海文考研
万学·海文

2009最新版

2009
考研数学
全国硕士研究生入学考试用书

历年真题解析
（数学一）

命题人讲真题4大组长强强联手重磅出击
30年命题经验打造考研真题最权威解析

王式安　1987-2001年全国研究生入学考试数学命题组资深专家
蔡燧林　1992-2000年全国研究生入学考试数学命题组资深专家
胡金德　1989-1997年全国研究生入学考试数学命题组资深专家
程杞元　全国研究生入学考试数学阅卷组资深专家
编著

全程规划＋使用说明
手把手教你高效复习

海文考研
内部教案首度
公开出版

对外经济贸易大学出版社
University of International Business and Economics Press

海文考研

万学·海文

考研数学历年真题解析

（数学一）

王式安　蔡燧林　胡金德　程杞元

编著

对外经济贸易大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

考研数学历年真题解析（数学一）/王式安等编著.
北京：对外经济贸易大学出版社，2008

ISBN 978-7-81134-135-5

Ⅰ. 考… Ⅱ. 王… Ⅲ. 高等数学—研究生—入学考试—解题 Ⅳ. 013-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2008）第058480号

考研数学历年真题解析（数学一）
王式安 蔡燧林 胡金德 程杞元 （编/译）著
责任编辑： 朱钦磊

对外经济贸易大学出版社
北京市朝阳区惠新东街10号 邮政编码：100029
邮购电话：010-64492338　发行部电话：010-64492342
网址：http://www.uibep.com　E-mail：uibep@126.com

中煤涿州制图印刷厂北京分厂 印装　　新华书店北京发行所 发行
成品尺寸：185mm × 260mm　　18.75印张　433千字
2008年5月北京第1版　　2008年5月第1次印刷

ISBN：978-7-81134-135-5
定 价：28.00元

前　言

以突破某种考试为目的的学习行为，其基本学习原理就是锁定最有效的学习任务，并精确测算完成此任务所需的学习时间，在学习时间和学习任务之间构建最合理的配置关系才能达成最佳的学习效果。

对于刚刚踏上征途的考研学子而言，其最主要的学习任务就是看书，最迫切需要了解的就是到底应该看哪些书，需要花多少时间，如何来规划才能收获最大的学习价值。

万学·海文通过对往年数万考研学子的深入调查表明：

◆ 每个考研学子最少会在学习资料上花费超过70%的学习时间；

◆ 许多考研学子因缺乏科学权威的指导在选择学习资料时常常无所适从；

◆ 许多考研学子因盲目跟风常常会购买大量超越自己学习时间极限的学习资料。

为帮助刚刚踏上考研路的学子们构建最清晰、最合理的学习规划方案，万学海文凭借其在考研领域最强大的权威师资和最优秀的辅导团队，组织了各考研学科原命题组专家、阅卷组专家，并会同万学海文冠军辅导团队，融合十五年辅导精华，回归学习原理的本质，精心打造了本套全程策划书系，在众多的考研辅导书籍中，它独具特色，卓尔不群，主要具有如下优异品质：

一、全国惟一配备《使用说明书》的考研辅导书

好的产品要有好的《使用说明书》；

万学· 海文09考研辅导书系全国独家首度配备《使用说明书》。

本书附有详尽的学习计划，针对不同基础的学生应该在什么阶段、花费多少时间学习本书，在学习计划中都有科学量化的系统说明。

二、全国惟一以学生为本全程整体策划的考研辅导书

在10多年的考研辅导过程中，我们透彻了解各种考生的学习特性，归纳总结了众多学子的优秀学习方法，并以此为基础提炼出最有效的学习内容，同时进行全程学习规划，最大限度提升考研学子的学习效率，使其不再将宝贵的复习时间浪费在一些根本不会考到的学习内容上。

三、全国惟一系统整合资深专家命题经验和高分学子学习实践的考研辅导书

8位有丰富经验的命题组组长和数十位命题组专家，根据其多年的命题经验，集合众多高分优秀学子的学习实践，在精准把握命题规律的基础上，对备考内容进行最权威和最科学的剖析。

万学·海文教学研究中心

2008年3月

目　录

第一篇　历年试题

2008 年全国硕士研究生入学统一考试试题

54

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 设函数 $f(x)=\int_0^{x^2}\ln(2+t)\mathrm{d}t$,则 $f'(x)$ 的零点个数为　(　　)

(A)0.　　(B)1.　　(C)2.　　(D)3.　　P79,2.7 题

(2) 函数 $f(x,y)=\arctan\dfrac{x}{y}$ 在点(0,1) 处的梯度等于　(　　)

(A)i.　　(B)$-i$.　　(C)j.　　(D)$-j$.

P100,2.8 题

(3) 在下列微分方程中,以 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\cos2x+C_3\sin2x$($C_1,C_2,C_3$ 为任意常数) 为通解的是　(　　)

(A)$y'''+y''-4y'-4y=0$.　　(B)$y'''+y''+4y'+4y=0$.

(C)$y'''-y''-4y'+4y=0$.　　(D)$y'''-y''+4y'-4y=0$.　　P160,2.1 题

(4) 设函数 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 内单调有界,$\{x_n\}$ 为数列,下列命题正确的是　(　　)

(A) 若$\{x_n\}$ 收敛,则$\{f(x_n)\}$ 收敛.　　(B) 若$\{x_n\}$ 单调,则$\{f(x_n)\}$ 收敛.

(C) 若$\{f(x_n)\}$ 收敛,则$\{x_n\}$ 收敛.　　(D) 若$\{f(x_n)\}$ 单调,则$\{x_n\}$ 收敛.

P48,2.4 题

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零矩阵,$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵,若 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$,则　(　　)

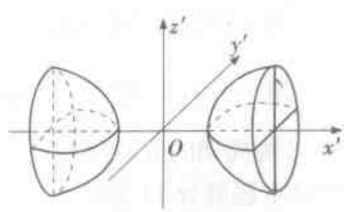
(A)$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆.　　(B)$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆.

(C)$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆.　　(D)$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆.

P176,2.5 题

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵,如果二次曲面方程　(　　)

$$(x,y,z)\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=1$$



在正交变换下的标准方程的图形如图所示,则 $\boldsymbol{A}$ 的正特征值的个数为

(A)0.　　(B)1.　　(C)2.　　(D)3.　　P207,2.1 题

(7) 设随机变量 X,Y 独立同分布,且 X 的分布函数为 $F(x)$,则 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布函数为　(　　)

(A)$F^2(x)$. (B)$F(x)F(y)$.

(C)$1-[1-F(x)]^2$. (D)$[1-F(x)][1-F(y)]$. P247,3.13 题

(8) 设随机变量 $X \sim N(0,1)$,$Y \sim N(1,4)$,且相关系数 $\rho_{XY}=1$,则 ( )

(A)$P\{Y=-2X-1\}=1$. (B)$P\{Y=2X-1\}=1$.

(C)$P\{Y=-2X+1\}=1$. (D)$P\{Y=2X+1\}=1$. P258,4.14 题

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分.把答案填在题中横线上.)

(9) 微分方程 $xy'+y=0$ 满足条件 $y(1)=1$ 的解是 $y=$________. P160,1.9 题

(10) 曲线 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 在点(0,1) 处的切线方程是________. P55,1.5 题

(11) 已知幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x+2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛,在 $x=-4$ 处发散,则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-3)^n$ 的收敛域为________. P140,1.3 题

(12) 设曲面 $\sum$ 是 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的上侧,则 $\iint\limits_{\Sigma} xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x\mathrm{d}z\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________.

P111,1.7 题

(13) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为线性无关的 2 维列向量,$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$.则 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值为________. P207,1.3 题

(14) 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布,则 $P\{X=EX^2\}=$________. P258,4.15 题

三、解答题(本题共 8 小题,满分 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 9 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$. P51,3.3 题

(16) (本题满分 9 分)

计算曲线积分 $\int_L \sin 2x\mathrm{d}x+2(x^2-1)y\mathrm{d}y$,其中 L 是曲线 $y=\sin x$ 上从点(0,0) 到点(π,0) 的一段.

P137,3.22 题

(17) (本题满分 11 分)

已知曲线 C:$\begin{cases}x^2+y^2-2z^2=0,\\ x+y+3z=5,\end{cases}$ 求 C 上距离 xOy 面最远的点和最近的点. P104,3.8 题

(18) (本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 是连续函数,

(Ⅰ) 利用定义证明函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 可导,且 $F'(x)=f(x)$;

(Ⅱ) 当 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数时,证明函数 $G(x)=2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-x\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t$ 也是以 2 为周期的周期函数.

P86,3.10 题

(19) (本题满分 11 分)

将函数 $f(x)=1-x^2(0\leqslant x\leqslant \pi)$ 展开成余弦级数,并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的和.

P153,3.12 题

(20)（本题满分 10 分）

设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为 3 维列向量，矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 分别是 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 的转置. 证明：

（Ⅰ）秩 $r(\boldsymbol{A})\leqslant 2$；

（Ⅱ）若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则秩 $r(\boldsymbol{A})<2$. 　　*P*186,3.3 题

(21)（本题满分 12 分）

设 n 元线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{bmatrix}_{n\times n},\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix}.$$

（Ⅰ）证明行列式 $|\boldsymbol{A}|=(n+1)a^n$；

（Ⅱ）当 a 为何值时，该方程组有唯一解，并求 x_1；

（Ⅲ）当 a 为何值时，该方程组有无穷多解，并求通解. 　　*P*201,3.9 题

(22)（本题满分 11 分）

$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt =$

设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 的概率分布为 $P\{X=i\}=\frac{1}{3}(i=-1,0,1)$，$Y$ 的概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 记 $Z=X+Y$.

（Ⅰ）求 $P\left\{Z\leqslant\frac{1}{2}\mid X=0\right\}$；

（Ⅱ）求 Z 的概率密度 $f_Z(z)$. 　　*P*247,3.14 题

(23)（本题满分 11 分）

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本. 记

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,T=\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2.$$

（Ⅰ）证明 T 是 μ^2 的无偏估计量；

（Ⅱ）当 $\mu=0,\sigma=1$ 时，求 DT. 　　*P*269,7.11 题

(1) $0\leq y\leq 1$ 时 $F(y)=\int_{-\infty}^{0} f(y)\,dy+\int_0^y f(y)\,dy$

$=\int_0^y f(y)\,dy$

$=\int_0^y dy = y$

$\therefore F_Y(y)=\begin{cases} y, & 0\leq y<1\end{cases}$

又 $F_Z(z)=F_{X+Y}(x+y)$

2007 年全国硕士研究生入学统一考试试题

一、选择题(本题共 10 小题,每小题 4 分,满分 40 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 当 $x \to 0^+$ 时,与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是 ( )

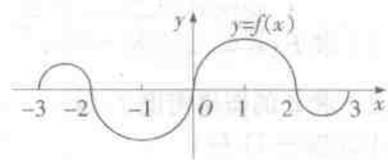
(A) $1-e^{\sqrt{x}}$. (B) $\ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$.

(C) $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$. (D) $1-\cos\sqrt{x}$. P48,2.3 题

(2) 曲线 $y=\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)$ 渐近线的条数为 ( )

(A)0. (B)1. (C)2. (D)3. P63,2.12 题

(3) 如图,连续函数 $y=f(x)$ 在区间$[-3,-2]$,$[2,3]$上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周,在区间$[-2,0]$,$[0,2]$上的图形分别是直径为 2 的下、上半圆周. 设 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. 则下列结论正确的是 ( )



(A) $F(3)=-\frac{3}{4}F(-2)$. (B) $F(3)=\frac{5}{4}F(2)$.

(C) $F(-3)=\frac{3}{4}F(2)$. (D) $F(-3)=-\frac{5}{4}F(-2)$. P78,2.6 题

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,下列命题错误的是 ( )

(A) 若 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$ 存在,则 $f(0)=0$.

(B) 若 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在,则 $f(0)=0$.

(C) 若 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$ 存在,则 $f'(0)$ 存在.

(D) 若 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在,则 $f'(0)$ 存在. P63,2.13 题

(5) 设函数 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$上具有二阶导数,且 $f''(x)>0$,令 $u_n=f(n)(n=1,2,\cdots)$,则下列结论正确的是 ( )

(A) 若 $u_1>u_2$,则$\{u_n\}$ 必收敛. (B) 若 $u_1>u_2$,则$\{u_n\}$ 必发散.

(C) 若 $u_1<u_2$,则$\{u_n\}$ 必收敛. (D) 若 $u_1<u_2$,则$\{u_n\}$ 必发散. P64,2.14 题

(6) 设曲线 $L: f(x,y)=1$($f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数)过第 Ⅱ 象限内的点 M 和第 Ⅳ 象限内的

点 N，Γ 为 L 上从点 M 到点 N 的一段弧，则下列积分小于零的是　　(　　)

(A) $\int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}x$.　　(B) $\int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}y$.

(C) $\int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}s$.　　(D) $\int_\Gamma f'_x(x,y)\mathrm{d}x + f'_y(x,y)\mathrm{d}y$.

*P*113,2.4 题

(7) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则下列向量组线性相关的是(　　).　　(　　)

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$.　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_1$.　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_1$.

*P*184,2.6 题

(8) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$　　(　　)

(A) 合同，且相似.　　(B) 合同，但不相似.

(C) 不合同，但相似.　　(D) 既不合同，也不相似.　　*P*224,2.2 题

(9) 某人向同一目标独立重复射击，每次射击命中目标的概率为 $p(0<p<1)$，则此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标的概率为(　　).　　(　　)

(A) $3p(1-p)^2$.　　(B) $6p(1-p)^2$.

(C) $3p^2(1-p)^2$.　　(D) $6p^2(1-p)^2$.　　*P*232,1.6 题

(10) 设随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布，且 X 与 Y 不相关，$f_X(x)$，$f_Y(y)$ 分别表示 X，Y 的概率密度，则在 $Y=y$ 的条件下，X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x\mid y)$ 为　　(　　)

(A) $f_X(x)$.　　(B) $f_Y(y)$.

(C) $f_X(x)f_Y(y)$.　　令 $\frac{1}{x}=t$　　(D) $\frac{f_X(x)}{f_Y(y)}$.　　*P*245,3.11 题

$=\int_{\frac{1}{2}}^{1} t^3e^t\,d\frac{1}{t}$

二、填空题(本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分. 把答案填在题中横线上.)

(11) $\int_1^2 \frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x=$________.　　*P*75,1.5 题

$=\int_{\frac{1}{2}}^{1} -\frac{t^3}{t^2}e^t dt = -\int_{\frac{1}{2}}^{1} te^t dt$

(12) 设 $f(u,v)$ 为二元可微函数，$z=f(x^y,y^x)$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$________.　　$=-\int_{\frac{1}{2}}^{1} t\,de^t$　　*P*95,1.6 题

(13) 二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''-4y'+3y=2e^{2x}$ 的通解为 $y=$________.

$=-(te^t-\int e^t$

*P*159,1.8 题

(14) 设曲面 $\sum$：$|x|+|y|+|z|=1$，则 $\oiint_{\Sigma}(x+|y|)\mathrm{d}S=$________.　　*P*110,1.6 题

(15) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^3$ 的秩为________.　　*P*172,1.3 题

(16) 在区间(0,1)中随机地取两个数，则这两个数之差的绝对值小于 $\frac{1}{2}$ 的概率为________.

*P*232,1.7 题

三、解答题(本题共 8 小题,满分 86 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(17)(本题满分 11 分)

求函数 $f(x,y)=x^2+2y^2-x^2y^2$ 在区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4,y\geqslant 0\}$ 上的最大值和最小值. P103,3.7 题

(18)(本题满分 10 分)

计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma} xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2zy\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $\sum$ 为曲面 $z=1-x^2-\dfrac{y^2}{4}(0\leqslant z\leqslant 1)$ 的上侧. P136,3.21 题

(19)(本题满分 11 分)

设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内具有二阶导数且存在相等的最大值,$f(a)=g(a),f(b)=g(b)$,证明:存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$. P71,3.7 题

(20)(本题满分 10 分)

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内收敛,其和函数 $y(x)$ 满足

$$y''-2xy'-4y=0,y(0)=0,y'(0)=1.$$

(Ⅰ)证明 $a_{n+2}=\dfrac{2}{n+1}a_n,n=1,2,\cdots$;

(Ⅱ)求 $y(x)$ 的表达式. P152,3.11 题

(21)(本题满分 11 分)

设线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\x_1+2x_2+ax_3=0,\\x_1+4x_2+a^2x_3=0\end{cases}\tag{1}$$

与方程

$$x_1+2x_2+x_3=a-1\tag{2}$$

有公共解,求 a 的值及所有公共解. P199,3.8 题

(22)(本题满分 11 分)

设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2$,且 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_1 的一个特征向量,记 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^5-4\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

(Ⅰ)验证 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量,并求 $\boldsymbol{B}$ 的全部特征值与特征向量;

(Ⅱ)求矩阵 $\boldsymbol{B}$. P218,3.9 题

(23)(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2-x-y, & 0<x<1,0<y<1,\\0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(Ⅰ)求 $P\{X>2Y\}$;

(Ⅱ)求 $Z=X+Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$. P245,3.12 题

(24)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\theta}, & 0<x<\theta,\\ \dfrac{1}{2(1-\theta)}, & \theta\leqslant x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中参数 $\theta(0<\theta<1)$ 未知,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本,$\overline{X}$ 是样本均值.

(Ⅰ)求参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$;

(Ⅱ)判断 $4\overline{X}^2$ 是否为 θ^2 的无偏估计量,并说明理由.　　$P268,7.10$ 题

2006 年全国硕士研究生入学统一考试试题

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分. 把答案填在题中横线上.)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=$________. 　　P46,1.5 题

(2) 微分方程 $y'=\dfrac{y(1-x)}{x}$ 的通解是________. 　　P159,1.7 题

(3) 设 $\sum$ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\ (0\leqslant z\leqslant 1)$ 的下侧,则 $\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$

________. 　　P100,1.5 题

(4) 点(2,1,0) 到平面 $3x+4y+5z=0$ 的距离 $d=$________. 　　P89,1.1 题

(5) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{E}$ 为 2 阶单位矩阵,矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$,则 $|\boldsymbol{B}|=$________.

P168,1.3 题

(6) 设随机变量 X 与 Y 相互独立,且均服从区间[0,3] 上的均匀分布,则 $P\{\max\{X,Y\}\leqslant 1\}=$

________. 　　P257,4.13 题

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(7) 设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数,且 $f'(x)>0$,$f''(x)>0$,Δx 为自变量 x 在点 x_0 处的增量,Δy 与 $\mathrm{d}y$ 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分,若 $\Delta x>0$,则　　(　　)

(A) $0<\mathrm{d}y<\Delta y$.　　(B) $0<\Delta y<\mathrm{d}y$.

(C) $\Delta y<\mathrm{d}y<0$.　　(D) $\mathrm{d}y<\Delta y<0$.　　P62,2.11 题

(8) 设 $f(x,y)$ 为连续函数,则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$ 等于　　(　　)

(A) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$.

(B) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$.

(C) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$.

(D) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$.　　P113,2.3 题

(9) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则级数 (　　)

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛.　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛.

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}$ 收敛.　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n + a_{n+1}}{2}$ 收敛.　　P144,2.5 题

(10) 设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数，且 $\varphi'_y(x,y) \neq 0$. 已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点，下列选项正确的是 (　　)

(A) 若 $f'_x(x_0,y_0)=0$，则 $f'_y(x_0,y_0)=0$.

(B) 若 $f'_x(x_0,y_0)=0$，则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$.

(C) 若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f'_y(x_0,y_0)=0$.

(D) 若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$.　　P99,2.7 题

(11) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 均为 n 维列向量，$\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，下列选项正确的是 (　　)

(A) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性相关.

(B) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性无关.

(C) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性相关.

(D) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性无关.　　P183,2.5 题

0

(12) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 行加到第 1 行得 $\boldsymbol{B}$，再将 $\boldsymbol{B}$ 的第 1 列的 -1 倍加到第 2 列得 $\boldsymbol{C}$，记 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，则 (　　)

(A) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$.　　(B) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PAP}^{-1}$.

(C) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}$.　　(D) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PAP}^{\mathrm{T}}$.　　P175,2.4 题

$P(B)>0$　　$P(A|B)=\Delta$　　$\dfrac{P(AB)}{P(B)}=1$

(13) 设 A,B 为随机事件，且 $\boxed{P(B)>0}$，$P(A\mid B)=1$，则必有 (　　)

(A) $P(A\cup B)>P(A)$.　　(B) $P(A\cup B)>P(B)$.

(C) $P(A\cup B)=P(A)$.　　(D) $P(A\cup B)=P(B)$.　　P231,1.5 题

$A\cup B=A$

(14) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$，Y 服从正态分布 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且

$$P\{|X-\mu_1|<1\}>P\{|Y-\mu_2|<1\},$$

则必有 (　　)

(A) $\sigma_1<\sigma_2$.　　(B) $\sigma_1>\sigma_2$.　　(C) $\mu_1<\mu_2$.　　(D) $\mu_1>\mu_2$.

P235,2.3 题

三、解答题（本题共 9 小题，满分 94 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．）

(15)（本题满分 10 分）

设区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1, x\geqslant 0\}$，计算二重积分

$$I=\iint\limits_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

P134,3.19 题

(16)（本题满分 12 分）

设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_1<\pi$，$x_{n+1}=\sin x_n\ (n=1,2,\cdots)$.

（Ⅰ）证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求该极限；

$\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n$

(Ⅱ) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.　　$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$　$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin x_n}{x_n}\right)$　　P50,3.2 题

(17) (本题满分 12 分)

将函数 $f(x)=\dfrac{x}{2+x-x^2}$ 展开成 x 的幂级数.　　P152,3.10 题

(18) (本题满分 12 分)

设函数 $f(u)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有二阶导数,且 $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$ 满足等式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

(Ⅰ) 验证 $f''(u)+\dfrac{f'(u)}{u}=0$.

(Ⅱ) 若 $f(1)=0,f'(1)=1$,求函数 $f(u)$ 的表达式.　　P164,3.6 题

(19) (本题满分 12 分)

设在上半平面 $D=\{(x,y)\mid y>0\}$ 内,函数 $f(x,y)$ 具有连续偏导数,且对任意的 $t>0$ 都有 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$. 证明:对 D 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 L,都有

$$\oint_L yf(x,y)\mathrm{d}x-xf(x,y)\mathrm{d}y=0.$$　　P135,3.20 题

(20) (本题满分 9 分)

已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=-1,\\4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1,\\ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1\end{cases}$$

有 3 个线性无关的解.

(Ⅰ) 证明方程组系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})=2$;

(Ⅱ) 求 a,b 的值及方程组的通解.　　P198,3.7 题

(21) (本题满分 9 分)

设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为 3,向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的两个解.

(Ⅰ) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量;

(Ⅱ) 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$,使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}$.　　P217,3.8 题

(22) (本题满分 9 分)

设随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2},-1<x<0,\\\dfrac{1}{4},0\leqslant x<2,\\0,\text{ 其他}.\end{cases}$$

令 $Y=X^2$,$F(x,y)$ 为二维随机变量 (X,Y) 的分布函数. 求:

(1) Y 的概率密度 $f_Y(y)$;

(2) $F\left(-\dfrac{1}{2},4\right)$.　　P244,3.10 题

(23)（本题满分 9 分）

设总体 X 的概率密度为

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\theta, & 0<x<1,\\ 1-\theta, & 1\leqslant x<2,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

其中 θ 是未知参数 $(0<\theta<1)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，记 N 为样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中小于 1 的个数，求 θ 的最大似然估计.　　P268,7.9 题

Y的分布函数　　∵ $Y=X^2\geq 0$ ∴ $Y<0$ 时, $F_Y(y)=0$

22. $F_Y(y)=P\{Y\leq y\}=P\{X^2\leq y\}=P\{-\sqrt{y}<X\leq\sqrt{y}\}$

$=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})$

① $-1<\cancel{-\sqrt{y}<0}$ 时　∵ $\sqrt{y}\geq 0$ ① $0\leq\sqrt{y}<2$ 时.　$-\sqrt{y}<-2$

$F_X(y)$ 对 y 求导

$f_Y(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}f_X(\sqrt{y})+\frac{1}{2\sqrt{y}}f_X(-\sqrt{y})$

$=\frac{1}{2\sqrt{y}}[f_X(\sqrt{y})+f_X(-\sqrt{y})]$

$0\leq\sqrt{y}<2$ 时 $\Rightarrow f_Y(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8\sqrt{y}}$

即 $0\leq y<4$ 时　②　$\cancel{0\leq\sqrt{y}<1}$ 时

$-\sqrt{y}<0$　　$-1<-\sqrt{y}<0$

$0<\sqrt{y}<2\Rightarrow\boxed{\sqrt{y}>1}$　　$f_X(\sqrt{y})=\frac{1}{2\sqrt{y}}[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}]$

$\Rightarrow\sqrt{y}>-2$　　$=\frac{3}{8\sqrt{y}}$

$-1<-\sqrt{y}<0$ 时

$\Rightarrow -\sqrt{y}>-1$

$\Rightarrow \sqrt{y}<1$