	30
2.1 曲面的第一基本形式 曲面上曲线的弧长	30
2.2 曲面上两方向的交角	31
2.3 正交曲线族和正交轨线	31
2.4 曲面域的面积	32
2.5 等距变换	33
2.6 保角变换	33
习题 2.2	34
§ 3 曲面的第二基本形式	35
3.1 曲面的第二基本形式	35
3.2 曲面上曲线的曲率	36
3.3 迪潘指标线	37
3.4 曲面的渐近方向和共轭方向	37
3.5 曲面的主方向和曲率线	39
3.6 曲面的主曲率、高斯曲率和平均曲率	40
3.7 曲面在一点邻近的结构	42
3.8 高斯曲率的几何意义	42
习题 2.3	43
§ 4 直纹面和可展曲面	45
4.1 直纹面	45
4.2 可展曲面	45
习题 2.4	47
§ 5 曲面论的基本定理	47
5.1 曲面的基本方程和克里斯托费尔符号	47
5.2 曲面的黎曼曲率张量和高斯-科达齐-迈因纳尔迪 公式	49
5.3 曲面论的基本定理	50
习题 2.5	50
§ 6 曲面上的测地线	51

6.1	曲面上曲线的测地曲率	51
6.2	曲面上的测地线	52
6.3	曲面上的半测地坐标网	53
6.4	曲面上测地线的短程性	53
6.5	高斯-波涅公式	53
6.6	曲面上向量的平行移动	54
习题 2.6		55
§ 7	常高斯曲率的曲面	56
7.1	常高斯曲率的曲面	56
7.2	伪球面	57
7.3	罗氏几何	58
习题 2.7		61
§ 8	全章小结	61
第三章	外微分形式和活动标架	63
§ 1	外微分形式	63
1.1	格拉斯曼代数	63
习题 3.1.1		64
1.2	外微分形式	64
习题 3.1.2		66
1.3	弗罗贝尼乌斯定理	67
习题 3.1.3		69
§ 2	活动标架	69
2.1	合同变换群	69
2.2	活动标架	70
2.3	活动标架法	71
§ 3	用活动标架法研究曲面	73
习题 3.3		75
第四章	整体微分几何初步	77
§ 1	平面曲线的整体性质	77
1.1	旋转数	77
习题 4.1.1		78

1.2 凸曲线	78
习题 4.1.2	78
1.3 等周不等式	78
习题 4.1.3	79
1.4 四顶点定理	79
习题 4.1.4	79
1.5 等宽曲线	79
习题 4.1.5	80
1.6 平面曲线上的 Crofton 公式	80
习题 4.1.6	80
§ 2 空间曲线的整体性质	81
2.1 芬切尔定理	81
习题 4.2.1	81
2.2 球面上的 Crofton 公式	81
习题 4.2.2	82
2.3 Fary-Milnor 定理	82
2.4 闭曲线的全挠率	82
习题 4.2.4	83
§ 3 曲面的整体性质	83
3.1 曲面的整体定义	83
3.2 曲面的一般性质	84
3.3 卵形面	84
习题 4.3.3	85
3.4 完备曲面	86
3.5 负常高斯曲率的曲面	86
习题 4.3.5	93
§ 4 完备曲面的比较定理	93
4.1 完备曲面的极坐标系	93
4.2 比较定理	94
4.3 完备曲面的比较定理	95
习题 4.4	97

第二部分 解题指导与答案

第一章 曲线论	101
习题 1.1	101
习题 1.2	104
习题 1.3	115
第二章 曲面论	150
习题 2.1	150
习题 2.2	156
习题 2.3	165
习题 2.4	184
习题 2.5	187
习题 2.6	199
习题 2.7	211
第三章 外微分形式和活动标架	212
习题 3.1.1	212
习题 3.1.2	213
习题 3.1.3	214
习题 3.3	215
第四章 整体微分几何初步	219
习题 4.1.1	219
习题 4.1.2	220
习题 4.1.3	220
习题 4.1.4	220
习题 4.1.5	221
习题 4.1.6	222
习题 4.2.1	222
习题 4.2.2	223
习题 4.2.4	224
习题 4.3.3	224
习题 4.3.5	226
习题 4.4	227

第一部分 学习指导及习题

微分几何的发展,就其使用的数学方法而言可以分为三个阶段.第一阶段由牛顿(Newton)和莱布尼茨(Leibniz)创立微积分开始,直至18世纪初,在此期间,欧拉(Euler)对微分几何学的创立和发展作出了巨大贡献.到了1827年,高斯(Gauss)在曲面论的研究方面有了重大突破——发现曲面的高斯曲率的内蕴性,开始了微分几何发展的第二阶段.这一阶段基本形成了经典微分几何的内容和体系,使用的数学方法是向量分析的方法.1885年,德国数学家黎曼(Riemann)把高斯的内蕴几何思想进一步发展,并使用和发展了一套完整的张量分析的算法,展开了黎曼几何的一般理论.微分几何发展的第三个阶段是以法国数学家嘉当(Cartan)发展外微分法和活动标架理论为标志,数学大师嘉当精巧地把李群论与微分几何结合起来,外微分和活动标架法就成为这一阶段研究问题的重要数学方法.

《微分几何(第四版)》教材首先应用向量分析的方法介绍曲线与曲面的理论.篇首作为预备知识,先讲向量函数的概念和性质,然后用两章的篇幅介绍曲线和曲面的一般理论.第三章介绍外微分形式和活动标架法,第四章讲述了整体微分几何中的一些重要定理.本参考书将对教材中习题作出选解,并增补少量习题供读者练习.

第一章

曲线论

§1 向量函数

1.1 向量函数的极限

(1) 主要概念:

向量函数的定义, 向量函数的极限.

(2) 主要定理:

命题 1 如果 $r(t)$ 和 $s(t)$ 是两个一元向量函数, $\lambda(t)$ 是一个实函数, 并且当 $t \rightarrow t_0$ 时, 这些函数的极限存在, 即 $r(t) \rightarrow a$, $s(t) \rightarrow b$, $\lambda(t) \rightarrow m$, 则有

$$\textcircled{1} \quad r(t) \pm s(t) \rightarrow a \pm b;$$

$$\textcircled{2} \quad \lambda(t)r(t) \rightarrow ma;$$

$$\textcircled{3} \quad r(t) \cdot s(t) \rightarrow a \cdot b;$$

$$\textcircled{4} \quad r(t) \times s(t) \rightarrow a \times b.$$

1.2 向量函数的连续性

(1) 主要概念:

向量函数的连续.

(2) 主要定理:

命题 2 如果 $r(t)$ 和 $s(t)$ 是在 t_0 点连续的向量函数, 而 $\lambda(t)$

是在 t_0 点连续的实函数, 则向量函数 $\mathbf{r}(t) \pm \mathbf{s}(t)$, $\lambda(t)\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}(t)$ 和实函数 $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{s}(t)$ 也都在 t_0 点连续.

1.3 向量函数的微商及泰勒展开式

(1) 主要概念:

向量函数的微商, C^0 类函数, C^k 类函数, C^∞ 类函数, C^ω 类函数.

(2) 主要性质:

命题 3 设 $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{s}(t)$, $\mathbf{u}(t)$ 分别是可微的向量函数, $\lambda(t)$ 是可微的实函数, 则 $\lambda(t)\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{r}(t) \pm \mathbf{s}(t)$, $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{s}(t)$, $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{s}(t)$, $(\mathbf{r}(t), \mathbf{s}(t), \mathbf{u}(t))$ 都是可微的, 并且

$$(\lambda \mathbf{r})' = \lambda' \mathbf{r} + \lambda \mathbf{r}',$$

$$(\mathbf{r} \pm \mathbf{s})' = \mathbf{r}' \pm \mathbf{s}',$$

$$(\mathbf{r} \times \mathbf{s})' = \mathbf{r}' \times \mathbf{s} + \mathbf{r} \times \mathbf{s}',$$

$$(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s})' = \mathbf{r}' \cdot \mathbf{s} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{s}',$$

$$(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{u})' = (\mathbf{r}', \mathbf{s}, \mathbf{u}) + (\mathbf{r}, \mathbf{s}', \mathbf{u}) + (\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{u}').$$

命题 4 如果向量函数 $\mathbf{r}(t)$ 在 $[t_1, t_2]$ 上是 C^k 类函数, 则向量函数所对应的三个实函数 $x(t)$, $g(t)$, $z(t)$ 在 $[t_1, t_2]$ 上也是 C^k 类函数.

定理 设向量函数 $\mathbf{r}(t)$ 在 $[t_0, t_0 + \Delta t]$ 上是 C^{k+1} 类函数, 则有泰勒 (Taylor) 展开式

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t_0 + \Delta t) &= \mathbf{r}(t_0) + \Delta t \mathbf{r}'(t_0) + \frac{1}{2!} (\Delta t)^2 \mathbf{r}''(t_0) + \cdots + \\ &\quad \frac{1}{n!} (\Delta t)^n \mathbf{r}^{(n)}(t_0) + \frac{1}{(n+1)!} (\Delta t)^{n+1} [\mathbf{r}^{(n+1)}(t_0) + \boldsymbol{\varepsilon}(t_0, \Delta t)], \end{aligned}$$

其中 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $\boldsymbol{\varepsilon}(t_0, \Delta t) \rightarrow \mathbf{0}$.

当 $\mathbf{r}(t) \in C^\infty$ 时, 可以展成泰勒级数, 即

$$\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) = \mathbf{r}(t_0) + \Delta t \mathbf{r}'(t_0) + \frac{1}{2!} (\Delta t)^2 \mathbf{r}''(t_0) + \cdots +$$

$$\frac{1}{n!}(\Delta t)^n r^{(n)}(t_0) + \cdots.$$

如果 $r(t) \in C^\omega$ 类, 则上述泰勒级数是收敛的.

1.4 向量函数的积分

(1) 主要概念:

向量函数的积分.

(2) 主要性质:

命题 5 如果向量函数 $r(t)$ 是区间 $[a, b]$ 上的连续函数, 则积分

$$\int_a^b r(t) dt$$

存在, 且

① $a < c < b$ 时有

$$\int_a^b r(t) dt = \int_a^c r(t) dt + \int_c^b r(t) dt;$$

② m 是常数时有

$$\int_a^b m r(t) dt = m \int_a^b r(t) dt;$$

③ m 是常向量时有

$$\int_a^b m \cdot r(t) dt = m \cdot \int_a^b r(t) dt,$$

$$\int_a^b m \times r(t) dt = m \times \int_a^b r(t) dt;$$

$$\textcircled{4} \frac{d}{dx} \left[\int_a^x r(t) dt \right] = r(x).$$

命题 6 向量函数 $r(t)$ 具有固定长的充要条件是对 t 的每一个值, $r'(t)$ 都与 $r(t)$ 垂直.

定义 对于函数 $r(t)$, 给 t 以增量 Δt , 用 $\Delta \varphi$ 表示由向量 $r(t)$ 和 $r(t+\Delta t)$ 所组成的角, 作比值 $\frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$, 当 Δt 趋于零时, $\left| \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \right|$ 的极限

称为向量函数 $\mathbf{r}(t)$ 对于它的变量 t 的旋转速度.

命题 7 单位向量函数 $\mathbf{r}(t)$ 关于 t 的旋转速度等于其微商的模 $|\mathbf{r}'(t)|$.

习题 1.1

1. 求证:常向量的微商等于零向量.

2. 证明:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\mathbf{r}(t)}{\rho(t)} \right] = \frac{\mathbf{r}'(t)\rho(t) - \mathbf{r}(t)\rho'(t)}{\rho^2(t)}.$$

3. 利用向量函数的泰勒公式证明:如果向量函数在某一区间内所有点处的微商都是零,则此向量函数在此区间内是常向量.

4. 证明: $\mathbf{r}(t)$ 具有固定方向的充要条件是

$$\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t) = \mathbf{0}.$$

5. 证明: $\mathbf{r}(t)$ 平行于固定平面的充要条件是

$$(\mathbf{r}(t), \mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t)) = 0.$$

6. 求下列向量微分方程的解:

(1) $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{0}$;

(2) $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{a}$;

(3) $\mathbf{r}'(t) = t\mathbf{a}$;

(4) $\mathbf{r}'(t) = a\mathbf{r}(t)$.

7. 试举例说明对于向量函数 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, 一般不成立中值定理:

$$\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a) = \mathbf{r}'(\xi)(b-a), \quad a < \xi < b.$$

§ 2 曲线的概念

(1) 主要概念:

曲线的定义、曲线的参数方程、曲线的向量参数表示、光滑曲线、 C^k 类曲线、曲线上的正常点、正则曲线、曲线的切线和法平面、曲线上的自然参数、曲线的弧长.

(2) 主要公式:

设曲线(C)的方程为 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$, 其上一 点 P 所对应的参数为 t_0 , 曲线(C)在 P 点处的切向量为 $\mathbf{r}'(t)$. 在 P 点处的切线方程为

$$\boldsymbol{\rho}-\mathbf{r}(t_0)=\lambda \mathbf{r}'(t_0),$$

其中 $\boldsymbol{\rho}=\{X, Y, Z\}$ 是切线上任一点的向径, λ 是切线上点的参数.

切线方程的坐标表示为

$$\frac{X-x(t_0)}{x'(t_0)}=\frac{Y-y(t_0)}{y'(t_0)}=\frac{Z-z(t_0)}{z'(t_0)}.$$

t_0 点处的法平面方程为

$$[\boldsymbol{\rho}-\mathbf{r}(t_0)] \cdot \mathbf{r}'(t_0)=0.$$

用坐标表示为

$$[X-x(t_0)]x'(t_0)+[Y-y(t_0)]y'(t_0)+[Z-z(t_0)]z'(t_0)=0.$$

曲线从 $\mathbf{r}(a)$ 到 $\mathbf{r}(t)$ 的弧长为

$$\sigma(t)=\int_a^t|\mathbf{r}'(t)|dt \quad (t>a).$$

曲线的自然参数为

$$s=\sigma(t).$$

将

$$t=\sigma^{-1}(s)$$

代入曲线(C)的方程 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ 得

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(s),$$

称上式为曲线的自然参数方程. 由于

$$|\mathbf{r}'(s)|=\left|\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right|=1,$$

所以曲线(C)的方程在引入自然参数后, 切向量 $\mathbf{r}'(s)$ 是单位向量. $\mathbf{r}'(s)$ 特别记为 $\dot{\mathbf{r}}(s)$.

(3) 例题:

求双曲螺线 $\mathbf{r}=\{a \cosh t, a \sinh t, at\}$ 从 $t=0$ 到 $t=t$ 的弧长.

解 $\mathbf{r}=\{a \cosh t, a \sinh t, at\},$

$$\mathbf{r}'=\{a \sinh t, a \cosh t, a\},$$

$$\begin{aligned}
 \sigma(t) &= \int_0^t |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_0^t \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt \\
 &= \int_0^t \sqrt{a^2 \sinh^2 t + a^2 \cosh^2 t + a^2} dt \\
 &= \sqrt{2} a \sinh t.
 \end{aligned}$$

习题 1.2

1. 证明:圆柱螺线 $\mathbf{r}(t) = \{\cos t, \sin t, t\}$ 是正则曲线,并求它上面的点 $(1, 0, 0)$ 处的切线和法平面.

2. 求三次挠曲线 $\mathbf{r}(t) = \{at, bt^2, ct^3\}$ 在 t_0 点的切线和法平面.

3. 证明: $\mathbf{r}(t) = \{\sin 3t \cos t, \sin 3t \sin t, 0\}$ 是正则曲线,并求曲线在 $t = \frac{\pi}{3}$ 处的切线方程.

4. 下列曲线哪些是正则曲线,求每条曲线在 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 处的切线方程.

(1) $\mathbf{r}_1(\theta) = \{\cos \theta, 1 - \cos \theta - \sin \theta, -\sin \theta\};$

(2) $\mathbf{r}_2(\theta) = \{2\sin^2 \theta, 2\sin^2 \theta \tan \theta, 0\};$

(3) $\mathbf{r}_3(\theta) = \{\cos \theta, \cos^2 \theta, \sin \theta\}.$

5. 证明:圆柱螺线 $\mathbf{r} = \{a \cos \theta, a \sin \theta, b\theta\}$ ($-\infty < \theta < +\infty$) 的切线与 z 轴成固定角.

6. 设 $\mathbf{r}(\theta) = \{e^\theta \cos \theta, e^\theta \sin \theta, 0\}$, 证明: $\mathbf{r}(\theta)$ 与曲线的切向量成定角(具有这种性质的曲线称为对数螺线).

7. 设 $\mathbf{r}(t)$ 是一正则曲线. 假定有一点 $A \in \mathbf{R}^3$, 使得对所有的 $t, \mathbf{r}(t) - \overrightarrow{OA}$ 正交于 $\mathbf{r}'(t)$. 证明: $\mathbf{r}(t)$ 在球面上.

8. 证明:曲线 $(C): \mathbf{r} = \{2t, \sqrt{3}t^2, t^3\}$ 的切线与直线 $y = z - x = 0$ 交于定角.

9. 求曲线 $(C): \mathbf{r}(t) = \{e^t \cos t, e^t \sin t, e^t\}$ 在 $t=0$ 点的切线方程.

10. 求曲线 $(C): F(x, y, z) = 0, G(x, y, z) = 0$ 的切线与法平面的方程.

11. 求曲线 $(C): x^2 + y^2 = 1, y^2 + z^2 = 1$ 的法平面方程.

12. 求悬链线 $(C): \mathbf{r} = \left\{t, a \cosh \frac{t}{a}, 0\right\}$ ($-\infty < t < +\infty$), 从 $t=0$ 起计算的弧长.