高等数学学习指导

主编　毕燕丽

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

高等数学学习指导

主　编　毕燕丽
副主编　武颖静

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书是与毕燕丽主编的《高等数学》教材配套的高等数学课程学习指导书.

本书意在指导学生如何学习高等数学;怎样理解知识点,解惑答疑;总结归纳解题方法,适当增加练习题量,以补充教材题量小的缺憾,促使学生通过做题掌握解题方法,提高对《高等数学》教材的学习水平,也可以满足想继续深造(专升本、自考)学生复习的需要.

本书内容包括:函数与极限、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用举例、常微分方程、多元函数微分学、二重积分、级数、拉普拉斯变换、矩阵及其应用、概率论初步、练习题参考答案.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导/毕燕丽主编. —天津:天津大学出版社,2010.8

ISBN 978-7-5618-3541-8

Ⅰ.①高… Ⅱ.①毕… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 130653 号

出版发行 天津大学出版社
出 版 人 杨欢
地　　址 天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编:300072)
电　　话 发行部:022-27403647　邮购部:022-27402742
网　　址 www.tjup.com
印　　刷 肃宁县科发印刷厂
经　　销 全国各地新华书店
开　　本 169mm×239mm
印　　张 17.75
字　　数 368 千
版　　次 2010 年 8 月第 1 版
印　　次 2010 年 8 月第 1 次
印　　数 1-4 000
定　　价 29.80 元

前　言

本书是与毕燕丽主编的《高等数学》教材配套的高等数学课程学习指导书.

本书意在指导学生如何学习高等数学;怎样理解知识点,解惑答疑;总结归纳解题方法,适当增加练习题量,以补充教材题量小的缺憾,促使学生通过做题掌握解题方法,提高对《高等数学》教材的学习水平,也可以满足想继续深造(专升本、自考)学生复习的需要.

本书内容包括:函数与极限、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用举例、常微分方程、多元函数微分学、二重积分、级数、拉普拉斯变换、矩阵及其应用、概率论初步、练习题参考答案.

本书的每一章由以下部分构成:主要内容、学法建议、疑难解析、基本方法解析、练习题、习题选解.

1. 主要内容

主要内容包括三部分:基本概念,基本公式、定理,基本方法.

在基本概念和基本公式、定理中,主要罗列出本章出现的定义、概念、公式、定理的名称,意在让学生对教材涉及的主要知识点一目了然,若有模糊不清的知识点,请参看教材,不再具体陈述,以节省篇幅.

在基本方法中罗列出本章主要题型,也是意在让学生对本章主要题型有一个深入的了解.而具体解题方法将在基本方法解析中归纳总结.

2. 学法建议

学法建议针对本章内容、知识结构、重难点内容、前后关联的知识点等,给学生如何学好本章知识提出合理性建议.

3. 疑难解析

疑难解析对教学过程中遇到的难以理解的概念、知识点等,进行解答,起到解惑答疑的作用.

4. 基本方法解析

基本方法解析对本章的主要题目类型、具体解题方法进行归纳总结,并且选取具有代表性的例题进行解析,起到抛砖引玉的作用.

5. 练习题

练习题的类型多样化且适当增大题量，以补充教材题量小的缺憾.

6. 习题选解

习题选解对课本中学生容易出错的部分习题、复习题进行具体解答，给学生以参考.

本书的主编是毕燕丽，副主编是武颖静，参加编写的还有姜成建、许春艳、于锦泽. 第1~8章、第11章由毕燕丽编写；第9章由于锦泽编写；第10章由姜成建编写；第12章由许春艳编写；第13章由武颖静编写. 全书的框架结构及定稿由毕燕丽承担.

由于水平有限，不足之处在所难免，敬请批评指正.

编　者

2010年4月

目　录

第 1 章　函数与极限

主要内容

1. 基本概念

函数,定义域,单调性,奇偶性,周期性,有界性,分段函数,反函数,复合函数,基本初等函数,初等函数,显函数,隐函数,数列的极限,函数的极限,左极限,右极限,无穷小量,无穷大量,高阶无穷小,同阶无穷小,等价无穷小,函数在一点连续,连续函数,间断点,第一类间断点(跳跃间断点,可去间断点),第二类间断点.

2. 基本公式、定理

基本公式:①$\lim\limits_{\square\to 0}\dfrac{\sin\square}{\square}=1$;②$\lim\limits_{\square\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\square}\right)^{\square}=e$(□代表同一变量,即同一表达式).

定理:单调有界原理,左右极限与极限的关系,极限与无穷小的关系,无穷小量的性质,极限的性质(唯一性、有界性、保号性、夹逼定理),极限的四则运算法则,初等函数的连续性,闭区间上连续函数的性质.

3. 基本方法

求定义域,求函数关系,判断两个函数是否相同,判断函数的奇偶性,判断两个函数能否构成复合函数,判断一个复合函数是由哪些简单函数构成的,求极限,判断函数在一点的连续性,判断函数的连续性,求间断点并判断其类型,证明方程有实根.

学法建议

(1)本章的重点是函数、复合函数、初等函数的概念以及定义域的求法、极限的求法、函数连续的概念. 特别是求极限的方法,灵活多样. 因此要掌握这部分知识,建议读者要总结经验体会,多做练习.

(2)本章所介绍的函数内容虽然绝大部分属于基本概念,并且在中学已经学过,但它们是微积分学本身研究问题时的主要对象和依据,因此,学习这一部分内容应在原有的知识基础上进行复习提高. 本章概念较多,且互相联系,例如:收敛,有界,单调有界;发散,无界,无穷大;极限,无穷小,连续等. 只有明确它们之间的联系,才能对它们有深刻的理解,因此要注意弄清它们之间的实质关系.

(3)要深刻理解函数在一点的连续概念,即极限值等于函数值才连续. 千万不要求到函数极限存在就得出函数连续的结论,特别注意判断分段函数在分段点的连续性.

(4)从实际问题中建立函数模型是解决实际问题关键性的一步,也是比较困难的

一步,因为要用到几何学、物理学、经济学等方面的知识与定律,要注意这方面的训练,以便逐步培养分析问题和解决问题的能力.

疑难解析

1. 组成函数的因素

组成函数的三要素是定义域、对应规律和值域. 三个因素中,前两个已经确定,后一个随之确定,因此称定义域和对应规律为函数的两个要素,要素相同则函数相同.

2. 分段函数一般不是初等函数

分段函数在不同区间上解析式不同,即它不能用一个解析式表示,所以说它不是初等函数. 但是也有特殊的分段函数,例如函数$f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$,与函数$g(x)=\sqrt{x^2}$是相同的函数,故$f(x)$可以用一个解析式表示,所以$f(x)$是初等函数.

3. 对极限的理解

(1)极限作为微积分的基础,在高等数学中占有很重要的地位,如连续、导数、定积分等概念都是用极限来定义的.

(2)函数的极限是函数在自变量的某一变化过程中的变化趋势,如果函数的变化趋势是固定的,则函数的极限存在,若函数的变化趋势不固定,则函数的极限就不存在. 这个变化趋势与自变量的变化过程及函数结构有关,而与函数在这点处是否有定义无关.

例如,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$,这是第一个重要极限,其中函数$y=\dfrac{\sin x}{x}$在$x=0$处无定义. 又如$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\sin x=0$(无穷小量与有界变量的积仍是无穷小量). 虽然是同一个函数求极限,但自变量的变化过程不同,导致极限值也不同.

4. 函数在$x=x_0$处有定义与函数在$x\to x_0$时的极限无关

在自变量的变化$x\to x_0$中考察函数$f(x)$有无固定的变化趋势,我们只需要求x充分接近x_0时$f(x)$存在,与$x=x_0$时或x远离x_0时$f(x)$有无定义、取何值毫无关系.

5. 极限$\lim\limits_{x\to 0}2^{\frac{1}{x}}$是否存在?

不存在. 因为当$x\to 0^+$时,$\dfrac{1}{x}\to+\infty$,所以$\lim\limits_{x\to 0^+}2^{\frac{1}{x}}=+\infty$;当$x\to 0^-$时,$\dfrac{1}{x}\to-\infty$,所以$\lim\limits_{x\to 0^-}2^{\frac{1}{x}}=0$,故$\lim\limits_{x\to 0}2^{\frac{1}{x}}$不存在.

6. 函数在一点有定义、极限存在、连续之间的关系

$f(x)$在x_0处连续必须同时满足:

(1)$f(x)$在$x=x_0$有定义;

(2)$f(x)$在$x\to x_0$时极限存在;

(3) $f(x)$ 在 $x \to x_0$ 时的极限值等于函数值 $f(x_0)$.

函数在一点有定义、极限存在、连续之间的关系如图 1-1 所示.

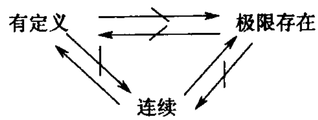

图 1-1

基本方法解析

一、求函数的定义域

对于初等函数求定义域，在没有注明的情况下，使算式有意义的自变量的取值范围就是其定义域；分段函数的定义域是指各个定义区间的并集；如果函数是由实际问题得出，其定义域除使表达式有意义外还要根据实际问题而定.

关于求函数定义域问题，应注意以下几点：

(1) 分母不能为零；

(2) 负数不能开偶次方；

(3) 对数的真数是大于零的；

(4) 三角函数中 $y=\tan x$ 要求 $x \neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，$y=\cot x$ 要求 $x \neq k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$；

(5) 反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$ 的定义域是 $[-1,1]$.

例 1　求函数 $f(x)=\ln(x^2-x-2)+\frac{x}{\sqrt{x+2}}$ 的定义域.

解　要使函数 $f(x)$ 有意义，x 必须满足

$$\begin{cases} x^2-x-2>0, \\ x+2>0, \end{cases}$$

从而得函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-2,-1)\cup(2,+\infty)$.

例 2　求下列函数的定义域.

(1) 已知 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，求 $y=f(\sin 2x)$ 的定义域；

(2) 已知 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，求 $y=f\left(x+\frac{1}{3}\right)+f\left(x-\frac{1}{3}\right)$ 的定义域；

(3) 已知 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$，求 $\underbrace{f(f(\cdots f}_{n\text{个}}(x)\cdots))$ 的定义域.

解　(1) $f(\sin 2x)$ 是由 $f(u)$ 与 $u=\sin 2x$ 复合而成的函数，因为 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，因此 $f(u)$ 中的 u 在 $[0,1]$ 上取值，即 $0\leqslant u\leqslant 1$，由此得出 $0\leqslant \sin 2x\leqslant 1$，可得 $2k\pi\leqslant 2x\leqslant 2k\pi+\pi\ (k\in\mathbf{Z})$，即 $y=f(\sin 2x)$ 的定义域为 $k\pi\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{2}\ (k\in\mathbf{Z})$.

(2)$f\left(x+\frac{1}{3}\right)$是由$f(u)$与$u=x+\frac{1}{3}$复合而成的函数，因为$f(x)$的定义域为$[0,1]$，因此$f(u)$中的$u$在$[0,1]$上取值，即$0\leqslant u\leqslant 1$，由此得出$0\leqslant x+\frac{1}{3}\leqslant 1$，得$-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{2}{3}$，于是$f\left(x+\frac{1}{3}\right)$的定义域是$\left[-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$.

同理，$f\left(x-\frac{1}{3}\right)$中的$0\leqslant x-\frac{1}{3}\leqslant 1$，得$\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{4}{3}$，于是$f\left(x-\frac{1}{3}\right)$的定义域是$\left[\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right]$.

因此$y=f\left(x+\frac{1}{3}\right)+f\left(x-\frac{1}{3}\right)$的定义域为$\left[-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]\cap\left[\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right]=\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$.

(3)由$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$得

$$f_2(x)=f(f(x))=\frac{f(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-(x/\sqrt{1-x^2})^2}}=\frac{x}{\sqrt{1-2x^2}},$$

由数学归纳法可得

$$f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1-nx^2}},$$

故$\underbrace{f(f(\cdots f}_{n个}(x)\cdots))$的定义域为$\left(-\frac{1}{\sqrt{n}},\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

注：函数$f(u)$与$f(x)$表示同一个函数，因此u与x的取值范围是一样的.

例3　已知函数$f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x\leqslant 1,\\ x+1, & 1<x\leqslant 4,\end{cases}$ $g(x)=f(x^2)+f(x+3)$，求$g(x)$的定义域.

解　分段函数的定义域是指各个定义区间的并集，所以$f(x)$的定义域为$(0,1]\cup(1,4]=(0,4]$.

对于$f(x^2)$，有$0<x^2\leqslant 4$，得$-2\leqslant x<0$或$0<x\leqslant 2$，即$f(x^2)$的定义域是$[-2,0)\cup(0,2]$.

对于$f(x+3)$，有$0<x+3\leqslant 4$，得$-3<x\leqslant 1$，即$f(x+3)$的定义域是$(-3,1]$.

因此$g(x)$的定义域是上述两个函数定义域的交集，即

$$([-2,0)\cup(0,2])\cap(-3,1]=[-2,0)\cup(0,1].$$

二、求函数关系式

求函数的关系式主要有以下类型：

(1)已知$f[\phi(x)]$，求$f(x)$；

(2)已知$f(x)$，求$f[\phi(x)]$；

(3)已知$f[\phi(x)]$，求$f[\psi(x)]$；

(4)已知$f(x)$与$g(x)$,求$f[g(x)]$(即求复合函数的关系式).

例 4　已知$f(x+1)=x^2+x+3$,求$f(x)$的表达式.

解法 1　令$x+1=t$,则$x=t-1$,将其代入原函数,有

$$f(t)=(t-1)^2+(t-1)+3=t^2-t+3,$$

故

$$f(x)=x^2-x+3.$$

解法 2　因为

$$f(x+1)=x^2+x+3=(x+1)^2-(x+1)+3,$$

故

$$f(x)=x^2-x+3.$$

注:①解决这类问题的关键是求出函数的对应规律,本题求出的函数对应规律是$f(\quad)=(\quad)^2-(\quad)+3$;②函数关系与自变量用什么字母表示无关.

例 5　已知$f(x)=\frac{x}{1-x}$,求$f[f(x)]$.

解　由已知$f(x)=\frac{x}{1-x}$,得

$$f[f(x)]=\frac{f(x)}{1-f(x)}=\frac{\frac{x}{1-x}}{1-\frac{x}{1-x}}=\frac{x}{1-2x}.$$

注:已知$f(x)$,求$f[\phi(x)]$这类问题的关键是先把函数的对应规律$f(\quad)$写出,再将$\phi(x)$代入括号中即可. 本题函数的对应规律为$f(\quad)=\frac{(\quad)}{1-(\quad)}$,再将$f(x)$代入括号后整理即得.

例 6　已知$f(x-2)=x^2-2x+3$,求$f(x+3)$.

解　令$x-2=t$,则$x=t+2$,将其代入原函数,有

$$f(t)=(t+2)^2-2(t+2)+3=t^2+2t+3,$$

从而得

$$f(x+3)=(x+3)^2+2(x+3)+3=x^2+8x+18.$$

注:这类问题要先求出$f(x)$,再求$f[\psi(x)]$.

例 7　设$f(x)=\begin{cases}e^x, & x>1,\\ 2x, & x\leqslant 1,\end{cases}$ $\phi(x)=\begin{cases}\sin x, & x>0,\\ x^2, & x\leqslant 0,\end{cases}$求$f[\phi(x)]$.

解　求分段函数的复合函数,应抓住最外层函数定义域的各区间段,结合中间变量的表达式及其定义域进行分析.

首先$f[\phi(x)]=\begin{cases}e^{\phi(x)}, & \phi(x)>1,\\ 2\phi(x), & \phi(x)\leqslant 1,\end{cases}$再分析$\phi(x)>1$,$\phi(x)\leqslant 1$时的$x$的取值范围.

(1)当$\phi(x)>1$时,有以下两种情况:

①若 $x>0$,则 $\phi(x)=\sin x>1$ 不成立;

②若 $x\leqslant 0$,则 $\phi(x)=x^2>1$,即 $x<-1$.

(2)当 $\phi(x)\leqslant 1$ 时,也有以下两种情况:

①若 $x>0$,则 $\phi(x)=\sin x\leqslant 1$,即 $x>0$;

②若 $x\leqslant 0$,则 $\phi(x)=x^2\leqslant 1$,即 $-1\leqslant x\leqslant 0$.

综上所述,$f[\phi(x)]=\begin{cases}e^{x^2}, & x<-1,\\ 2x^2, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ 2\sin x, & x>0.\end{cases}$

注:对于分段函数求关系式也是一样,首先找到函数的对应规律,例如本题 $f(x)$ 的对应规律为 $f(\quad)=\begin{cases}e^{(\quad)}, & (\quad)>1,\\ 2(\quad), & (\quad)\leqslant 1,\end{cases}$ 然后将 $\phi(x)$ 代入,再从 $\phi(x)>1$,$\phi(x)\leqslant 1$ 中找出自变量 x 在不同范围对应的关系式.

三、判断两函数是否相等

确定函数的两个要素是定义域和对应规律,因此只要两个函数的定义域和对应规律都相同,那么它们就是同一函数,与自变量和因变量用什么字母表示无关.

例 8 下列各对函数是否相同.

(1)$f(x)=\ln x^3$,$g(x)=3\ln x$;

(2)$f(x)=\ln x^2$,$g(x)=2\ln x$;

(3)$f(x)=x$,$g(x)=|x|$;

(4)$y=f(x)$,$u=f(t)$.

解 (1)相同. 因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域都是 $(0,+\infty)$,对应关系也相同,$f(x)=\ln x^3=3\ln x=g(x)$.

(2)不相同. 因为定义域不同,$f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,而 $g(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$.

(3)不相同. 虽然定义域相同,但函数关系不同,

$$f(x)=x,\quad g(x)=|x|=\begin{cases}x, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

(4)相同. 因为定义域和函数关系都相同,只是自变量和因变量用的字母不同.

四、函数的奇偶性

判断函数的奇偶性通常有两种方法:用定义或用性质判断.

例 9 判断下列函数的奇偶性.

(1)$y=e^{x^2}\sin x$; (2)$y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$; (3)$f(x)=\begin{cases}x^3+1, & x\geqslant 0,\\ -x^3+1, & x<0.\end{cases}$

解 (1)**解法 1(定义法)** 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,因为

$$f(-x)=e^{(-x)^2}\sin(-x)=-e^{x^2}\sin x=-f(x),$$

所以 $y=\mathrm{e}^{x^2}\sin x$ 为奇函数.

解法 2(利用奇偶函数的运算性质)　因为 e^{x^2} 是偶函数,$\sin x$ 是奇函数,所以 $y=\mathrm{e}^{x^2}\sin x$ 是奇函数.

(2)函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$,因为

$$\begin{aligned}f(-x)&=\ln\left(-x+\sqrt{1+(-x)^2}\right)\\&=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\\&=-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\\&=-f(x),\end{aligned}$$

所以函数 $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ 是奇函数.

(3)函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$,因为

$$\begin{aligned}f(-x)&=\begin{cases}(-x)^3+1, & -x\geqslant 0,\\ -(-x)^3+1, & -x<0\end{cases}\\&=\begin{cases}-x^3+1, & x\leqslant 0,\\ x^3+1, & x>0\end{cases}\\&=\begin{cases}x^3+1, & x\geqslant 0,\\ -x^3+1, & x<0\end{cases}\\&=f(x)\end{aligned}$$

所以函数 $f(x)=\begin{cases}x^3+1, & x\geqslant 0,\\ -x^3+1, & x<0\end{cases}$ 是偶函数.

注:在讨论函数的奇偶性时,一定注意先讨论函数的定义域是否关于原点对称.

五、判断两个函数是否构成复合函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f,函数 $u=\phi(x)$ 的值域为 R_ϕ,如果 $D_f\cap R_\phi\neq\varnothing$,则 $y=f(x)$ 与 $u=\phi(x)$ 可以构成复合函数 $y=f[\phi(x)]$,否则不能构成复合函数.

例 10　判断下列各组函数是否可以构成复合函数. 若能,求出复合函数及其定义域.

(1)$y=\arcsin u, u=\sqrt{2-x^2}$;　(2)$y=\ln u, u=-x^2+4x-4$.

解　(1)$y=f(u)=\arcsin u$ 的定义域为 $D_f=[-1,1]$,$u=\phi(x)=\sqrt{2-x^2}$ 的值域为 $R_\phi=[0,\sqrt{2}]$.

因为

$$D_f\cap R_\phi=[-1,1]\cap[0,\sqrt{2}]=[0,1]\neq\varnothing,$$

所以这两个函数能构成复合函数. 且

$$y=f[\phi(x)]=\arcsin\sqrt{2-x^2},$$

解不等式

$$\begin{cases}\sqrt{2-x^2}\leqslant 1,\\ 2-x^2\geqslant 0,\end{cases}$$

得复合函数的定义域为$[-\sqrt{2},-1]\cup[1,\sqrt{2}]$.

(2)$y=f(u)=\ln u$ 的定义域为 $D_f=(0,+\infty)$,$u=\phi(x)=-x^2+4x-4=-(x-2)^2\leqslant 0$,即 $u=\phi(x)$的值域为 $R_\phi=(-\infty,0]$,因为 $D_f\cap R_\phi=\varnothing$,所以这两个函数不能构成复合函数.

六、分析复合函数是由哪些简单函数复合而成

例 11 下列复合函数是由哪些简单函数复合而成.

(1)$y=\cos\ln(1+2x)$; (2)$y=\sqrt{\ln\sqrt{x}}$.

解 (1)$y=\cos\ln(1+2x)$由 $y=\cos u, u=\ln v, v=1+2x$ 复合而成;

(2)$y=\sqrt{\ln\sqrt{x}}$由 $y=\sqrt{u}, u=\ln v, v=\sqrt{x}$复合而成.

七、求极限的基本方法

1. 利用函数的连续性求极限

(1)初等函数在其定义域内连续:若函数$f(x)$是初等函数(一般地由一个解析式表达),只要$f(x_0)$存在,则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,即可归结为求函数值.

(2)复合函数的连续性:设有复合函数 $y=f[\varphi(x)]$,若$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$,而函数$f(u)$在点 $u=a$ 处连续,则$\lim\limits_{x\to x_0}f[\phi(x)]=f[\lim\limits_{x\to x_0}\phi(x)]=f(a)$.

例 12 求下列函数的极限.

(1)$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x+2}{x^3+3x-1}$; (2)$\lim\limits_{x\to\infty}\left[x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$.

解 (1)$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x+2}{x^3+3x-1}=\dfrac{3+2}{1+3-1}=\dfrac{5}{3}$.

(2)$\lim\limits_{x\to\infty}\left[x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\ln\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\ln e=1$.

2. 分解因式,消去无穷小因子法

当$x\to x_0$时,分子、分母都是多项式,且都趋于零,此时,先将分子、分母分解因式,消去无穷小因子 $x-x_0$,再求解.

例 13 求$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+2x-8}$.

解 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+2x-8}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-1)}{(x+4)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-1}{x+4}=\dfrac{1}{6}$.

3. 消去无穷大因子法

分子、分母趋于无穷大时,可先将分子、分母同时除以分子或分母的最大者,再求解.

例 14 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$；(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n^2+1}+n)^2}{\sqrt[3]{8n^6+1}}$；(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+4^n}{(-3)^n+4^{n+1}}$；

(4) 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$，试确定 a,b 的值.

解　(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & 当\ m=n\ 时,\\ 0, & 当\ m>n\ 时,\\ \infty, & 当\ m<n\ 时.\end{cases}$

本题结果可做公式用.

(2) $$\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+1}+n)^2}{\sqrt[3]{8n^6+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}(\sqrt{n^2+1}+n)^2}{\frac{1}{n^2}\sqrt[3]{8n^6+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)^2}{\sqrt[3]{8+\frac{1}{n^6}}}=\frac{4}{2}=2.$$

(3) $$\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^n+4^n}{(-3)^n+4^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(-2)^n}{4^n}+1}{\frac{(-3)^n}{4^n}+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n+1}{\left(\frac{-3}{4}\right)^n+4}=\frac{1}{4}.$$

(4) 本极限不能直接用极限的四则运算，必须先通分

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-ax^2-ax-bx-b}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2-(a+b)x+1-b}{x+1}=0.$$

因为 $x\to\infty$，由(1)题公式知，必须分母的最高次幂大于分子的最高次幂，所以有

$$\begin{cases}1-a=0,\\ a+b=0.\end{cases}$$

即

$$a=1,b=-1.$$

故当 $a=1,b=-1$ 时，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$.

4. 分子、分母有理化法

分母、分子都趋于零，或为“$\infty-\infty$”型未定式，且含有无理式，可先将分子或分母有理化，再求解.

例 15　求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{x+2}-1}{x+1}$；(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$；(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{x+2}-1}{x+1}$